

**Prova completa – Parte A**

Cognome e Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_

Tutti i passaggi devono essere adeguatamente giustificati.

1. (i) [4 punti] Calcolare il seguente limite di successione.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3n^3 + 3n - 1} - \sqrt{3n^3})\sqrt{n}.$$

- (ii) [4 punti] Calcolare il seguente limite di funzione.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \sin(x) - \sin(x)}{x \log(1 + \sqrt{2x})}.$$

2. Discutere la convergenza semplice e la convergenza assoluta delle seguenti serie.

- (i) [4 punti]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log(n+1)}{(n+1)!}.$$

- (ii) [3 punti]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2}.$$

3. (i) [10 punti] Sia data la funzione  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{x^2}{2}(3 - 2 \log(x)) + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Determinare se la funzione  $f$  è continua e derivabile nel punto  $x = 0$ . Calcolare i limiti della funzione alla frontiera del dominio. Studiare la monotonia della funzione. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa  $x = 1$ .

4. (i) [4 punti] Calcolare il seguente integrale definito.

$$\int_2^3 \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx.$$

- (ii) [3 punti] Studiare usando un criterio il carattere del seguente integrale generalizzato.

$$\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin(x)}{1 + x^5} dx.$$