- **Serie numeriche.** Definizione di somma parziale e di serie numerica. Definizione di serie convergente, divergente ed irregolare. Esempi. La serie geometrica. Le serie telescopiche. La serie di Mengoli. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Esempio di serie che soddisfa la condizione necessaria ma non converge. Serie a termini positivi: le serie a termini positivi possono solo convergere o divergere a $+\infty$. I criteri del confronto, del confronto asintotico, del rapporto e della radice. La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (con dimostrazione per $\alpha \leq 1$ e $\alpha \geq 2$).

  Serie a termini di segno qualunque. Convergenza assoluta. La convergenza assoluta è sufficiente per la convergenza semplice. Esempi. Criterio di Leibniz ed esempi. Esempio di serie che converge semplicemente ma non assolutamente.

Consideriamo una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Chiamiamo *serie di termine generale* a_n una **successione di somme finite** che denotiamo $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definite in questo modo:

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0\\
&s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1\\
&s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2\\
&\dots\\
&s_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = s_{k-1} + a_k.
\end{aligned}$$

Quindi il termine s_k è la somma dei primi k termini della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

e si chiama *somma parziale* (parziale perché non è la somma di tutti gli infiniti termini!).

Si denota la serie con questo simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ma si intende la successione delle somme parziali.

Esercizio 1. Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Scrivi i termini s_0, s_1, s_2 e s_k.

Più precisamente:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = \lim_{k\to+\infty} s_k}$$

Scrivi la definizione di serie convergente:

Scrivi la definizione di serie divergente:

Scrivi la definizione di serie irregolare:

Esercizio 2. Sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

detta serie di Mengoli. Scrivi il termine generale s_k della successione delle somme parziali e calcola la somma della serie.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie.
Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Scrivi l'ipotesi ed esplicita la sua definizione:

Scrivi la tesi:

Dimostrazione. Basta scrivere a_n come differenza di due successive somme parziali ed usare l'ipotesi

Questa condizione non è sufficiente, cioè non è vero che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}$ è convergente.

Esercizio 3. Trova una serie non convergente con termine generale che tende a 0.

Serie di base

Serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} & q \geq 1 \\ & |q| < 1 \\ & q \leq -1 \end{cases}$$

Serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ è } \begin{cases} & \alpha \leq 1 \\ & \alpha > 1 \end{cases}$$

Serie a termini non negativi

Una serie è a termini non negativi se il suo termine generale è maggiore o uguale a zero per ogni n.

Una serie a termini non negativi può essere irregolare?

☐ sì

☐ no

Fai vedere che alla successione delle somme parziali si può applicare il teorema di esistenza del limite per successioni monotone:

Esistono quattro criteri per studiare il carattere di serie a termini non negativi.

Scrivi quali sono:

-
-
-
-

Analizziamone uno alla volta.

Criterio del confronto. Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora

1. se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è divergente.
2. se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Dimostriamo il punto 1.

Prima di dimostrare il teorema, scrivi il teorema del confronto per le successioni e confrontalo con quello per le serie:

Ricorda che serie e successioni sono molto legate tra di loro.

Dimostrazione. Dalle serie passa alle successioni delle somme parziali e applica il teorema del confronto per successioni:

A questo punto, possiamo dimostrare facilmente anche il punto 2. Infatti, se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, di sicuro non può essere $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ divergente per quanto appena dimostrato. Dato che è una serie a termini non negativi, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ allora è convergente. □

Esercizio 4. Fai un esempio di applicazione del criterio del confronto.

Scrivi il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 5. Fai un esempio di applicazione del criterio del confronto asintotico.

Scrivi il criterio della radice.

Esercizio 6. Fai un esempio di applicazione del criterio della radice.

Scrivi il criterio del rapporto.

Esercizio 7. Fai un esempio di applicazione del criterio del rapporto.

Esercizio 8. Studia il carattere delle seguenti serie:

a. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\frac{n}{2}} \log n}{n!}$

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n) + n}{e^n + 3}$

c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2$

Serie a termini di segno qualunque

Il primo modo per studiare una serie a termini di segno qualunque, è mettere un modulo al termine generale e renderla a termini non negativi.

Scrivi la definizione di serie assolutamente convergente.

Teorema. Se una serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

Dimostrazione.

Passiamo dalla serie alla successione delle somme parziali, e costruiamo due successioni s_k^+ e s_k^- in base al segno dei termini:

Che caratteristiche ha la successione $\{s_k^+\}$? È limitata?

Che caratteristiche ha la successione $\{s_k^-\}$? È limitata?

Ti serve il teorema di esistenza del limite per successioni monotone e limitate. Scrivilo e concludi

Non è vero che se una serie converge semplicemente, allora converge anche assolutamente.

Esercizio 9. Trova una serie che converge semplicemente, ma non assolutamente.

Se la serie è a segni alterni, allora si può usare anche il seguente criterio:

Criterio di Leibniz. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni n. Se

- la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

allora la serie è convergente.

Esercizio 10. Studia la convergenza assoluta e semplice delle seguenti serie:

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^2+2n+3}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^n}{(2n-1)^n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin n}{n^2+n}$

Quiz. Scegliere la risposta corretta.

1. Data una successione $\{a_n\}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se

   Risposta 1

   A) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ *esiste finito*

   B) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

   C) $\{a_n\}$ *è monotona decrescente*

   D) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

2. Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, allora

   Risposta 2

   A) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge anche* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge*

   B) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge anche* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge*

   C) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge anche* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge*

   D) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge nulla si può dire su* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

3. Sia $a_n \geqslant 0$, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

   Risposta 3

A) converge oppure è irregolare

B) converge se e solo se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

C) converge se e solo se le somme parziali sono limitate

D) diverge solo se $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$

4. Per $q \in \mathbb{R}$ si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$. Allora

   Risposta 4

   A) la serie è a termini positivi

   B) la serie non è mai irregolare

   C) la serie diverge se e solo se $q > 1$

   D) se $|q| < 1$ *la serie converge*

5. Il criterio della radice afferma che la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se

   Risposta 5

   A) $lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

   B) $lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \ell$ *con* $\ell < 1$

   C) $lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ *con* $\ell < 1$

   D) non esiste $lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

6. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ldots 1$, allora la serie converge. (Completare l'enunciato sostituendo i puntini con il simbolo appropriato)

   Risposta 6

   A) $\leq$

   B) $<$

   C) $>$

   D) $\geq$

7. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se

   Risposta 7

   A) $\alpha > 1$

   B) $\alpha \geq 1$

   C) $\alpha < 1$

   D) $\alpha \leq 1$

8. Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi e sia $a_n \sim b_n$. Per il criterio del confronto asintotico

   Risposta 8

A) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge nulla si può dire su* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

B) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge se e solo se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge*

C) se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge nulla si può dire su* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

D) nessuna delle altre risposte

9. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$

Risposta 9

A) $\frac{e}{e-1}$

B) $\frac{1}{e-1}$

C) $\frac{e-1}{e}$

D) La serie diverge

10. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

Risposta 10

A) converge semplicemente ma non assolutamente

B) è irregolare

C) diverge

D) converge assolutamente

11. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^\alpha}$ converge per

Risposta 11

A) $\alpha > 1$

B) $\alpha > 0$

C) $\alpha > 2$

D) $\alpha \leq 2$

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n} =$

Risposta 12

A) 1/2

B) 3/2

C) 1/6

D) nulla si può dire

(Soluzioni: A B C D C — B A B A D — C C)

1.(Gennaio 2022) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\left(\frac{\sqrt{n^3}+2n^3}{2n^3}\right)} - e \right) \frac{1}{n^\alpha}.$$

2.(Settembre 2021) Studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n+n} \qquad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n) \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.(Luglio 2021) Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie seguente al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-x)^n}{n^2}$$

4.(Giugno 2021) Stabilire per quali valori del parametro $a \in [0, +\infty)$ la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n+1}{3^n}.$$

5.(Febbraio 2021) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n+1}{n!}.$$

6.(Gennaio 2021) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n} n!}{(2n+1)!}$$