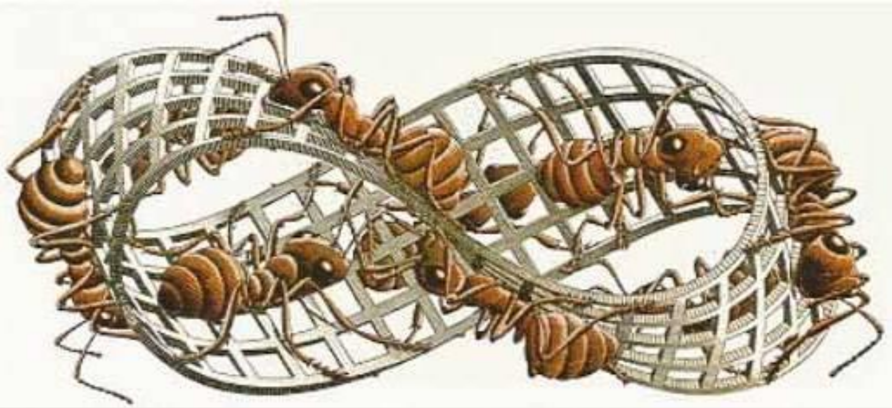


Un'avventura senza fine: paradossi, verità e meraviglie dell'infinito

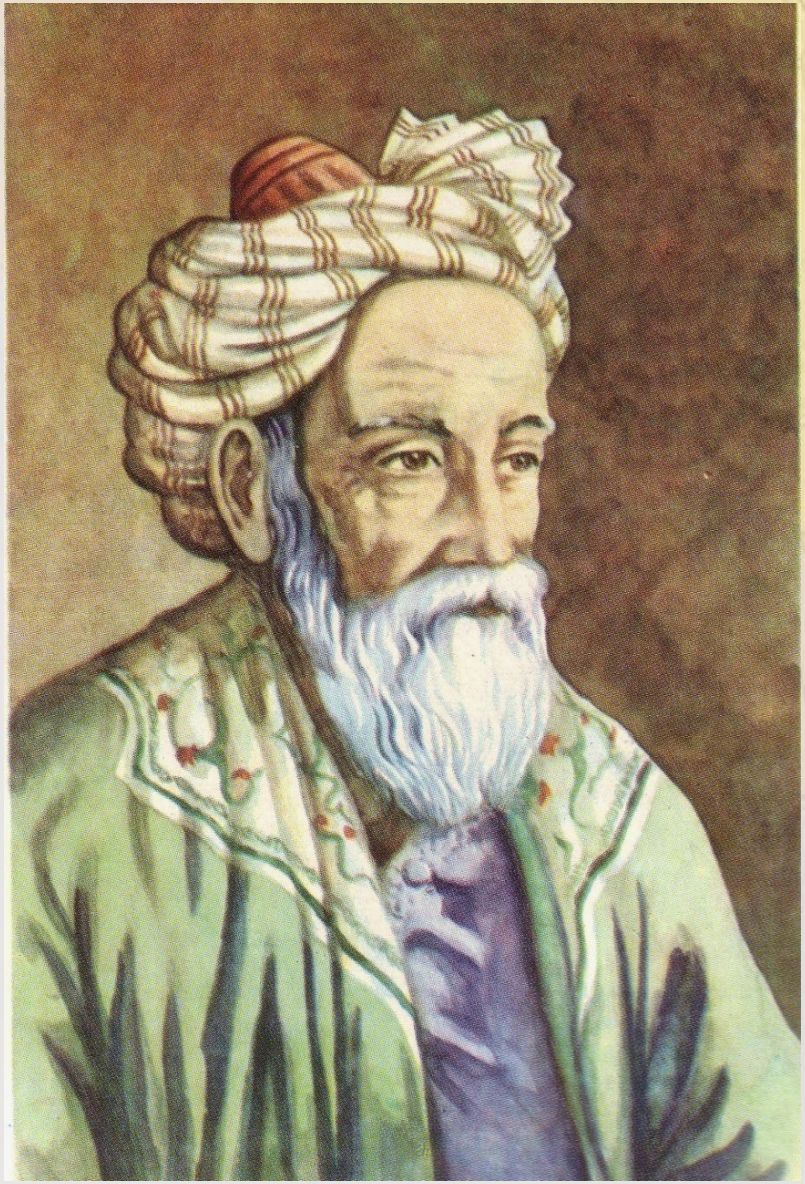
Da zero a infinito: una breve storia tra arte, letteratura e matematica; da Pitagora a Cantor, da Dante a Borges, dalla pittura medievale all'astrattismo: letture, giochi, esperimenti mentali, immagini per mettere in crisi, scombinare le nostre idee di tutto e di parte e scoprire la bellezza dell'infinito.

partiamo da zero, sembra niente (ma forse è tutto)

"per vedere nulla ci vuole una vista ottima".

Lewis Carroll

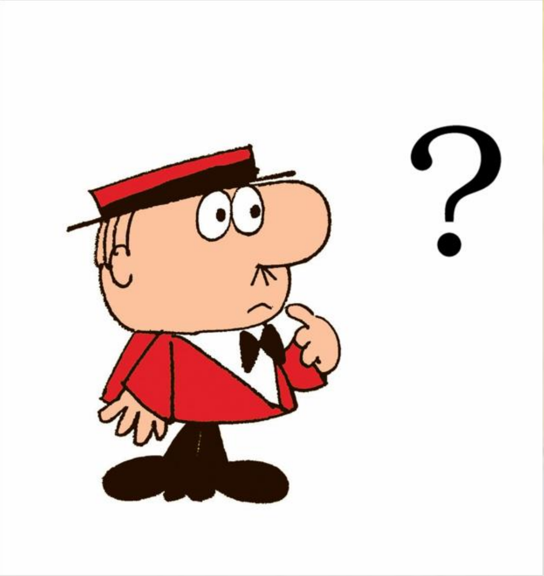
Poi che null’altro che vacuo vento ci resta d’ogni cosa ch’esiste,
Poi che difetto e sconfitta colgono al fine ogni cosa,
Considera bene: ogni cosa che è, è in realtà nulla;
Medita bene: ogni cosa ch’è nulla, è in realtà tutto.



Omar Khayyam (1048-1131) matematico, astronomo, poeta e filosofo persiano

10=6? !

Teorema: dov'è l'errore?
Se esistono due numeri il cui rapporto è 3 a 5 allora 10=6
Dimostrazione
Siano x e y i due numeri, allora:
$x:y=3:5$ quindi $3y=5x$
moltiplicando ambo i membri per 4 avremo
$12y=20x$
che potremo scrivere nella forma
$30y-18y=50x-30x$
che è equivalente a
$30y-50x=18y-30x$
ovvero
$10(3y-5x)=6(3y-5x)$
quindi dividendo entrambi i membri per 3y-5x si ottiene che
$10=6$



ma se $3y=5x$ allora $3y-5x=0$ quindi non possiamo dividere per $3y-5x$ perché la divisione per zero è impossibile

Osservate la tastiera del vostro computer o quella del telefono

Lo zero evidentemente ci imbarazza. Tutti sappiamo che deve precedere l'1, ma è più sicuro tenerlo isolato. E' il simbolo del nulla e il nulla ci fa paura

Lo zero

Il nocciolo della questione è che per le normali attività lo zero non ci serve affatto. Nessuno va al mercato a comprare zero pesci. Lo zero è in un certo senso il più civilizzato dei numeri il suo impiego ci viene imposto dalle esigenze legate all'esercizio di una raffinata razionalità.

Alfred North Whitehead

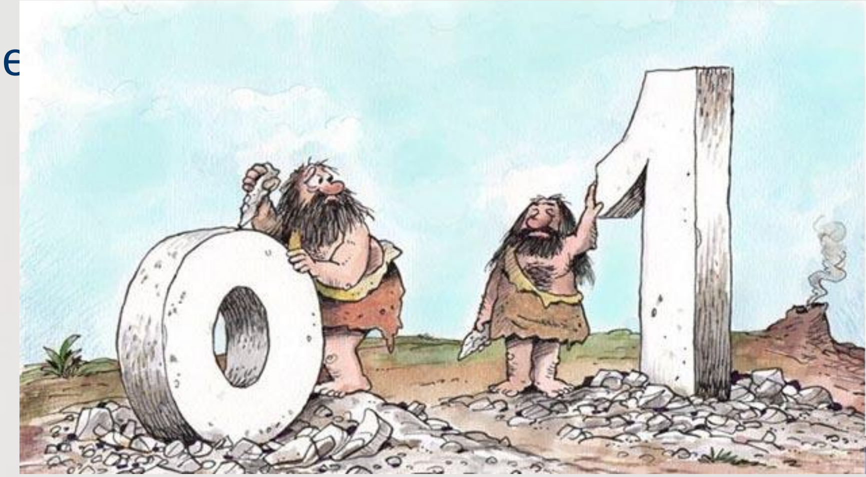
Un po' di storia

Lo zero si scontrò con uno dei principali assunti della filosofia occidentale: il vuoto non esiste.

La visione greca della realtà fisica foggiata da Pitagora, da Aristotele e Tolomeo non poteva contemplare il "niente".

Per questo l'occidente per quasi duemila anni non poté accettare il concetto di zero.

Questo frenò lo sviluppo delle matematiche



Da: Zero, storia di un'idea pericolosa
C. Seife Bollati Boringhieri

È difficile concepire la paura di un numero, eppure essendo zero connesso al vuoto e al nulla esso genera timore.

Le credenze di gran parte dei popoli antichi contemplavano una caotica mancanza di alcunché prima che l'universo cominciasse ad esistere.

La narrazione ebraica della Genesi afferma come il mondo non fosse che un nulla amorfo prima che Iddio lo irraggiasse di luce e ne costituisse le forme.

Essendo la condizione naturale all'inizio dei tempi costituita da cosmico vuoto e disordine, rimaneva il tarlo dell'inquietudine che un giorno, alla fine dei tempi, la situazione si ripresentasse.

Era lo zero il simbolo di quel vuoto.

Ma il timore dello zero scendeva più in profondità rispetto alla semplice angoscia riguardo al nulla.

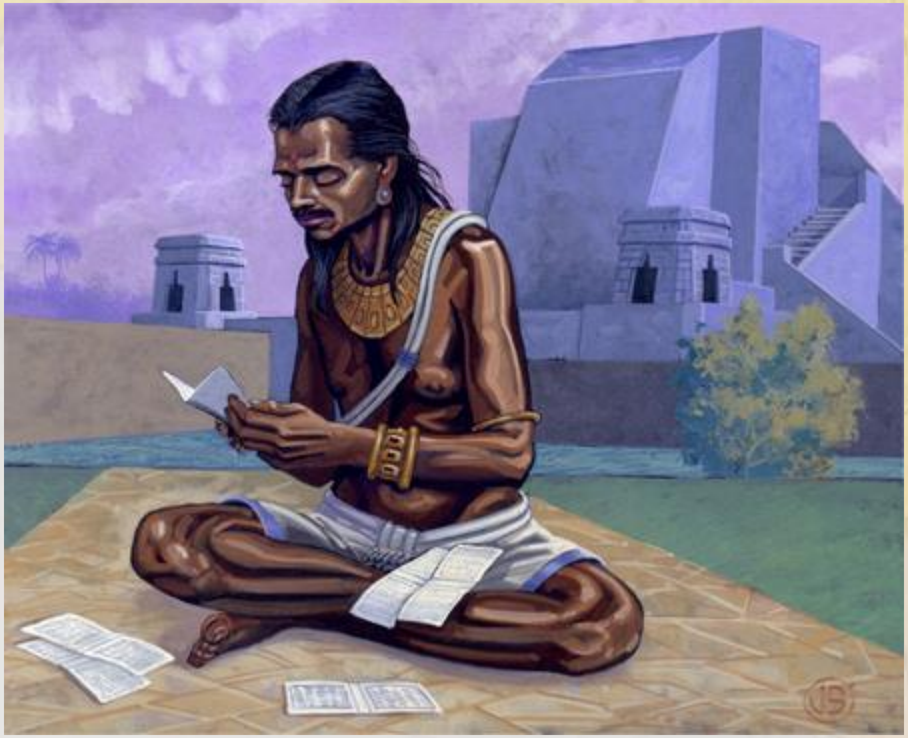
Agli occhi degli antichi le proprietà dello zero erano inesplicabili, quel particolare numero è differente da tutti gli altri.

Lo zero si rifiuta di aumentare e del pari rifiuta di far aumentare ogni altro numero.

Lo zero non ha consistenza, ma seppur ne sia privo, mina alle fondamenta le più semplici operazioni matematiche quali moltiplicazione e divisione.

Contrariamente all'Occidente che lo temeva l'Oriente riservò allo zero una buona accoglienza.

I matematici indiani recepirono lo zero dandogli il ruolo di numero a tutti gli effetti.



brahmagupta

Dall’India lo zero e il nuovo sistema di numerazione arriveranno in Europa.

Non direttamente, ma attraverso gli arabi. Nel secolo IX dopo Cristo, Abu Jafar Muhammad Ibn Musa al-Khwarismi, cioè Mohammed padre di Jafar e figlio di Musa, il Kwarismiano (della provincia persiana di Khoresm) scrisse un libretto di aritmetica nel quale spiegava l’uso dei nuovi numeri, da lui conosciuti attraverso gli scritti dei matematici indiani, alcuni dei quali erano arrivati alla corte di Bagdad.

Il libro ebbe una grande diffusione e, tradotto in latino, probabilmente da Abelardo di Bath, verso il 1120, contribuì a far conoscere anche ai matematici europei il nuovo sistema di numerazione.

Uno dei primi manuali di presentazione delle nuove cifre è stato il Liber Abaci, scritto da Leonardo Fibonacci nel 1202. Il padre di Fibonacci era un mercante e il commercio lo aveva portato a contatto con il mondo arabo.
Fibonacci ebbe così modo di studiare sotto la guida di un maestro musulmano e di compiere molti viaggi in Oriente, venendo a conoscenza dei nuovi numeri e dei loro grandi vantaggi nel far di conto.
"Gli indiani - scrive Fibonacci nel suo libro – usano nove figure: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 e con queste, assieme al segno 0, che gli arabi chiamano cephirum, scrivono qualsiasi numero".

Così poterono cambiare la propria maniera di rappresentare i numeri da uno stile simile a quello greco alla notazione posizionale.

Usando la notazione posizionale una persona era in grado di eseguire moltiplicazioni più rapidamente di uno che usava l'abaco.

Il metodo algoritmista risultava vincente.

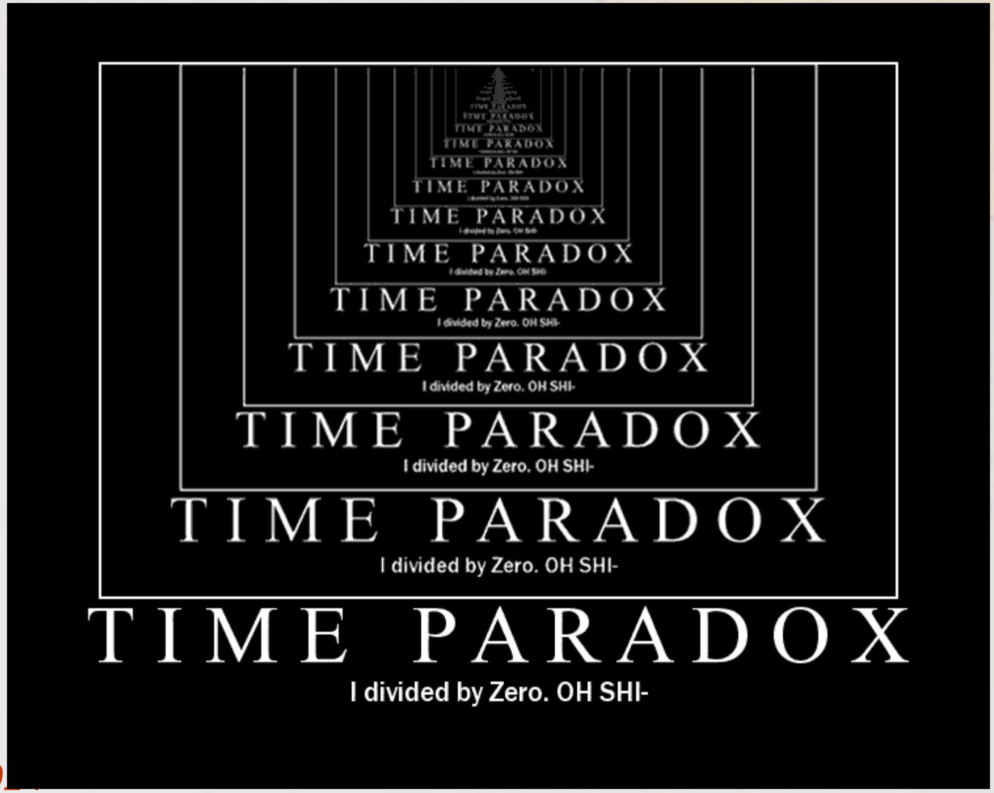
Il sistema di numerazione indiano permette di eseguire calcoli slegati da possibili associazioni geometriche.

Ciò permise la nascita della moderna algebra.

Era quindi possibile fare 2-3 e generare i numeri negativi.

Anche per gli indiani zero era un numero particolare.

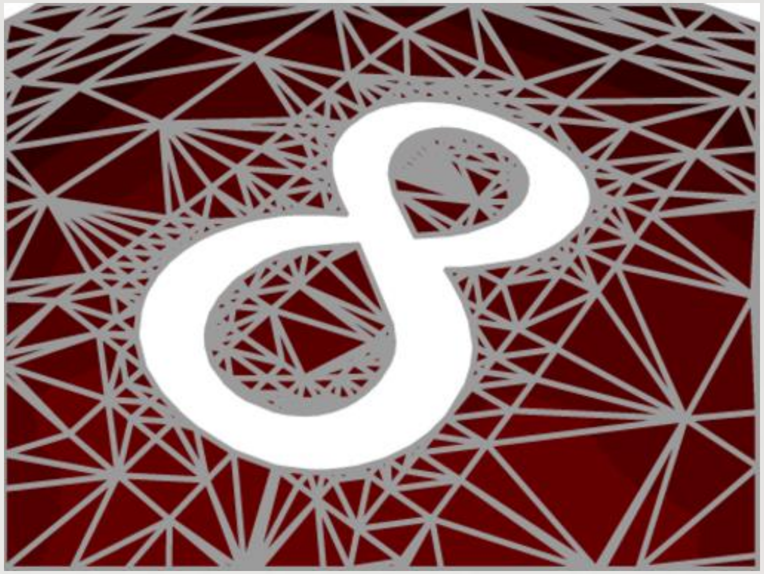
Zero nella moltiplicazione riassorbe ogni cosa a sé, nella divisione scatena il finimondo.



ANIMALE, VEGETALE O PRIMO MINISTRO?

Da zero a infinito e viceversa …..

"zero e infinito - dice Seife - sono sempre apparsi ambiguamente simili. Moltiplicando zero per una qualunque quantità si ottiene zero, moltiplicando infinito per una qualunque quantità si ottiene infinito. La divisione per zero porge infinito, la divisione per infinito porge zero". Zero e infinito sono le due facce della stessa medaglia e la trasgressiva natura dello zero non può essere compresa senza lo studio dell'infinito.



"L'infinito è un parto della nostra immaginazione, della nostra piccolezza ad un tempo e della nostra superbia [...] l'infinito è un'idea, un sogno, non una realtà: almeno niuna prova abbiamo noi dell'esistenza di esso, neppur per analogia"

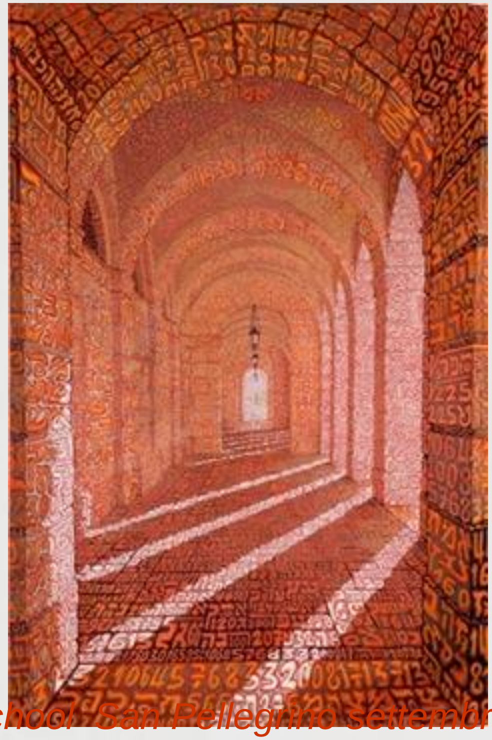
Zibaldone G. Leopardi

L’uomo incontra molto presto, nella sua vita, l’idea dell’infinito: probabilmente ancora da bambino, nel momento in cui si accorge che si può andare avanti finché si vuole a contare. E quando l’idea dell’infinito sfiora per la prima volta il bambino, poi non l’abbandona più, almeno come suggestione, come tensione.
Altra cosa la“comprensione”...

L’uomo ha incontrato molto presto l’idea dell’infinito e non l’ha più abbandonata, venendone a volte **attratto, a volte respinto, facendone, talvolta, oggetto di desiderio, altre volte di studio e sistematica ricerca.**

“C’è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l’Etica: parlo dell’Infinito”
J. L. Borges, Otras Inquisiciones

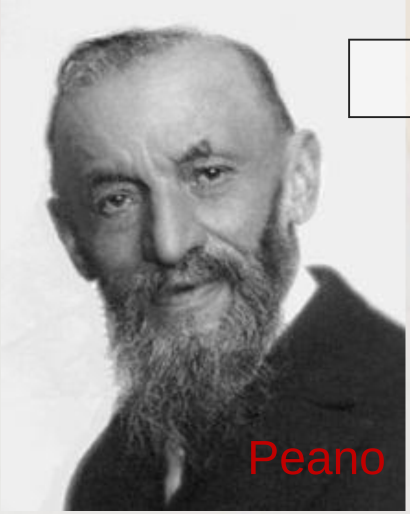
L’infinito è una conquista del pensiero: è la testimonianza che l’intelletto, pur partendo dall’esperienza, può superarne limiti e confini.
L’esperienza umana è per sua natura finita e limitata: possiamo toccare solo oggetti che ci sono vicini, a portata di mano; possiamo ascoltare solamente suoni emessi da sorgenti non troppo distanti; impieghiamo un tempo finito *(magari molto piccolo, ma finito)* per effettuare qualsiasi tipo di percezione o ragionamento, *lo spazio visivo è definito dalle leggi della prospettiva*, nelle quali punti e rette di fuga ci ricordano che la visione è limitata, confinata all’interno di una linea di orizzonte che non può essere superata.



Ma è proprio quest’esperienza limitata che suggerisce l’esistenza di qualcosa che va oltre, di un altro mondo che non è finito né limitato.
È proprio la presenza di un **limite, di un confine che pone la domanda e richiede la ricerca di** che cosa c’è *dopo, di che cosa si trova oltre.*

CASPAR DAVID FRIEDRICH (1774 –1840)

Le sorprese del finito


Peano

- Dimostrare che in una città di 150.000 abitanti vi sono due persone che hanno lo stesso numero di capelli.

  Van Etten, 1624

- (Peano precisa: si stima che la superficie del capo umano portante capelli è di 775 cm^2 e che ogni cm^2 contiene al massimo 165 capelli.

  E conclude: il massimo numero che può avere una persona è 775 * 165 = 123.875 <150.000).

Sei in una stanza buia e devi prendere dei guanti e dei calzini pescando a caso in due cassetti.

- In un cassetto ci sono 10 paia di calzini marroni e 10 paia blu. Quanti calzini devi prendere per essere sicuro di avere un paio di calzini dello stesso colore?
- In un cassetto ci sono 10 paia di guanti marroni e 10 blu. Quanti guanti devi prendere per essere sicuro di avere un paio di guanti dello stesso colore?

Perelman, FMP, c1935?

Soluzione:

Nel primo caso è sufficiente pescare 3 calzini.

Nel secondo caso occorre tener conto che i guanti destri sono diversi da quelli sinistri.

Le possibilità colore-mano sono:

MD-MS-BD-BS

Io devo essere sicuro di avere un guanto destro e uno sinistro dello stesso colore. Nella peggiore delle ipotesi potrei pescare:10 MD + 10BD (oppure S).Ma al 21-esimo guanto sono sicuro di averne preso almeno un paio dello stesso colore.

- Tre numeri sono scelti a caso. La loro somma e' 19. Mostrare che almeno un numero è maggiore o uguale a 7.

Soluzione:

Poiché 19 > 6*3 allora almeno un numero deve essere maggiore di 6.

- La differenza di due numeri è un multiplo di 11

Dati dodici numeri interi diversi, provare che almeno due di essi possono essere scelti in modo che la loro differenza sia divisibile per 11.

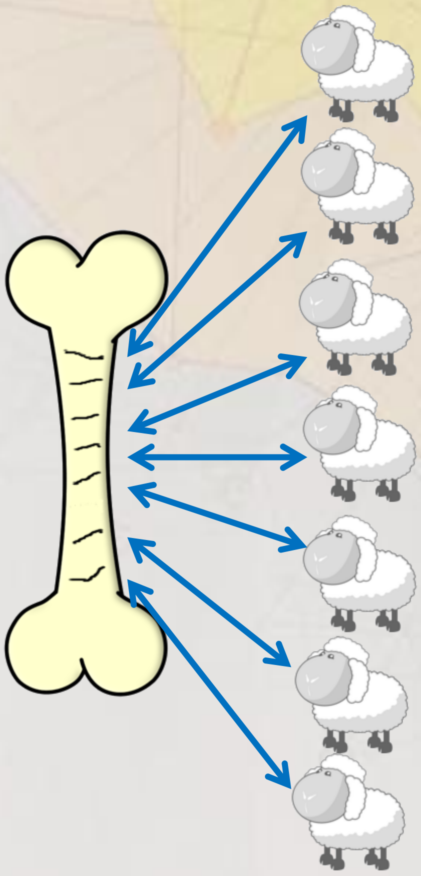
Soluzione:

I resti della divisione per 11 sono i numeri da 0 a 10 , quindi almeno due dei dodici interi divisi per 11 hanno lo stesso resto e quindi la loro differenza è un multiplo di 11.

INTERMEZZO: Si può contare senza numeri?

Nel Neolitico, probabilmente, non esistevano termini per i numeri oltre al tre.

Come potevano i primi pastori contare greggi di diverse decine di animali?



Corrispondenza biunivoca

Associazione uno-a-uno tra elementi di un insieme e elementi di un altro

Principio di equipotenza

Due insiemi hanno la stessa quantità di elementi se possono essere messi in corrispondenza biunivoca

Legge della Piccionaia

Se n elementi vanno distribuiti su m posti, e $m<n$, allora ad almeno un posto corrispondono più elementi.

10 piccioni in 9 caselle

Quando è impossibile contare, si può sempre confrontare

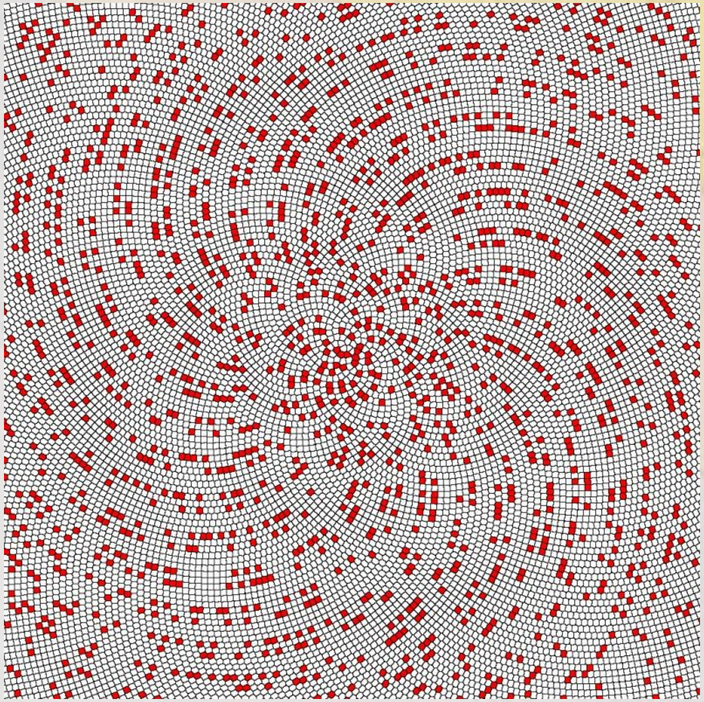
Dal finito all’infinito e oltre …

Il dizionario ci propone le seguenti definizioni:

- agg. Che non ha o non può avere termine
- agg. Molto numeroso o enorme
- sost. Luogo indefinito per lontananza e vaghezza
- sost. In una macchina fotografica, l’ultima gradazione di un obiettivo per mettere a fuoco ciò che distante
- sost. Valore maggiore di qualunque quantità assegnabile
- sost. Segno (∞) con il quale si esprime tale valore
- avv. Eccessivamente, moltissimo

Che non ha o non può avere termine

in questa definizione non si afferma che non abbia, ma che non possa avere fine; si tratta di una differenza sottile, se si afferma che l’infinito non ha fine facciamo due affermazioni, una implicita, che dice che l’infinito esiste e l’altra esplicita, che non ha fine. Se diciamo che non può avere fine affermiamo che nel caso esista , non può finire. Questa differenza include un concetto quello di infinito potenziale e attuale.



Questioni etimologiche e difficoltà del concetto di infinito

Nel vocabolario la parola infinito non è descrittiva è definita per negazione, infatti è composta dal prefisso *in* e dal sostantivo *finito*.

E' una parola che non dà informazioni su ciò che rappresenta, ma lo isola mediante opposizione.

Nella filosofia greca il termine usato è *apeiron usato per la prima volta da* **Anassimandro**,e rappresenta l'*archè* cioè l'origine di tutte le cose.
Anche in questo caso un termine dotato del prefisso privativo *a* e del sostantivo *peirar* con significato di limite.

G. De Chirico Nostalgia dell'infinito

« Inizio ed elemento primordiale delle cose è l'infinito.
Da dove infatti gli esseri hanno origine, ivi hanno anche la distruzione secondo necessità: poiché essi pagano l'uno all'altro la pena e l'espiazione dell'ingiustizia secondo l'ordine del tempo. »

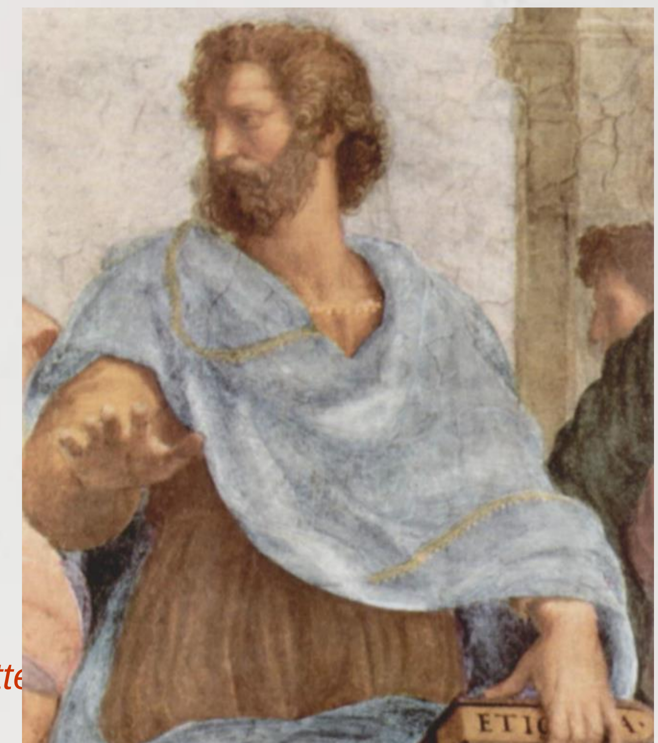
0,1,2,3,……= ?

- L’insieme N: diciamo che l’insieme dei numeri naturali è infinito. Infatti dato un qualunque n possiamo determinare un numero, n+1, maggiore di n.
- Ma una cosa è la possibilità di farlo e un’altra che sia fatta.
- Si tratta di una differenza sottile. Avere la possibilità di farlo definisce l’infinito potenziale, averlo fatto l’infinito attuale.

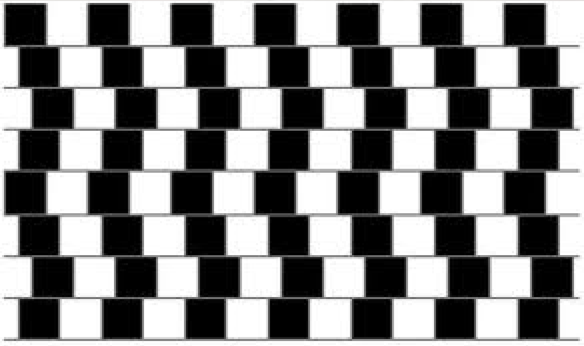
L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla.

Dante Paradiso, XXVIII, 88-93

- Nessuno è in grado di produrre l’intera successione dei numeri naturali, nessuno ha mai visto due rette parallele,al massimo due segmenti paralleli. Questo significa che non esistono?
- L’ infinito è una delle idee che più ha interessato, affascinato, ma anche spaventato l’uomo nel corso della storia è il concetto di infinito
  Questa entità è molto difficile da immaginare nel suo complesso, tanto che **Aristotele** manifestava la tacita proibizione che nella scuola filosofica si trattasse l’infinito attuale: “ *non è possibile che l’infinito esista come essere in atto o come una sostanza o un principio. È chiaro che la negazione assoluta dell’infinito è un’ipotesi che conduce a conseguenze impossibili ….. esso esiste potenzialmente … è per addizione o divisione*”.



Euclide tratta la questione con cautela e quando si riferisce a rette parla di “segmenti la cui lunghezza può essere aumentata a piacimento” alludendo chiaramente all’infinito potenziale.



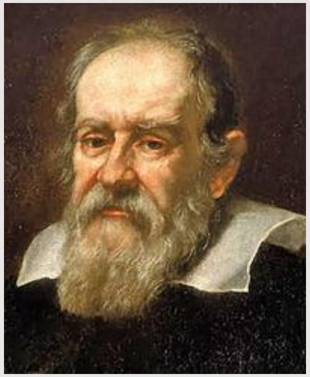
- Nel canto XV del *Purgatorio al verso 67 si legge “Quello infinito e ineffabil bene…”: il* riferimento di Dante è a Dio, bene infinito e indicibile che è nei cieli e si concede alle anime che ardono d’amore così come un raggio di sole verso un corpo che è capace di rifletterlo
- La seconda occorrenza del termine infinito si trova nel canto XIX del *Paradiso: “non poté suo valor sì fare impresso/in tutto l’universo, che ’l suo vero/non rimanesse in infinito eccesso” (vv 43 – 45)*

"E mi ricorda ch'io fui più ardito / per questo a sostener, tanto ch'i' giunsi / l'aspetto mio col valore infinito" (vv 79 – 81)

Sono di più i numeri naturali o i numeri pari?

L'insieme dei numeri naturali è un insieme infinito, totalmente ordinato, discreto; anche l'insieme dei numeri pari è un insieme infinito, totalmente ordinato, discreto, ed è un sottoinsieme proprio dei naturali. I naturali sono di più dei pari?

A	0	1	2	3	4	…	n	…	→ **Numeri naturali**
B	0	2	4	6	8	…	2n	…	→ **Numeri pari**



Due insiemi hanno la stessa numerosità se fra essi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca

Ci sono tanti numeri pari quanti numeri naturali

Le stranezze del numerabile

Un moderno albergo caratterizzato dal fatto che possiede infinite stanze

1,2,3,…,n,n+1,….

Una sera si presenta un cliente che, entrando, guarda sconsolato, il cartello che campeggia alla reception **COMPLETO**, timidamente si avvicina e chiede, N*on è che per caso avete una stanza libera?* Il portiere sorridendo risponde: *Certamente!*

Le stranezze del numerabile

Primo avventore

1	2	3	4	…	n	n+1	…
X	1	2	3	4	…	n	…

Secondo avventore

1	2	3	4	…	…	n	n+1	n+2
X	X	1	2	3	4	…	…	n

Infiniti avventori

1	2	3	4	…	…	…	…	…	n	n+1	…	…
X	1	X	2	X	3	X	4	X	…	n	X	n+1

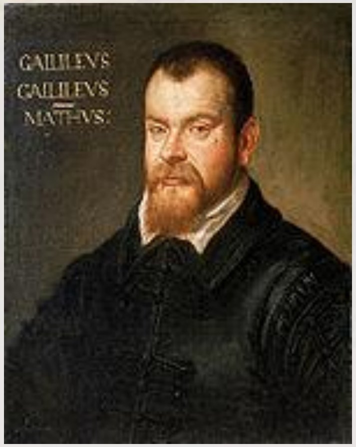
“ Per me la solitudine è come per altri la benedizione della chiesa. È la luce della grazia. Non chiudo mai la porta alle mie spalle senza la coscienza di compiere un gesto misericordioso nei miei confronti. Cantor illustrava ai suoi allievi il concetto di infinito raccontando che c'era una volta un uomo che possedeva un albergo con un numero di stanze infinito, e l'albergo era al completo. Poi arrivò un altro ospite. L'albergatore spostò allora l'ospite della stanza numero uno nella numero due, quello della numero due nella tre, quello della tre nella quattro, e via di seguito. Così la stanza numero uno rimase libera per il nuovo ospite. Ciò che mi piace di questa storia è che tutti coloro che vi sono coinvolti, gli ospiti e l'albergatore, considerano normalissimo compiere un numero infinito di operazioni perché ***un ospite possa trovare pace in una stanza tutta sua. È un grande omaggio alla solitudine ”.***

In mezzo all'Oceano Pacifico è stato costruito l'Infinity Hotel

Ha senso, allora, confrontare la numerosità di insiemi infiniti?

"Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo intorno a gl'infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate, il che penso che sia inconveniente..."

Galileo Galilei



"L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così proficuamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di chiarificazione che quello di infinito".

David Hilbert

L'insieme degli interi Z è numerabile?

- È possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme N e l'insieme Z in questo modo:

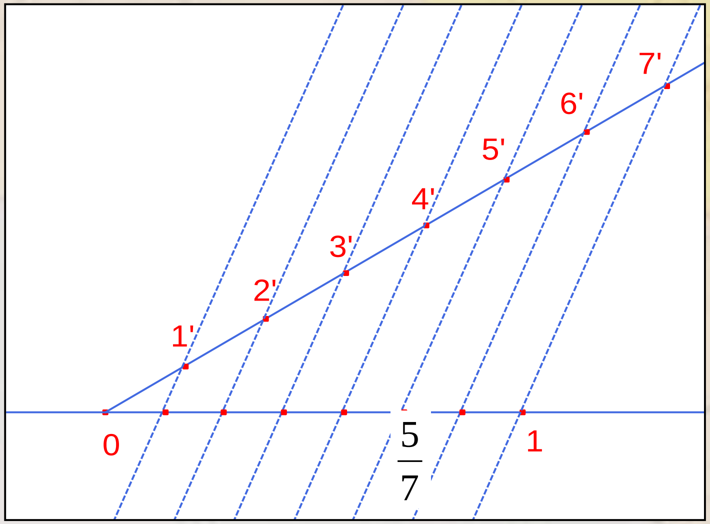
  se n è pari il suo corrispondente è n/2

  se n è dispari il suo corrispondente è -(n+1)/2

N	0	1	2	3	4	5	6	…
Z	0	-1	1	-2	2	-3	3	…

N e Z sono equipotenti, anche Z ha la cardinalità del numerabile

I numeri razionali e Talete



L'insieme dei razionali è **denso**, cioè dati due numeri razionali **a** e **b** (supponiamo **a** < **b**), **esiste sempre** un numero razionale **c** tale che

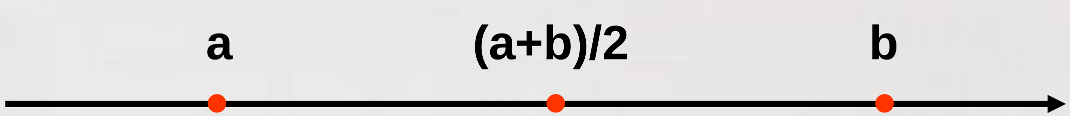
$$\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$$

Dimostrazione

Preso **c=(a+b)/2** poiché **a** < **b** si ha che

- **a+b > 2a** quindi **c=(a+b)/2 > a**
- **a+b < 2b** quindi **c=(a+b)/2 < b**

da cui **a** < **c** < **b**.



Confronto di infiniti

Tal … SITIVE

1
2
3
4
5 …3…
…

- **L'insieme Q^+ ha la cardinalità del numerabile.**
- **Q^+, pur essendo denso, ha la stessa cardinalità di N che è discreto.**

Den \ Num	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	4	9	10	17	18	27
2	2		8		16		26	
3	5	7		15	19		29	$\frac{8}{3}$
4	6		14		25		$\frac{7}{4}$	
5	11	13	20	24		$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$
6	12				$\frac{5}{6}$		$\frac{7}{6}$	
7	21	23	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$		$\frac{8}{7}$
8	22		$\frac{3}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{7}{8}$	
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$

E dopo? Facciamo parlare Smilla

«Sai cosa c'è alla base della matematica?» dico. «Alla base della matematica ci sono i numeri. Se qualcuno mi chiedesse che cosa mi rende davvero felice, io risponderei: i numeri. La neve, il ghiaccio e i numeri. E sai perché?»

«Perché il sistema numerico è come la vita umana. Per cominciare ci sono i numeri naturali. Sono quelli interi e positivi. I numeri del bambino. Ma la coscienza umana si espande. Il bambino scopre il desiderio, e sai qual è l'espressione matematica del desiderio?»

«Sono i numeri negativi. Quelli con cui si dà forma all'impressione che manchi qualcosa. Ma la coscienza si espande ancora, e cresce, e il bambino scopre gli spazi intermedi. Fra le pietre, fra le parti di muschio sulle pietre, fra le persone. E fra i numeri. Sai questo a cosa porta? Alle frazioni. I numeri interi più le frazioni danno i numeri razionali. Ma la coscienza non si ferma lì. Vuole superare la ragione. Aggiunge un'operazione assurda come la radice quadrata. E ottiene i numeri irrazionali.»

Su e giù nella storia

All'inizio abbiamo parlato di Aristotele e della difficoltà da parte della scuola filosofica greca di trattare dell'infinito, facciamo un passo indietro e parliamo della scuola Pitagorica.

Aristotele contempla
Il busto di Omero

Rembrandt 1653

Un po' di storia …… parliamo della scuola pitagorica

Pitagora nacque nell'isola di Samo intorno al 580 a.C. e la sua figura è circondata da un alone di leggenda che ce lo mostra nella veste di "santone", oltre che come matematico e filosofo.

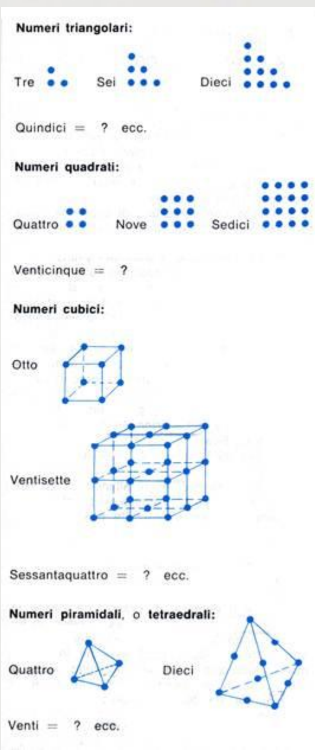
Fu attivo principalmente nell'Italia Meridionale (Crotone) dove fondò una confraternita di tipo quasi monacale che gli sopravvisse per circa due secoli. Di lui si dissero le cose più disparate (che aveva compiuto miracoli, che era figlio di Apollo) specialmente ad opera del movimento neo-pitagorico fiorito nel periodo alessandrino, anche se alcune leggende sono già presenti in Aristotele.

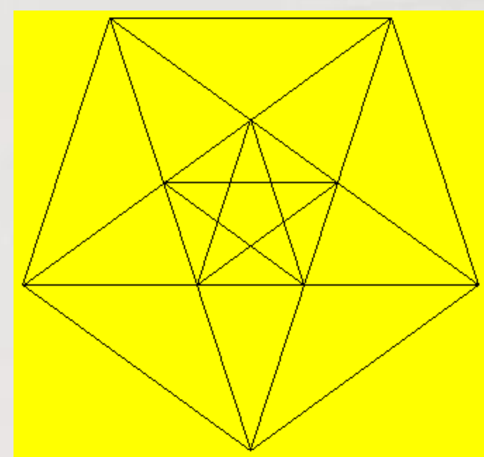
L'idea-forza dei Pitagorici si può riportare a questa:

"il numero è il principio di tutte le cose".

La scuola pitagorica

- Seguiamo il percorso che portò, molti secoli fa, qualche matematico della scuola pitagorica a capire che i numeri razionali non bastano per rappresentare tutte le misure di lunghezza.
- I pitagorici pensavano che un segmento fosse costituito da un numero finito di punti (atomi), magari molto grande, come se fosse una successione di granellini di sabbia.
- Così il rapporto tra due segmenti sarebbe stato sempre esprimibile da un numero razionale.

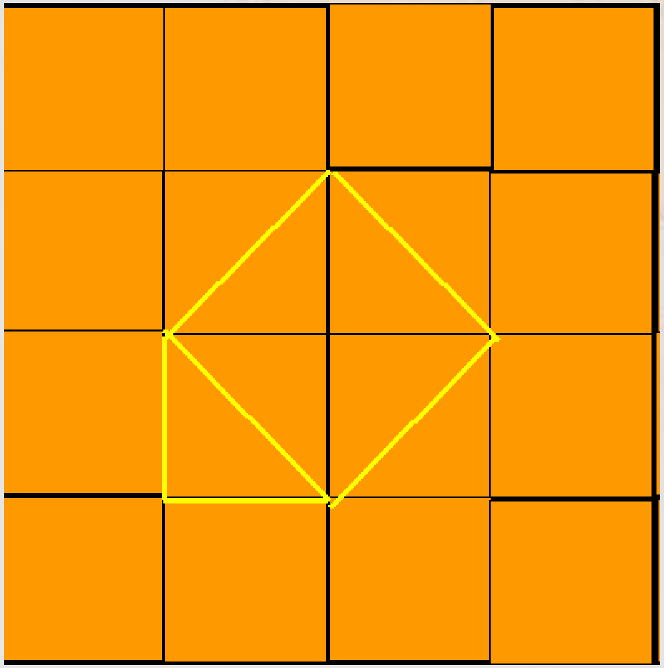




- Questa teoria andò in crisi quando i greci scoprirono l'esistenza di segmenti incommensurabili.
- La scoperta avvenne risolvendo un problema molto semplice: il calcolo del rapporto tra la lunghezza della diagonale di un quadrato e quella del suo lato.
- Consideriamo un quadrato di lato l e sia d la sua diagonale, applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2 \cdot l^2} = l\sqrt{2}$$

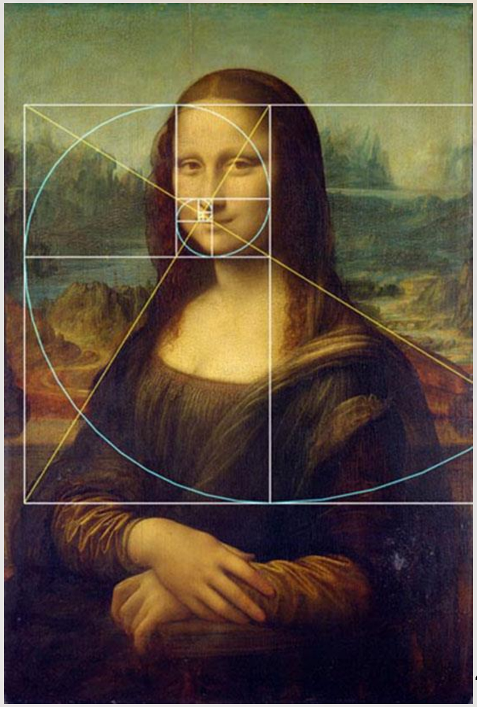
Euclide e Pitagora, ovvero la Geometria e l'Aritmetica, formella del Campanile di Giotto, Luca della Robbia, 1437-1439, Firenze



- La scoperta che il rapporto fra la lunghezza della diagonale di un quadrato ed il suo lato non è esprimibile tramite il rapporto di due numeri interi è uno di quei passi che sono stati fondamentali nella storia della scienza (anche se adesso è materia da scuola media inferiore). La scoperta dell'incommensurabilità fra la diagonale e il lato di un quadrato metteva in crisi i fondamenti stessi della dottrina pitagorica:

i numeri non bastavano a descrivere la realtà !

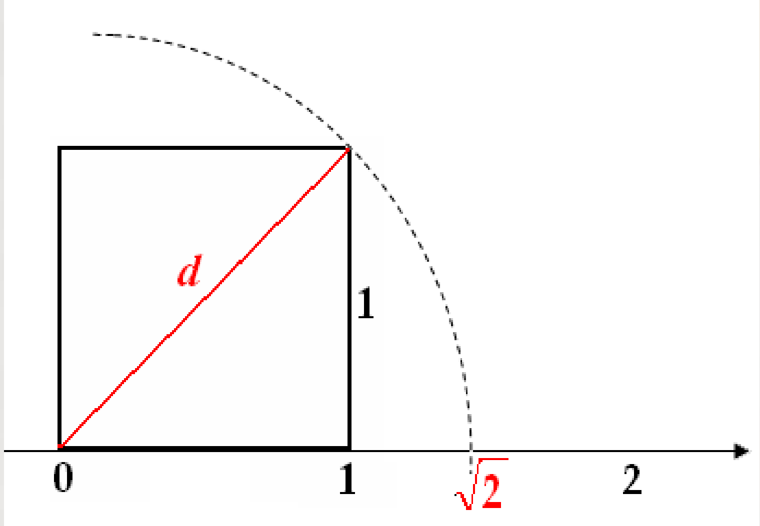
René Magritte,
Le passeggiate di Euclide, 1955



- L’insieme dei numeri razionali si può rappresentare sulla retta. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri razionali e i punti della retta?
- La radice di due si può rappresentare sulla retta?

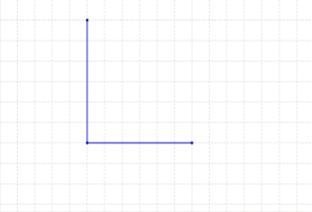
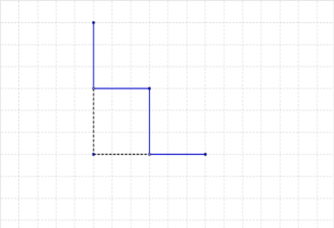
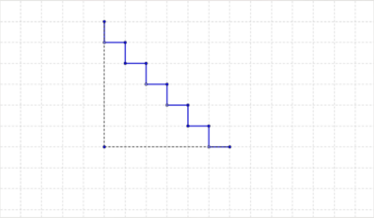
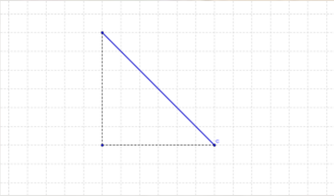
Pitagorici celebrano il sorgere del sole di Fëdor Bronnikov, 1869

La radice di due si può rappresentare sulla retta?



$$1.41421356\,2 \le \sqrt{2} \le 1.41421356\,3 \quad \Rightarrow \sqrt{2} \approx 1{,}4142$$

In un quadrato di lato 1 la diagonale è… . Considerate i due lati adiacenti di lato unitario: la somma delle loro lunghezze è ovviamente 2. Dividete ognuno dei due lati a metà e flettete di 90° i due segmenti che contengono il vertice: la somma della linea a scala così ottenuta è, ovviamente, ancora 2. Ripetete l'operazione di spezzettatura e di flessione: si ottiene una scala il cui numero di gradini è il doppio dei precedenti.

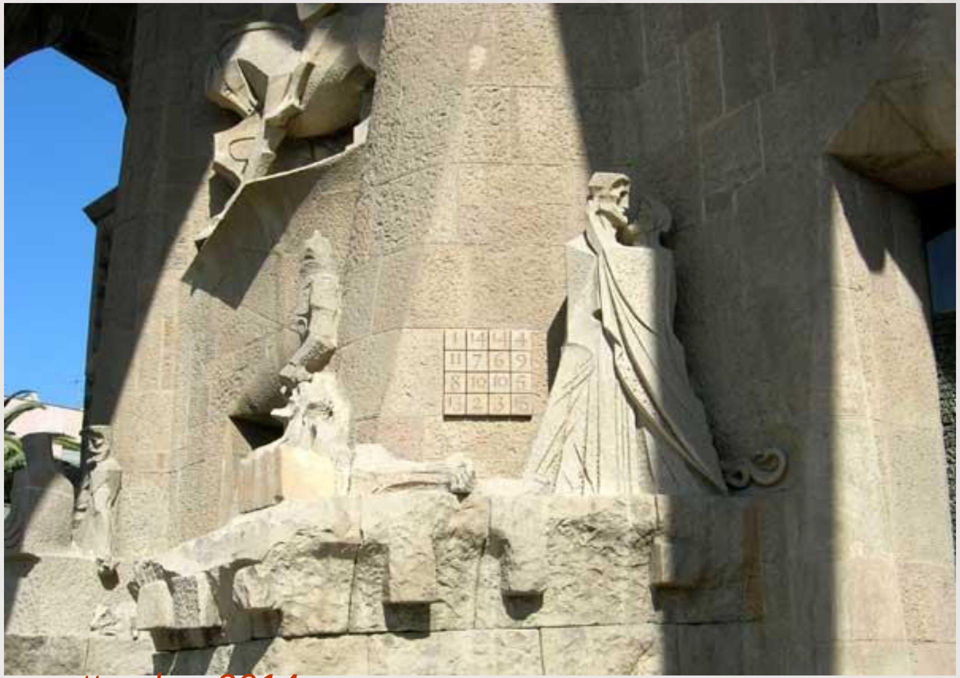





ASSURDO $2=\sqrt{2}$!

Matematica o religione?

- Abbiamo visto che i naturali, gli interi, i razionali sono tutti insiemi equipotenti e questo è paradossale.
- Galileo *«Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti esser tutti i numeri [naturali], infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri [naturali], né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di uguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate»*
- La dimostrazione di Cantor sull’equipotenza tra N e Q sembra confermare che gli infiniti sono tutti “uguali”.
- Sarà vero?

- La nascita degli incommensurabili poneva il problema dell'infinito in atto e non più solo in potenza e proponeva il problema della continuità.
- I pitagorici avevano ipotizzato che lo spazio e il tempo si potessero pensare come consistenti di punti e istanti separati, da tale concezione derivarono una serie di paradossi sul movimento.
- Il problema di studiare il moto e le sue leggi fu posto fin dagli inizi del pensiero filosofico.



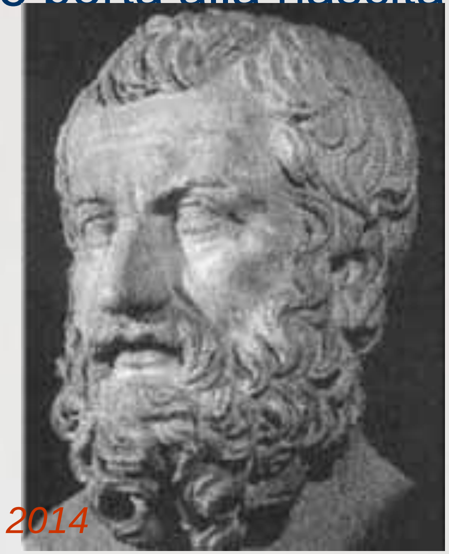
Famoso per i suoi paradossi sull'infinito è Zenone (490 a.C., Elea – 430 a.C., Elea).

Il paradosso di Achille e la tartaruga può essere formulato nei seguenti termini:

Achille, pie' veloce, e una tartaruga sono impegnati in una gara di corsa su una lunghezza di1 metro. Achille dà alla tartaruga mezzo metro di vantaggio. Riuscirà Achille a raggiungere la tartaruga e ad arrivare primo al traguardo?

L'esperienza ci dice che sicuramente non solo Achille, ma un qualunque uomo riuscirà a raggiungere e superare la tartaruga.

- Ebbene, Zenone “dimostra” che Achille non raggiungerà mai la tartaruga.
- Il paradosso è interessante perché mostra come l’uso di un modello matematico inadatto a risolvere un determinato problema porta a soluzioni che contrastano con la realtà dei fatti.
- Zenone mostrava la difficoltà di analizzare fenomeni che variano nello spazio e nel tempo.
- Tutto il dibattito nato intorno agli incommensurabili fu concluso da Aristotele con la famosa frase: ”infinitum in actu non datur”. Solo secoli dopo, in particolare con Galilei prima, con Newton e Leibniz dopo e infine Cantor , solo per citare alcuni nomi, il dibattito sul moto e sull’infinito viene ripreso e porta alla nascita della matematica moderna.



Il paradosso di Zenone

In molti problemi matematici accade che il calcolo si possa spingere ad una precisione elevata quanto si vuole: si può, cioè, ottenere un intervallo di approssimazione più piccolo di una quantità piccolissima stabilita (ad es. un millesimo, uno decimillesimo ecc.).

Consideriamo il classico problema di Achille e la tartaruga introdotto dal filosofo greco Zenone di Elea nel V secolo a. C.

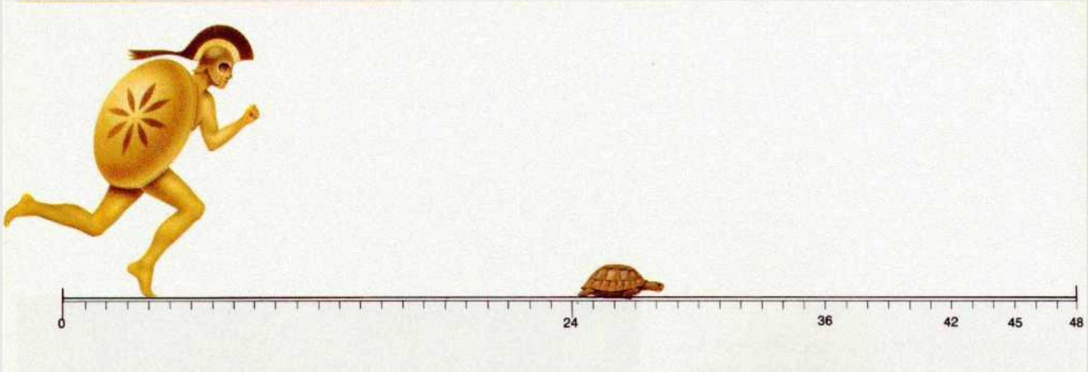
Achille insegue la tartaruga che inizialmente ha un vantaggio di 1 metro; la velocità di Achille è di 10m/s, quella della tartaruga 1m/s. Quando Achille raggiungerà la tartaruga?

Achille e la tartaruga

- Se indichiamo con t i secondi necessari, lo spazio percorso da Achille è 10t e deve risultare uguale alla somma del vantaggio iniziale della tartaruga con lo spazio che essa percorre.
- Se formalizziamo otteniamo:

  10t=1+t

  9t=1 quindi ***t=1/9*** (in secondi)



La versione di Zenone

- In 1/10 di secondo Achille raggiunge il punto in cui si trovava inizialmente la tartaruga, ma intanto la tartaruga si è mossa ed ha percorso uno spazio di 1/10 di metro.
- Per raggiungere la nuova posizione Achille dovrà impiegare un altro tempo pari a 0,1x 0,1= 0,01, quindi in totale avrà impiegato un tempo:

$$t_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 0{,}11$$

- Ma Achille non ha ancora raggiunto la tartaruga perché nel tempuscolo di 1/10 di secondo essa avrà percorso 1/100 di metro. Achille arriverà a questa nuova posizione, ma impiegherà 1/1000 di secondo, quindi un tempo complessivo

$$t_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = 0{,}111$$

- E così via. Zenone credeva di poter dimostrare che Achille non avrebbe mai raggiunto la tartaruga, dal momento che, per raggiungerla, egli avrebbe dovuto compiere infinite operazioni.

Invece…

- Noi sappiamo, invece, che Achille raggiunge la tartaruga e che gli infiniti valori della successione:

  0,1 0,11 0,111 0,1111 0,11111………

  sono semplicemente valori approssimati per difetto di 1/9.

  Il tempo 1/9 che occorre ad Achille per raggiungere la tartaruga può essere idealmente diviso in infiniti tempuscoli, ma è pur sempre un tempo finito.

  Del resto nel tempo 0,2 Achille ha percorso 2 metri è ha abbondantemente superato la tartaruga, che ha percorso solo 0,2m ed è quindi arrivata a 1,2m dal punto iniziale di Achille.

  Dunque 0,2 è un valore approssimato per eccesso de tempo cercato.

  Tutti i seguenti valori sono raddoppiati per eccesso:

  0,2 0,12 0,112 0,1112 0,11112…..

  Queste due successioni sono i valori approssimati per eccesso e per difetto di 1/9 e lo definiscono.

- Riflettendo su tali paradossi si nota bene come, nel risolvere un determinato problema, l’uso di un modello inadatto può portare a conclusioni totalmente errate e, a volte, addirittura in contrasto con la realtà.
- “L’errore” di Zenone è quello di pensare al movimento come una successione di scatti successivi; lavora nel discreto e non nel continuo, cioè pensa al movimento come somma di infinite parti che devono portare “necessariamente” all’infinito.
- Solo da pochi secoli si è potuto dimostrare che la somma di infiniti addendi **può anch**e portare ad un numero finito.

*Jorge Luis Borges, **Discussioni***

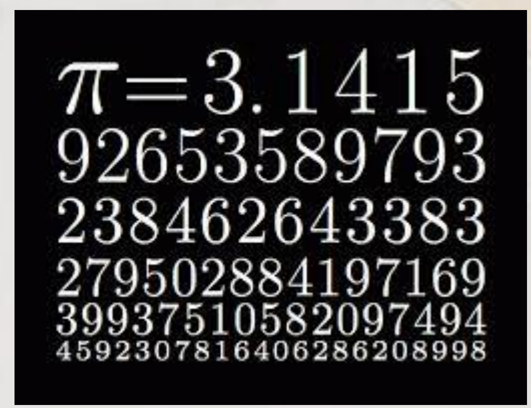
- *La perpetua corsa di Achille e della Tartaruga*

  L'infinito è "parola di spavento che abbiamo generato temerariamente e che una volta ammessa in un pensiero esplode e lo uccide."

Georg Cantor (1845-1918)

Giovane matematico brillante, segue l'ortodossia della ricerca studiando problemi di matematica ben visti dalla nobiltà baronale accademica. Nel 1872 (Cantor ha già 27 anni), studia un insieme infinito di punti giacenti su un intervallo ma non coincidente con l'intervallo stesso; così analizza come sono disposti i punti di una retta; le reciproche posizioni tra segmenti distinti; segmenti e rette… tutto ciò in modo attuale, senza più alcun imbarazzo di tipo filosofico.

Inizia così l'avventura di Cantor: dimentica la seriosa matematica accademica ed indaga l'infinito in sé.



(Cantor a Dedekind: ***"Lo vedo ma non lo credo"***).

l'insieme R è numerabile?

Gli elementi di un insieme numerabile possono essere elencati in una lista infinita stabilendo un certo ordine. Per semplicità consideriamo i numeri reali 0<x<1, questi numeri si possono scrivere in forma decimale come 0,….. Supponendo per assurdo che i numeri reali compresi tra 0 e 1 siano numerabili possiamo rappresentare ciascun numero della successione in forma decimale e visualizzare la successione di numeri reali come una matrice infinita che avrà più o meno quest'aspetto:

$r_1 = 0,\ \underline{5}\ 1\ 0\ 5\ 1\ 1\ 0\ \ldots$

$r_2 = 0,\ 4\ \underline{1}\ 3\ 2\ 0\ 4\ 3\ \ldots$

$r_3 = 0,\ 8\ 2\ \underline{4}\ 5\ 0\ 2\ 6\ \ldots$

$r_4 = 0,\ 2\ 3\ 3\ \underline{0}\ 1\ 2\ 6\ \ldots$

$r_5 = 0,\ 4\ 1\ 0\ 7\ \underline{2}\ 4\ 6\ \ldots$

$r_6 = 0,\ 9\ 9\ 3\ 7\ 8\ \underline{3}\ 8\ \ldots$

$r_7 = 0,\ 0\ 1\ 0\ 5\ 1\ 3\ \underline{5}\ \ldots$

...

Questa successione di cifre sulla diagonale, vista come un'espansione decimale, definisce il numero reale 0,5140235...

Ora consideriamo un nuovo numero reale x che abbia invece *tutte le cifre differenti dalla sequenza sulla diagonale*, un modo per definire un numero siffatto è il seguente:

x è il numero reale compreso tra 0 e 1 tale che

se la k-esima cifra decimale di r_k è 5 allora la k-esima cifra di x è 4 se la k-esima cifra di r_k non è 5 allora la k-esima cifra decimale di x è 5

Nell'esempio otteniamo:

$x = 0\ ,\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 4\ ...$

Che non può appartenere alla successione $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, \ldots\ldots.$

$$\boldsymbol{r_1 = 0,\ \underline{5}\ 1\ 0\ 5\ 1\ 1\ 0\ \ldots}$$
$$\boldsymbol{r_2 = 0,\ 4\ \underline{1}\ 3\ 2\ 0\ 4\ 3\ \ldots}$$
$$\boldsymbol{r_3 = 0,\ 8\ 2\ \underline{4}\ 5\ 0\ 2\ 6\ \ldots}$$
$$\boldsymbol{r_4 = 0,\ 2\ 3\ 3\ \underline{0}\ 1\ 2\ 6\ \ldots}$$
$$\boldsymbol{r_5 = 0,\ 4\ 1\ 0\ 7\ \underline{2}\ 4\ 6\ \ldots}$$
$$\boldsymbol{r_6 = 0,\ 9\ 9\ 3\ 7\ 8\ \underline{3}\ 8\ \ldots}$$
$$\boldsymbol{r_7 = 0,\ 0\ 1\ 0\ 5\ 1\ 3\ \underline{5}\ \ldots}$$

…

Ne segue che [0,1] non è numerabile.

L'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1 ha una potenza superiore al numerabile:

la potenza del continuo

Attenzione: in questa dimostrazione c'è un piccolo errore.

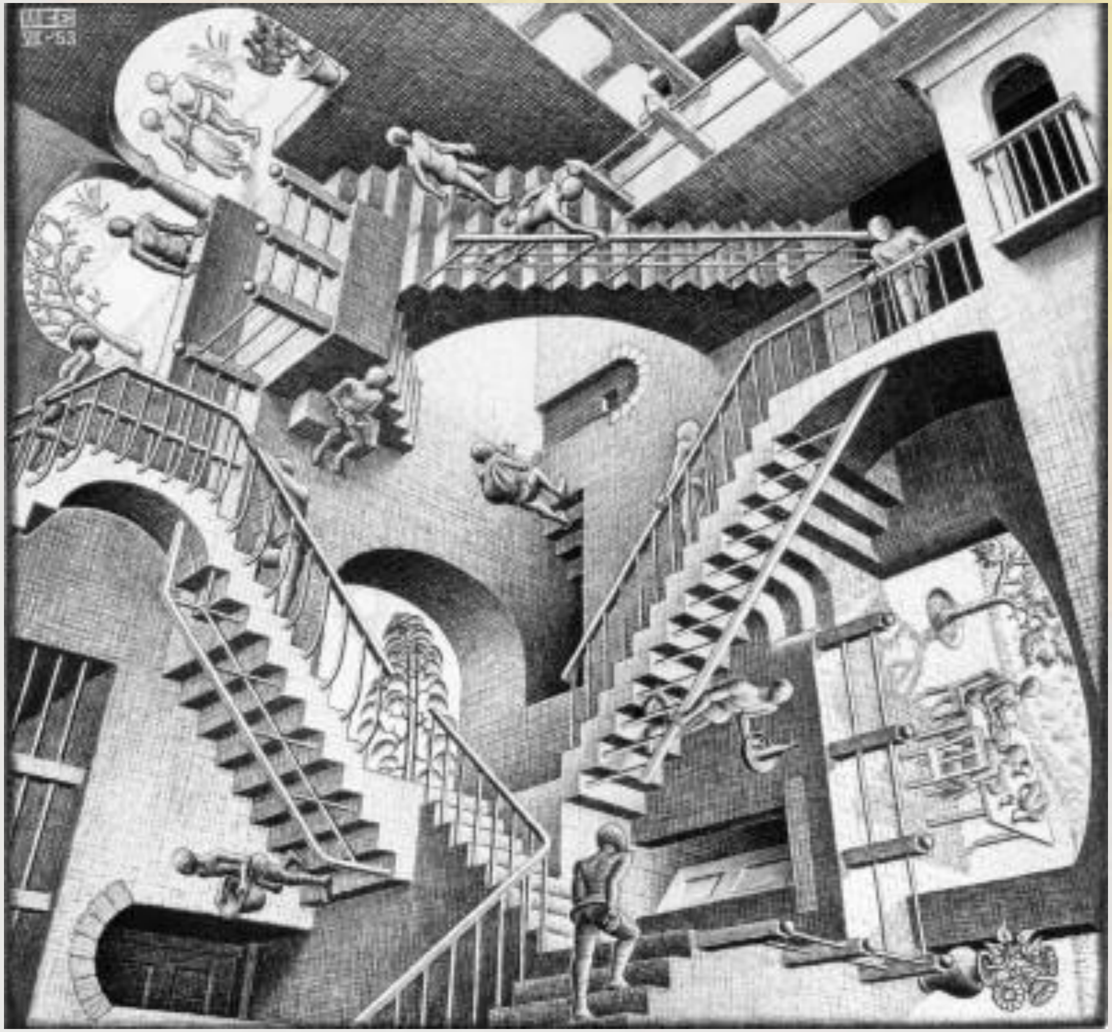
$$0,\overline{9} = 1?$$

- «È una sorta di follia. Perché i numeri irrazionali sono infiniti. Non possono essere scritti. Spingono la coscienza nell'infinito. E addizionando i numeri irrazionali ai numeri razionali si ottengono i numeri reali.»
- «Non finisce. Non finisce mai. Perché ora, su due piedi, espandiamo i numeri reali con quelli immaginari, radici quadrate dei numeri negativi. Sono numeri che non possiamo figurarci, numeri che la coscienza normale non può comprendere. E quando aggiungiamo i numeri immaginari ai numeri reali abbiamo i sistemi numerici complessi. Il primo sistema numerico all'interno del quale è possibile dare una spiegazione soddisfacente della formazione dei cristalli di ghiaccio. È come un grande paesaggio aperto. Gli orizzonti. Ci si avvicina a essi e loro continuano a spostarsi. È la Groenlandia, ciò di cui non posso fare a meno! È per questo che non voglio essere rinchiusa».

«La paura dell’infinito è una forma di miopia che distrugge la possibilità di vedere l’infinito attuale, anche se questo nella sua forma più alta ci ha creati e ci mantiene, e nelle sue forme secondarie di transfinito è presente intorno a noi e popola persino le nostre menti».

«È così diventata inevitabile l’esigenza di costruire il concetto di numero infinito attuale attraverso un’astrazione naturale opportuna, allo stesso modo che il concetto di numero naturale risulta dagli insiemi finiti con processo di astrazione».

Quanto più il blu è profondo, tanto richiama l'uomo verso l'infinito ….

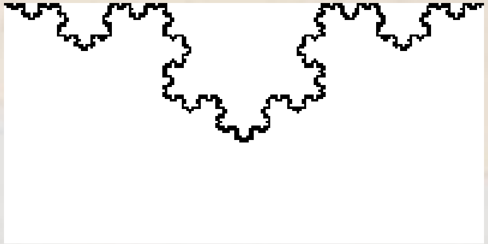


Bertrand Russell, *Misticismo e Logica, 1901*
“La matematica può essere definita come la materia nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ciò che stiamo dicendo è vero”.

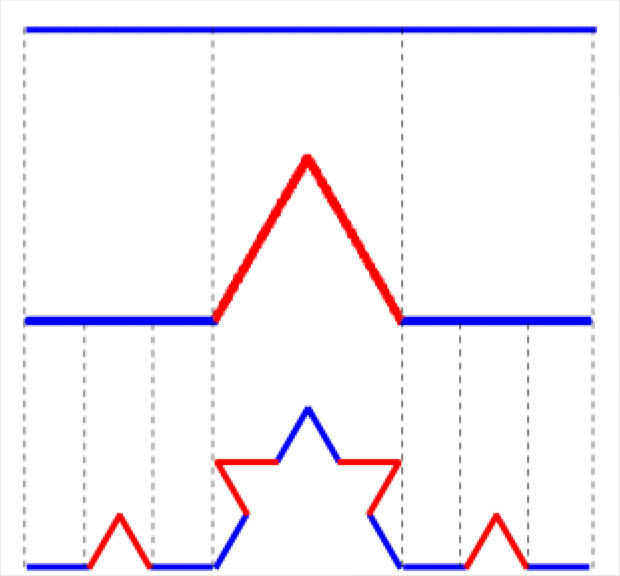
Oltre il continuo…

Una Scala per l'Infinito nel Museo Salvador Dalì in Florida. Progettato dall'architetto Yann Weymouth di HOK

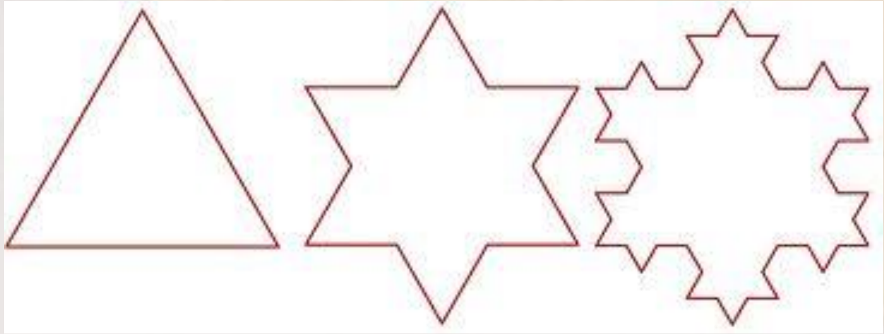
Oltre il continuo…



Dato un segmento di lunghezza unitaria, lo si divida in tre parti e si sostituisca quella centrale con due segmenti uguali a quello eliminato. Otteniamo quattro segmenti: su ognuno di essi si applichi lo stesso procedimento all’infinito.”



Il fiocco di neve: il perimetro



la prima figura è composta di 3 lati di lunghezza 1 e, dunque, ha perimetro $p_1 = 3 \cdot 1$

nella seconda figura, ad ogni lato della prima si sostituiscono 4 segmenti di lunghezza $\frac{1}{3}$, perciò si ottiene un perimetro dato da

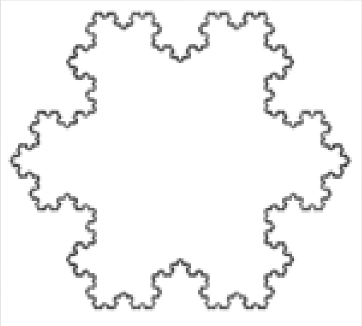
$$p_2 = 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3}$$

Procedendo nella costruzione, i perimetri costituiscono i termini della progressione geometrica

$$3,\quad 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right),\quad 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2,\quad 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3,\quad \ldots,\quad 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

,si conclude che il perimetro della figura diventa infinitamente lungo quando si ripete "all'infinito" la costruzione.

$$\lim_{n\to+\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$$



Calcoliamo l’area del fiocco di neve

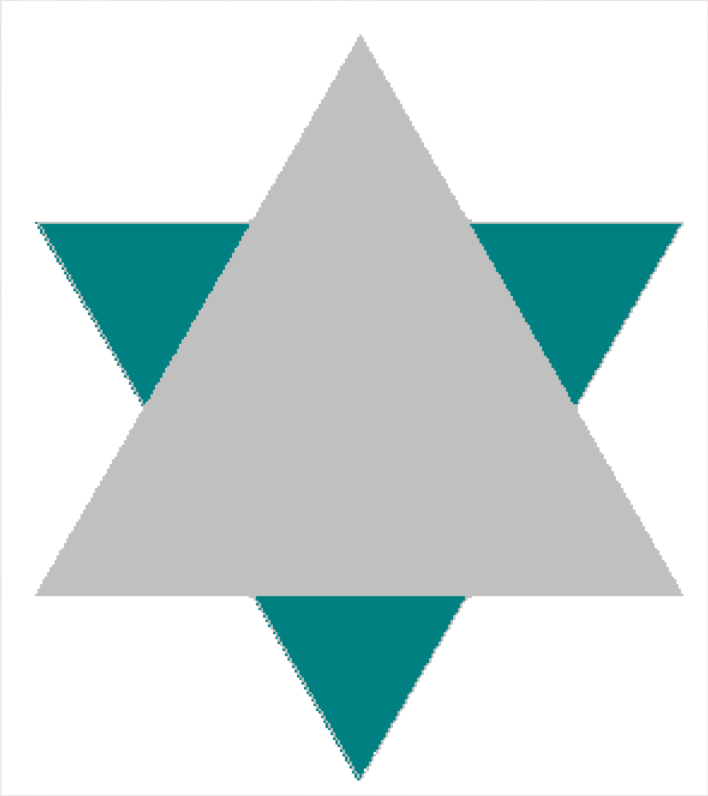
•In merito alle aree delle figure che via via si ottengono a partire dal triangolo equilatero iniziale, dovremo sommare le aree seguenti:

l’area del triangolo equilatero di lato 1 che è dato da

$$S_0 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60° = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

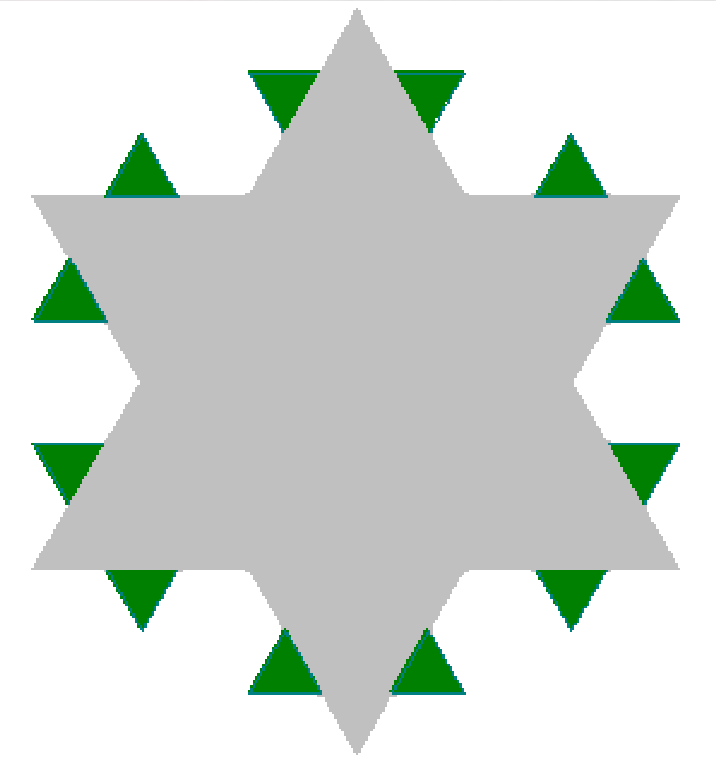
l’area di 3 triangoli equilateri di lato 1/3 che è dato da:

$$S_1 = 3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot sin\,60° = \frac{1}{12}\sqrt{3}$$



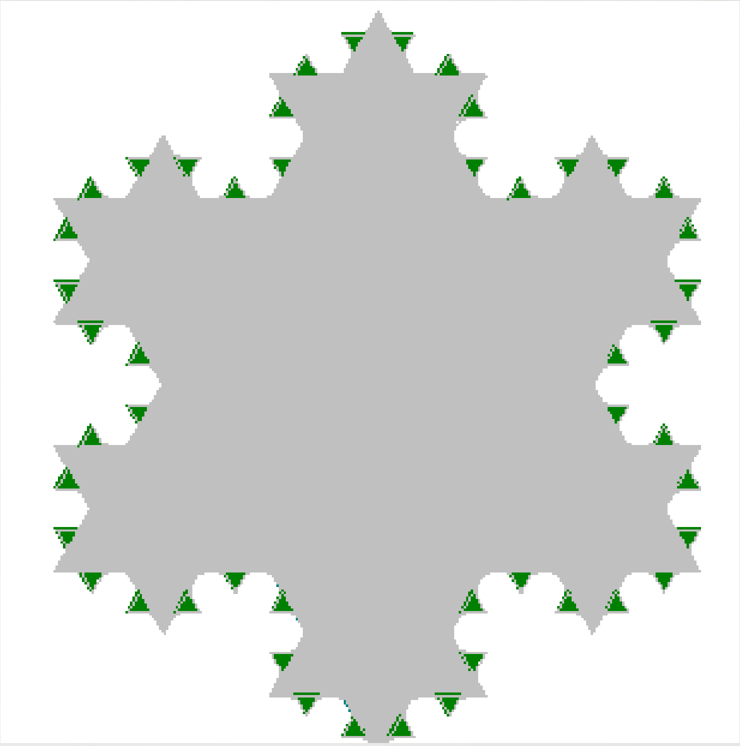
l’area di 12 triangoli equilateri di lato 1/3 che è data da:

$$S_2 = 12\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot \sin 60° = \frac{1}{27}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{4}{9}$$



l’area di 48 triangoli equilateri di lato $\frac{1}{27}$ è data da:

$$S_3 = 48\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{27}\cdot \sin 60° = \frac{4}{243}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$$



Continuando il procedimento si arriva a costruire una figura la cui

area S si ottiene aggiungendo all'area $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

del triangolo iniziale la somma dei termini di una progressione geometrica di

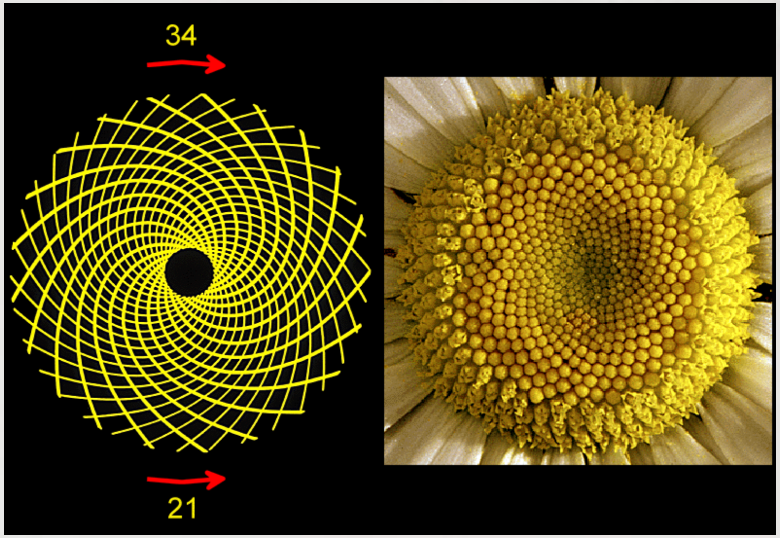
primo termine $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$ e ragione $q = \frac{4}{9}$

Essendo la ragione di tale progressione minore di 1, avremo che

$$S = S_0 + \lim_{n\to+\infty}\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) = S_0 + \frac{S_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{5}\sqrt{3}$$

Si trova così che l’area non diventa infinitamente grande, ma si avvicina sempre di più al valore $$S = \frac{2}{5}\sqrt{3} \approx 0{,}69$$

Un’area compresa in un perimetro infinito risulta un numero finito!



Così parla il dottor Kapperbrun al protagonista del romanzo L'incognita di Hermann Broch (Lerici, Milano 1962):
"La matematica è una specie di atto disperato dello spirito umano… in sé e per sé essa non ci occorre, certo, ma è una specie di isola dell'onestà, e per questo le voglio bene".

L'essenza della matematica risiede nella sua libertà.
Georg Cantor

"Il matematico, come il pittore e il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue sono fatte di idee. Il pittore crea forme con i segni ed il colore, il poeta con le parole …
Il matematico invece non ha altro materiale con cui lavorare se non le idee. Quindi le forme che crea hanno qualche probabilità di durare più a lungo, perché le idee si usurano meno delle parole …" G.H. Hardy