

**Prova completa - Parte A**

Cognome e Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_

**Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti**

1. Sia data la funzione

$$f(x) = x - \frac{1}{\log x}.$$

Fornire uno studio completo della funzione (non è necessario studiare direttamente il segno della funzione che è deducibile dalle altre informazioni ottenute) e disegnarne il grafico. Si richiede in particolare di studiare con cura l'andamento della funzione nell'intorno di  $x = 0$ .

2. Si consideri la serie dipendente da un parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ 

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^\alpha} - 1}{n}.$$

- A) Studiare il carattere della serie per  $\alpha = 0$ ;
- B) Studiare il carattere della serie per  $\alpha = 1$ ;
- C) Studiare il carattere della serie per  $\alpha = -1$ .

3. A) Stabilire tramite un criterio il carattere del seguente integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log t}{t} dt$$

B) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x \sin(\log x) dx$$

4. Determinare il più semplice asintotico di ciascuna delle successioni seguenti e disporle quindi in ordine crescente di infinito, giustificando opportunamente la disposizione trovata.

$$\begin{aligned} a_n &= e^{n+1} - e^n, & b_n &= \log(e^{n+1} - e^n), \\ c_n &= e^{3 \log(n+1) - \log n}, & d_n &= n \log(n+1) - \log n. \end{aligned}$$