1

Sono estratte (con rip) 10 palline della tombola (90 palline)

Calcola la probabilità che il massimo numero estratto sia 10 (Descrivere la f. di p. di M_n) (calcola il valore atteso)

$$\frac{\binom{10-1}{9}}{\binom{90}{10}} = \frac{1}{\binom{90}{10}} = 1.74 \cdot 10^{-13}$$

se il massimo è 10 ci sono 9 estratti nei primi 9 con choose(90, 10)

Funzione di probabilità $M_{10} = x$

$$p(M_{10} = x) = \frac{\binom{x-1}{9}}{\binom{90}{10}} \qquad 90 \geq x \geq 10$$

$$p(M_n = x) = \frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$90 \geq x \geq n$$

Derive che

$$\sum_{x=10}^{90} \binom{x-1}{9} = \binom{90}{10}$$

$\overline{\cancel{14}}$

2 2 1 0 4

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

PROVA SCRITTA DI

(MATERIA)

2

(COGNOME E NOME IN STAMPATELLO) MATR.

DATA

FOGLIO N.

SPAZIO RISERVATO

0 1 2 3 4 5 6 7 8

1) Sequenze binarie di lunghezza
$n = 10$ ($N = 2$ 0 1)
numero sequenze $2^{10} = 1024$

- Probabilità di 4 uno
$p = \binom{10}{4} / 2^{10} = 0.2051$ $\boxed{\text{vedi } 3}$

2) Un codice di 7 caratteri
dove i primi 3 sono lettere (26)
e le ultime 4 interi da 0 a 9

- Quanti codici $26^3 \times 10^4 = 175760000$

- Le prime 3 sono vocali (5)
e le ultime 4 numeri pari (5)
$(5^3 \times 5^4) / (26^3 \times 10^4) = 0.00044$

- Probabilità che le prime 3 siano
vocali diverse e le ultime 4 contengano
~~tutti~~ i numeri pari
$p = [5 \times 4 \times 3] \cdot [5 \cdot 4] / 26^3 \times 10^4 = 0.00021$

3) La sequenza binaria di lunghezza 10 ha 4 "1" non consecutivi

I° 2° II° III° IV° V° VI°

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

1 2 3 4 5 6 7

$$p = \frac{\binom{7}{4}}{2^{10}} = 0.0342$$

6 punti

Le sequenze binarie con 4 "1" ne ha le non consecutive

$$p = \frac{\binom{7}{4}/2^{10}}{\binom{10}{4}/2^{10}} = 0.1667$$

1 2 3 4 5 6

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

N = lung. string.

N − n zeri

n 1

(N − n) + 1 posti

N − n zeri

N − n + 1 p

0 0 0 0 0 0

$$\frac{\binom{N-n+1}{n}}{2^N}$$

4) In una mano di poker (4)

probabilità di 2 di un ~~colore~~ tipo e ~~due~~ 3 di un altro doppio + tripla

Casi possibili $\binom{52}{5}$

stage 1 task 1

$\binom{13}{1}$ modi di scegliere un tipo

stage 1 task 2

$\binom{4}{2}$ modi di scegliere 2 delle 4 carte del tipo prescelto

$\binom{13}{1}\binom{4}{2} = 13\binom{4}{2}$ modi di scegliere le ~~prime~~ 2 carte del primo tipo

stage 2 task 1

$\binom{12}{1}$ modi di scegliere un tipo dai 12 rimanenti

stage 2 task 2

$\binom{4}{3}$ modi di scegliere 3 delle 4 del tipo prescelto

$\binom{12}{1}\binom{4}{3}$ modi di scegliere ~~le~~ 3 carte del secondo tipo

$12 \binom{4}{3}$

$p = 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{3} \Big/ \binom{52}{5} = \cancel{1.44 \times 10^{-3}}$ ✓

0.0014

Probabilità di una coppia

$$P = \left[\binom{13}{1} \times \binom{4}{2}\right] \left[\binom{12}{3} \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\right] \Big/ \binom{52}{5} = 0.4226$$

TIPO PRIMA COPPIA — 2 COLORI X PRIMA COPPIA — TRE TIPI X CARTE RIMANENTI IN MODO DA NON FORMARE COPPIE O TRIS — UNA CARTA PER OGNI TIPO

STAGE 1

$\frac{52}{48}$ 44

Probabilità di 2 coppie

$$P = \left[\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\right] \left[\binom{11}{1} \binom{4}{1}\right] \Big/ \binom{52}{5} = 0.0475$$

2 TIPI X 2 COPPIE — 2 COLORI X PRIMA COPPIA — 2 COLORI X SECONDA COPPIA — TIPO CARTA RIMANENTE IN MODO DA NON FORMARE TRIS — UN COLORE

Probabilità di una sola tripla

$$P = \left[\binom{13}{1}\binom{4}{3}\right] \left[\binom{12}{2} \binom{4}{1}\binom{4}{1}\right] \Big/ \binom{52}{5} = 0.0211$$

TIPO X TRIPLA — COLORI X TRIPLA — DUE TIPI RIMANENTI — COLORI X RIMANENTI

$\binom{4}{x}\binom{4}{n-x}$ 2 $\frac{4!}{0!\,4!}$ $\binom{4}{4} = \binom{4}{0} = 1$ 6

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

SPAZIO RISERVATO

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

PROVA SCRITTA DI

(MATERIA)

(COGNOME E NOME IN STAMPATELLO) MATR.

DATA FOGLIO N.

Probabilità ~~tripla~~ doppia + tripla

$$\left[\binom{13}{1}\binom{4}{2}\right]\left[\binom{12}{1}\binom{4}{3}\right] \Big/ \binom{52}{5} = 0.0014$$

$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$

tipo x doppie — colori x doppie — TIPO x TRIPLA — COLORI TRIPLA

R

Quattro stesso tipo

$48 = \binom{48}{1}$

$$\left[\binom{13}{1}\binom{4}{4}\right]\left[\binom{12}{1}\binom{4}{1}\right] \Big/ \binom{52}{5} = 0.00018$$

TIPO — COLORE — $\underbrace{\text{CARTA RESTANTE}}_{36}$

pocker | stesso tipo

Tutte le carte dello stesso ~~colore~~ seme R

$$\binom{4}{1}\binom{13}{5} \Big/ \binom{52}{5} = 0.00198$$

COLORE — TIPO — SCELGO (carte pescate e colore)

Tutte le carte stesso ~~colore~~ seme in R
ordine ascendente (asso primo o ultimo)

$$10 \times \binom{4}{1} \Big/ \binom{52}{5} = 1.53\ 10^{-6}$$

CARTE DA CUI 100 PARTIRE (minimo) — COLORE

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K 1

4) Carte in ordine crescente ~~2~~ SR

$10 \times 4^5 \Big/ \binom{52}{5} = ?$ 0.0039

PARTENZA ORDINE COLORI

Poker 4 assi

$$\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \binom{48}{1}\Big/\binom{52}{5} = 1.84\ 10^{-5}$$

5) In un mazzo di 40 carte se ne prendono 5 SR

~~[illegible]~~

4 carte dello stesso tipo

$10 \cdot 36 \Big/ \binom{40}{5} = ?$ 0.00055

tipi e disponibili carte restanti

Almeno due assi

$$\left[\binom{4}{2}\binom{36}{3} + \binom{4}{3}\binom{36}{2} + \binom{4}{4}\binom{36}{1}\right]\Big/\binom{40}{5}$$

$= 0.063$

$\binom{40}{12}\binom{8+4+12}{12}$

con metodi

6) Un mazzo ha $n=12$ 40 carte $\binom{40-1+12}{12}$

A	B	C
5	4	3

estraggono incondizionatamente 12 carte SR

3^{12}

• P Nessuno estrae ~~coppe~~ spade $\binom{30}{5\,4\,3}$

Casi possibili $\Pi = \binom{40}{5}\binom{35}{4}\binom{31}{3}$ $p = 0.\cancel{6}155$

Casi favorevoli $\binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{21}{3}$ $\frac{30}{25!\,5!}\ \frac{25}{21!\,4!}\ \frac{21}{3!\,17}$

• A e B niente spade C esattamente 2 spade

$$\left[\binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{21}{1}\right]\left[\binom{10}{2}\right]\Big/\Pi = 0.0126$$

A B C — dal mazzo di non spade

C — dal mazzo di spade

$25\ \binom{21}{1}\binom{10}{2}$

$\binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{10}{2}\binom{21}{1}$

• A, B niente spade C (3 qualsiasi libero) $\binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{31}{3}$

$$P = \binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{31}{3}\Big/\Pi = 0.0523$$

A e B niente spade — C pesca dalle restanti

• A, B niente spade C almeno 2

$$\left[\binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{31}{3} - \binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{21}{3} - \binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{21}{2}\binom{10}{1}\right]\Big/\Pi$$

C 0,1,2,3 spade — C 0 spade — C 1 spada

11) 10 copie di un libro vengono distribuite a 5 biblioteche

$$\binom{n+N-1}{n}$$

P che ad ogni biblioteca venga sia assegnato almeno un libro

$$\binom{5+5-1}{5} \Big/ \binom{10+5-1}{10} = 0{,}1259$$

campione ordinato di progetti

8 ingegneri sono assegnati a 3 progetti A, B, C ($N=3$, $n=8$)

a un progetto più ingegneri, un ingegnere a un solo progetto

probabilità di

A	B	C	progetti
4	2	2	ingegneri

N^n

$$\binom{8}{4} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \Big/ 3^8 = \frac{8!}{4!\,2!\,2!} \Big/ 3^8 = 0{,}064$$

attribuzioni di 4 ingegneri ad A — coppie di ingegneri a B — resto a C

9) $n=10$ pezzi distinguibili devono essere classificati in $N=4$ categorie C_1 C_2 C_3 C_4

probabilità di

C_1	C_2	C_3	C_4
3	2	2	3

$$\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{3} \Big/ 4^{10} = 0.02403$$

$$\frac{10!}{3!\,7!} \cdot \frac{7!}{2!\,5!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!}$$

8 PIENO 10

	PIENO		
BSP	0.3	0.7	P(BSP) = 0.4
BESP	0.6	0.4	P(BESP) = 0.35
DIESEL	0.5	0.5	P(DIES) = 0.25
			1

0.3 = P(PIENO | BSP)

0.7 = P(NON P. | BSP)

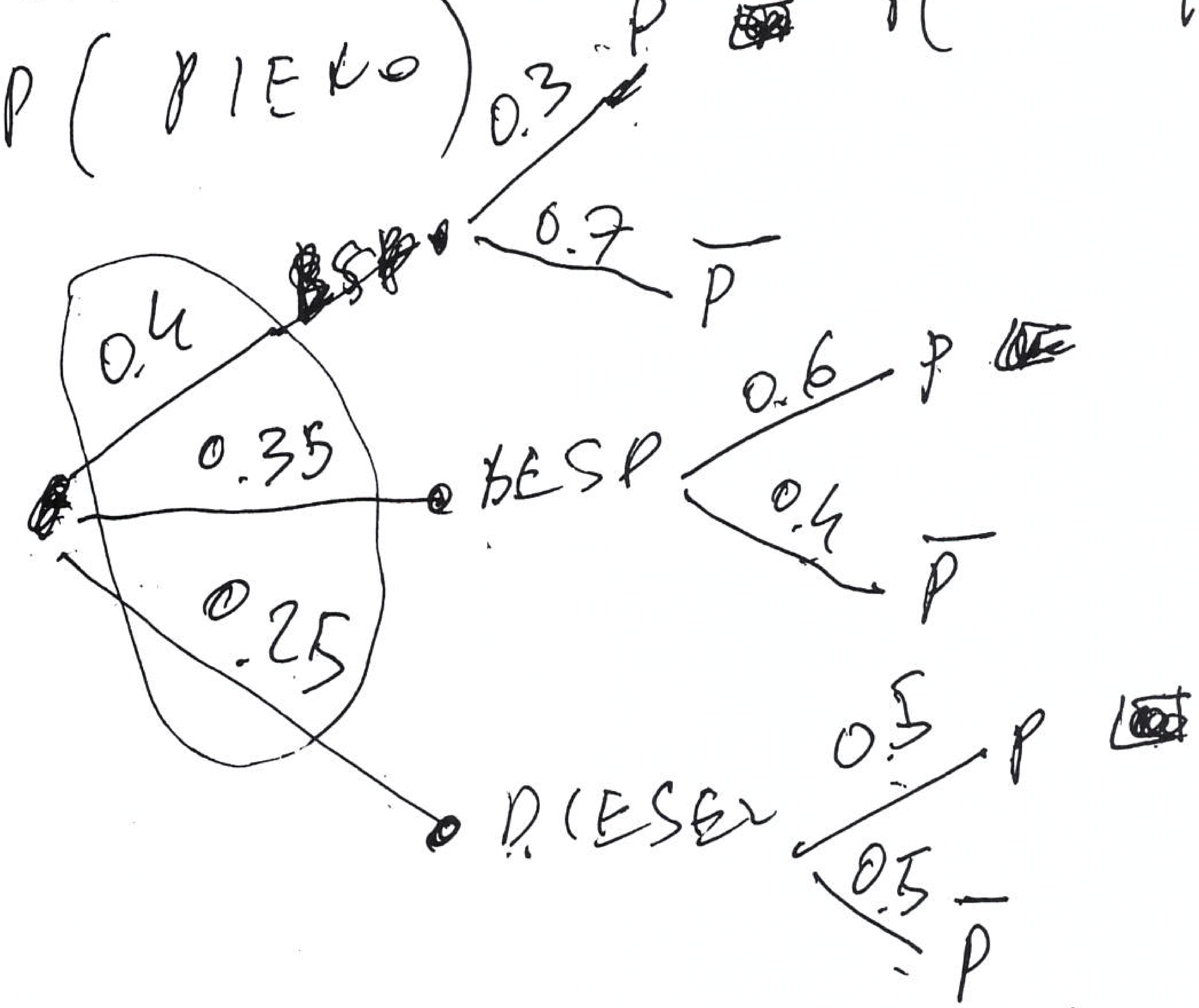
P(PIENO)

P(DIESEL | PIENO) 0.4 ×

0.35 ×

0.25 ×

0.455



P(~~PIENO~~

$$P(DIESEL \mid PIENO) = \frac{P(DIESEL \cap PIENO)}{P(PIENO)} = \frac{0.25 \times \ldots}{0.455}$$