

Parte A

Cognome e Nome _____ Matr. _____

**Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti.
Giustificare in modo completo tutte le risposte.**

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{n}-2} - e^2 \right) \log \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right) \frac{(n+1)!}{n!};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3^x}.$$

2. a) Calcolare

$$\int \frac{x}{x^2 + 6x + 5} dx.$$

b) Stabilire se l'integrale

$$\int_{-1}^3 \frac{x}{x^2 + 6x + 5} dx$$

è definito oppure generalizzato.

Se definito, calcolarlo. Se generalizzato, studiarne la convergenza mediante un opportuno criterio (ricordando di verificare le ipotesi).

c) Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ il seguente integrale converge:

$$\int_{-1}^3 \frac{x}{(x^2 + 6x + 5)^\alpha} dx.$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x \frac{x-3}{x}.$$

a) Determinare i suoi eventuali asintoti.

b) Studiare la sua monotonia, scrivendo gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente.

c) Dopo aver studiato il segno della funzione, tracciarne un grafico qualitativo.

d) Calcolare la sua derivata seconda e scrivere il polinomio di Taylor di f al secondo ordine centrato in $x_0 = 1$ con resto secondo Peano.

4. Studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+2} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$$