SUMMER SCHOOL
SAN PELLEGRINO TERME 8-9-10 SETTEMBRE 2014

UN'AVVENTURA SENZA FINE: PARADOSSI, VERITA' E MERAVIGLIE DELL'INFINITO

(letture, giochi, esperimenti mentali per mettere in crisi, scombinare le nostre idee di tutto e di parte e scoprire la bellezza dell'infinito).

I PARTE

Teorema: dov'è l'errore?

Se esistono due numeri il cui rapporto è 3 a 5 allora 10=6

Dimostrazione
Siano x e y i due numeri, allora:
$x:y=3:5$ quindi $3y=5x$
moltiplicando ambo i membri per 4 avremo
$12y=20x$
che potremo scrivere nella forma
$30y-18y=50x-30x$
che è equivalente a
$30y-50x=18y-30x$
ovvero
$10(3y-5x)=6(3y-5x)$
quindi dividendo entrambi i membri per $3y-5x$ si ottiene che
$10=6$

II PARTE

Provate a risolvere alcuni dei seguenti quesiti.

1. Dimostrare che in una città di 150.000 abitanti vi sono due persone che hanno lo stesso numero di capelli.
   Van Etten, 1624

2. Sei in una stanza buia e devi prendere dei guanti e dei calzini pescando a caso in due cassetti.
   - In un cassetto ci sono 10 paia di calzini marroni e 10 paia blu. Quanti calzini devi prendere per essere sicuro di avere un paio di calzini dello stesso colore?
   - In un cassetto ci sono 10 paia di guanti marroni e 10 blu. Quanti guanti devi prendere per essere sicuro di avere un paio di guanti dello stesso colore?
   Perelman, FMP, c1935?

3. Tre numeri sono scelti a caso. La loro somma e' 19. Mostrare che almeno un numero è maggiore o uguale a 7.

4. Dati dodici numeri interi diversi, provare che almeno due di essi possono essere scelti in modo che la loro differenza sia divisibile per 11.

Bibliografia e fonti:
gli esercizi sono tratti in parte da un sito a cura di Gianfranco Bo e in parte dalle *Dispense di Combinatoria* a cura della prof.ssa Daniela Romagnoli.

III PARTE
(L'INFINITO POTENZIALE E ATTUALE)

L'insieme dei numeri naturali è un insieme infinito, totalmente ordinato, discreto; anche l'insieme dei numeri pari è un insieme infinito, totalmente ordinato, discreto, ed è un sottoinsieme proprio dei naturali.

1. Sono di più i numeri naturali o i pari?
   (per giustificare la risposta ripensate ai quesiti della seconda parte)
   La stessa situazione vale per l'insieme dei multipli di 3576?

2. In un'osteria entra un'infinità numerabile di avventori, ognuno di loro si siede su una seggiola occupandole tutte. Dopo un po' arriva un altro avventore, si può sedere? Se si, come? E se arrivasse un'infinità numerabile di avventori troverebbero posto a sedere? Se si, come?

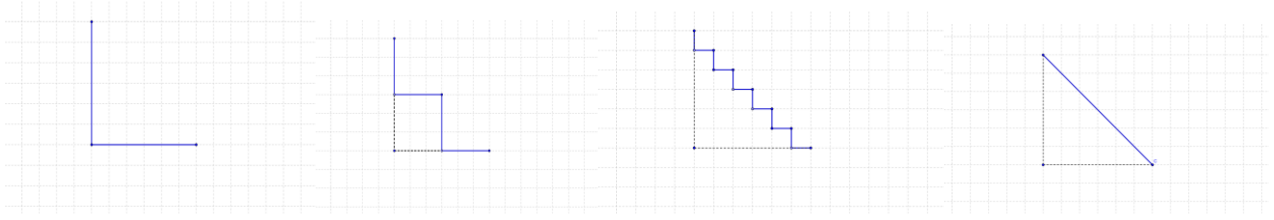
3. L'insieme degli interi Z è numerabile? Provate a giustificare la risposta.

IV PARTE

1. L'insieme dei numeri razionali si può rappresentare sulla retta. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri razionali e i punti della retta?

2. La radice di due si può rappresentare sulla retta?

3. In un quadrato di lato 1 la diagonale è $\sqrt{2}$. Considerate i due lati adiacenti di lato unitario: la somma delle loro lunghezze è ovviamente 2. Dividete ognuno dei due lati a metà e flettete di 90° i due segmenti che contengono il vertice: la somma della linea a scala così ottenuta è, ovviamente, ancora 2. Ripetete l'operazione di spezzettatura e di flessione: si ottiene una scala il cui numero di gradini è il doppio dei precedenti.



Indicate con n il numero dei gradini e facciamo tendere n all'infinito, la linea tende ad essere la diagonale del quadrato e "quindi" o il ragionamento è sbagliato oppure 2= $\sqrt{2}$!

- Discutete della questione cercando di capire dove sta l'errore.

Il paradosso di Zenone.

Consideriamo il classico problema di Achille e la tartaruga introdotto dal filosofo greco Zenone di Elea nel V secolo a.C. il più famoso tra i paradossi matematici:

Achille insegue la tartaruga che inizialmente ha un vantaggio di 1 metro; la velocità di Achille è di 10m/s, quella della tartaruga 1m/s. Quando Achille raggiungerà la tartaruga?

Supponiamo che si svolga una singolare gara di corsa fra Achille (il *piè veloce*) ed una tartaruga. La sfida è impari, ma la tartaruga parte con un po' di vantaggio, per esempio 10m
(in Fig.1, i 10m sono rappresentati dal tratto A_0A_1).

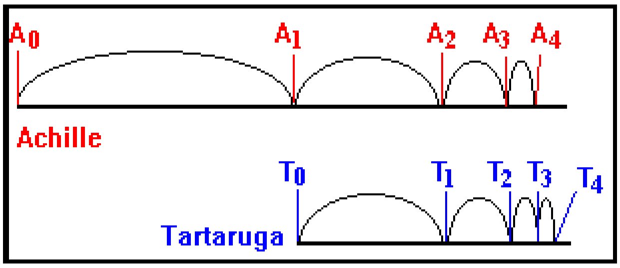


Fig.1

Nel tempo che Achille impiega per andare da A_0, il suo punto di partenza, a T_0=A_1 , il punto da cui parte la tartaruga, quest'ultima si sarà spostata in una posizione T_1 (vedi ancora Fig. 1), e quando Achille arriva in T_1=A_2, la tartaruga avrà raggiunto una nuova posizione in T_2 .
Altrettanto accade per T_3, T_4 ,... e via all'infinito. Quindi il paradosso sta qui:

Achille non raggiungerà mai la tartaruga!

Per farlo dovrebbe percorrere un infinità di tratti del tipo T_n , T_{n+1}, sempre più piccoli, ma mai nulli.

- Come potete risolvere il problema?

Per approfondire

- Quanti sono i punti di un segmento?
- È possibile confrontare la numerosità dei punti di due segmenti di lunghezza diversa? Come?
- Tra i punti di una retta e i punti di un segmento c'è corrispondenza biunivoca? E tra i punti del lato del quadrato e il quadrato?

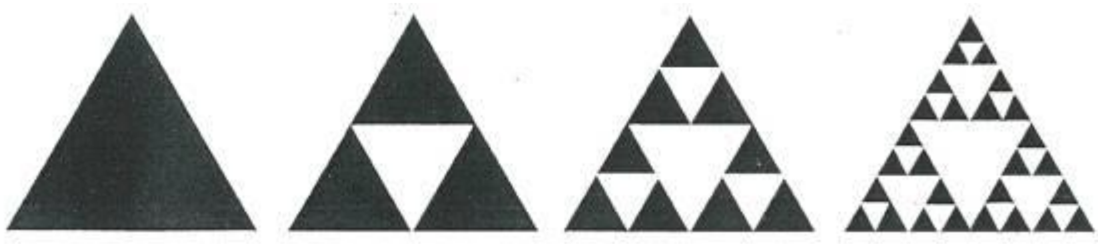
La polvere di Cantor

L'insieme di Cantor è definito in modo ricorsivo, partendo dall'intervallo [0, 1] e rimuovendo ad ogni passo un segmento aperto centrale da ogni intervallo. Al primo passo rimuoviamo da [0, 1] il sotto-intervallo (1/3, 2/3), e rimaniamo quindi con due intervalli [0, 1/3] ∪ [2/3, 1]. Al secondo passo rimuoviamo un segmento aperto centrale in entrambi questi intervalli (avente lunghezza un terzo della lunghezza del segmento, come al primo passo), e otteniamo quattro intervalli ancora più piccoli. L'insieme di Cantor consiste di tutti i punti dell'intervallo di partenza [0, 1] che non vengono mai rimossi da questo procedimento ricorsivo: in altre parole, l'insieme che rimane dopo aver iterato questo procedimento infinite volte. È chiamato con termini suggestivi come *polvere di Cantor*.

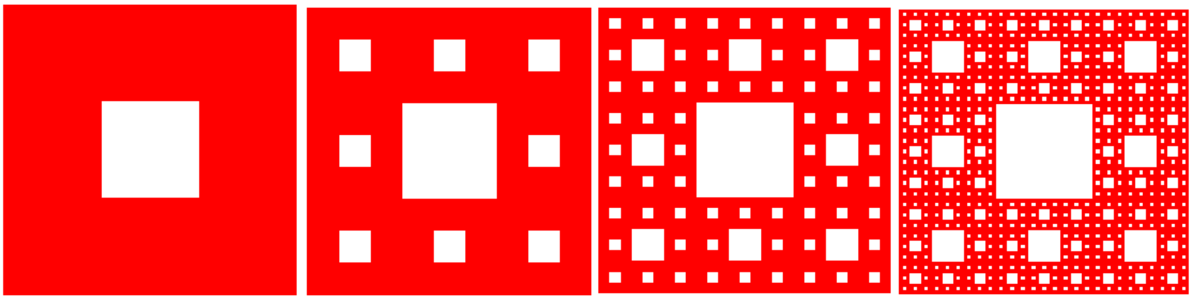
I primi sei passi di questo processo sono illustrati qui sotto.

Il triangolo di Sierpinski è generato da una successione infinita di rimozioni, iterando il procedimento:

"Dato un triangolo equilatero pieno, lo si divida in 4 triangoli equilateri e si rimuova il triangolo centrale rivolto verso il basso. Rimangono 3 triangoli: ad ognuno di essi si applichi lo stesso procedimento all'infinito". Dopo 3 iterazioni, ecco come appare il triangolo:

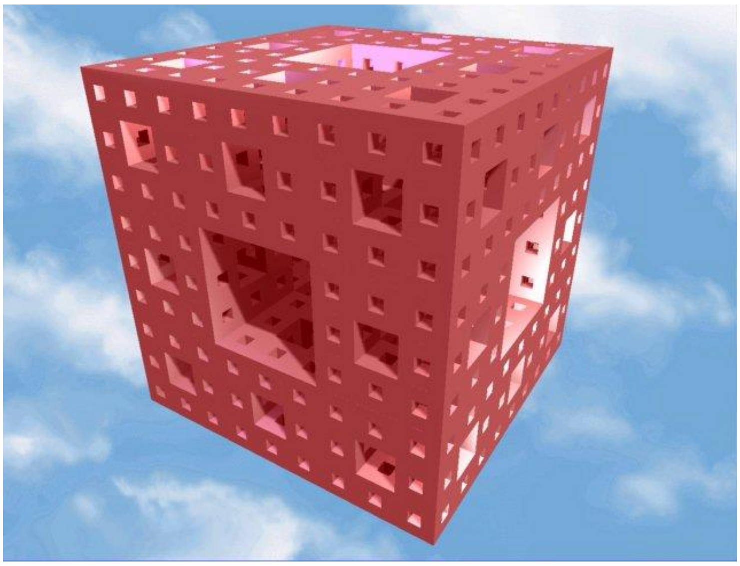


Un algoritmo simile a quello del triangolo di Sierpinski permette invece di costruire il ***"tappeto di Sierpinski":***



Se un analogo procedimento viene applicato ad una forma solida, in particolare ad un cubo (effettuando una serie di infinite rimozioni di cubi), si ottiene un oggetto stranissimo, detto ***"spugna di Menger"***. L'area della superficie della spugna tende all'infinito, mentre il volume dello spazio da essa delimitata tende a zero. Questa sorta di paradosso geometrico è uno dei motivi per cui figure di questo tipo sono state per lungo tempo ignorate o oggetto di aspre critiche da parte di molti matematici.

Una galleria di figure piane e solide costruite con questi criteri si può trovare all'indirizzo (in francese):



http://www.mathcurve.com/fractals/sierpinski/sierpinski.shtml