

Parte A

Cognome e Nome _____ Matr. _____

**Gli esercizi valgono 11 punti ciascuno per un totale di 33 punti.
Giustificare in modo completo tutte le risposte.**

1. a) Calcolare

$$\int \frac{x}{x^2 + 6x + 5} dx.$$

b) Stabilire se l'integrale

$$\int_{-1}^3 \frac{x}{x^2 + 6x + 5} dx$$

è definito oppure generalizzato.

Se definito, calcolarlo. Se generalizzato, studiarne la convergenza mediante un opportuno criterio (ricordando di verificare le ipotesi).

c) Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ il seguente integrale converge:

$$\int_{-1}^3 \frac{x}{(x^2 + 6x + 5)^\alpha} dx.$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x \frac{x - 3}{x}.$$

a) Determinare i suoi eventuali asintoti.

b) Studiare la sua monotonia, scrivendo gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente.

c) Dopo aver studiato il segno della funzione, tracciarne un grafico qualitativo.

d) Calcolare la sua derivata seconda e scrivere il polinomio di Taylor di f al secondo ordine centrato in $x_0 = 1$ con resto secondo Peano.

3. a) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1 + 3x))}{e^x - 3^x}.$$

b) Disegnare il grafico di una funzione con le seguenti caratteristiche:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h+2) - f(2)}{h} = -\infty \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h+2) - f(2)}{h} = +\infty \quad f'(3) = 0$$

Indicare gli eventuali punti di discontinuità e gli eventuali punti di non derivabilità deducibili dalle informazioni date e caratterizzarli.