

Prova completa – Parte A

Cognome e Nome _____ Matr. _____

Tutti i passaggi devono essere adeguatamente giustificati.

1. [8 punti] Studiare la convergenza assoluta e semplice delle seguenti serie.

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad (ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{2n}}{5^n},$$
$$(iii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n) + 2}{n^3}, \quad (iv) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{3n}}{(n+1)!}.$$

2. [6 punti]

(i) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} dx.$$

(ii) Stabilire se i seguenti integrali sono definiti o generalizzati e calcolare il loro valore:

$$(a) \int_{-2}^0 \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} dx, \quad (b) \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} dx.$$

3. [12 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x} e^x.$$

- ▷ Determinare dominio, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.
- ▷ Determinare il segno di f .
- ▷ Determinare gli intervalli di monotonia e individuare, se presenti, i punti di massimo e di minimo locali e globali della funzione.
- ▷ Determinare gli intervalli di convessità e individuare, se presenti, i punti di flesso.
- ▷ Determinare la retta tangente alla funzione in $x = 1$.
- ▷ Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

4. [6 punti] Calcolare i seguenti limiti di funzione.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^x \cos(x^{\frac{3}{4}})}{\sqrt{x} \sin(x)}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\log(x-2)}.$$