

Parte A

Cognome e Nome _____ Matr. _____

Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti

1. Determinare il carattere del seguente integrale generalizzato e, in caso sia convergente, calcolarlo:

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$

2. Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}.$$

Fornire uno studio completo della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, eventuali simmetrie, i limiti al bordo del dominio, eventuali asintoti, monotonia, punti di massimo e di minimo locali. Non è richiesto lo studio della convessità. Inoltre

- determinare il comportamento asintotico di f nei punti di annullamento e disegnare un grafico locale nell'intorno di tali punti.
- Esistono punti di massimo e di minimo assoluti?
- Disegnare un grafico probabile della funzione in base alle informazioni ottenute.

3. Determinare il carattere (convergenza semplice e assoluta) delle serie seguenti:

$$A = \sum_{n=2}^{+\infty} \log \left(\frac{e^n + 1}{e^n - 1} \right)$$
$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos \left(\frac{1}{n} \right)$$

4. Sia data la funzione definita a tratti seguente

$$f(x) = \begin{cases} x^x & x > 0 \\ a(x+1)e^x & x \leq 0. \end{cases}$$

- Stabilire (se esistono) per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è continua in $x = 0$;
- stabilire (se esistono) per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile in $x = 0$.