IL LINGUAGGIO

Partiamo da frasi di argomento vario (non matematiche)

① A colazione non mi piace bere il caffè in piedi.

Può voler dire:

a) A colazione mi piace bere il caffè seduta

b) Mi piace bere il caffè in piedi ma non a colazione

c) A colazione mi piace mangiare qualcosa in piedi ma non bere il caffè

...

② Ho due fratelli e due sorelle. I miei fratelli guadagnano di più delle mie sorelle.

Può significare:

a) La somma dei guadagni dei miei fratelli è superiore alla somma dei guadagni delle mie sorelle

b) Ognuno dei fratelli guadagna di più di ognuna delle sorelle

c) Almeno uno dei fratelli guadagna di più di entrambe le sorelle.

...

Il linguaggio della matematica è <u>PRECISO</u>
non può dare adito a fraintendimenti!
Una frase matematica deve essere interpretabile in modo univoco <u>da chiunque</u> !!

Alcune parole chiave

L'articolo indeterminativo UN, UNO

<u>ESEMPI</u>:

1. Un uomo guarda una stella

In matematica " UN, UNO, UNA " significano
"ALMENO UNO" non "UNO SOLO"

Dunque la frase precedente (in linguaggio matematico) significa
"almeno un uomo guarda almeno una stella"

"esiste almeno un uomo che guarda almeno una stella"

ESISTE: $\exists$
NON ESISTE: $\nexists$

Possiamo introdurre dei simboli per scrivere la stessa frase.

Denotiamo x un uomo
y una stella

e denotiamo $p(x,y)$ la proprietà

"l'uomo x guarda la stella y".

Allora la frase precedente "un uomo guarda una stella" diventa:

$\exists x, \ \exists y$ tali che $p(x,y)$

2 Un uomo guarda ogni stella

$\forall$ PER OGNI

La frase diventa:

$\exists x$ tale che $\forall y \quad p(x,y)$

"Esiste un uomo che soddisfa la proprietà che per ogni stella l'uomo guarda la stella"

tale che

tale che: t.c, :, /, ","

Altri esempi

(3) L'equazione $2x+1=0$ ha un'unica soluzione

(regola: Sia $x \in \mathbb{R}$ numeri reali

appartenente

allora l'equazione $2x+1=0$ ha un'unica soluzione)

Abbiamo introdotto l'unicità

$!$ unico

La frase precedente diventa:

$\exists ! \ x \in \mathbb{R}$ tale che $2x+1=0$

$$\left(2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2} \right)$$

equivalenti

④ L'equazione $x^2-1=0$ ha una soluzione reale.

Questa frase **È VERA**: infatti esiste almeno una soluzione reale, per esempio $x=1$

Sarebbe vera anche

⑤ L'equazione $x^2-1=0$ ha esattamente due soluzioni reali distinte

In linguaggio matematico:

④ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2-1=0$

tale che

⑤ $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ tali che

$$x_1^2-1=0$$
$$x_2^2-1=0$$

e $\forall x \neq x_1, x \neq x_2$ $x \in \mathbb{R}$

$$x^2-1 \neq 0$$

⑥ Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $a \in \mathbb{R}$.
L'equazione $x^2 = a$
ha al più una soluzione positiva

La frase è <u>vera</u>. Infatti
$a \in \mathbb{R}$ può essere
$a > 0$
$a = 0$
$a < 0$

Se $a > 0$ esistono due soluzioni
reali di $x^2 = a$ ($x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$)
$\sqrt{a} > 0$, $-\sqrt{a} < 0$)

Se $a = 0$ esiste una unica soluzione
$x = 0$ (non è positiva)

Se $a < 0$ non esiste nessuna soluzione

—— o ——

Torniamo alla frase "un uomo guarda una stella"

Quante frasi logicamente diverse si possono costruire con

x = uomo

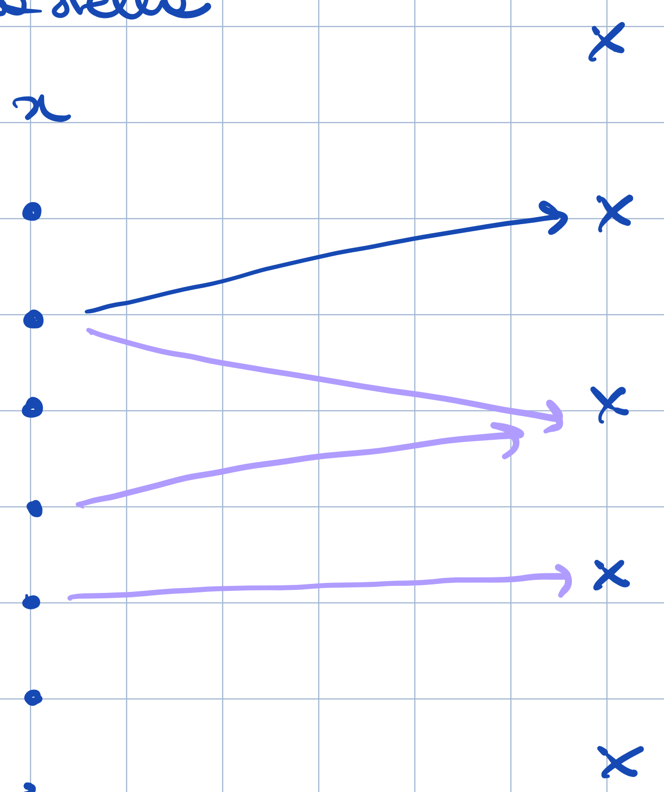
y = stella

$p(x,y)$ = l'uomo x guarda la stella y

$\underbrace{\exists \,,\, \forall}$ QUANTIFICATORI

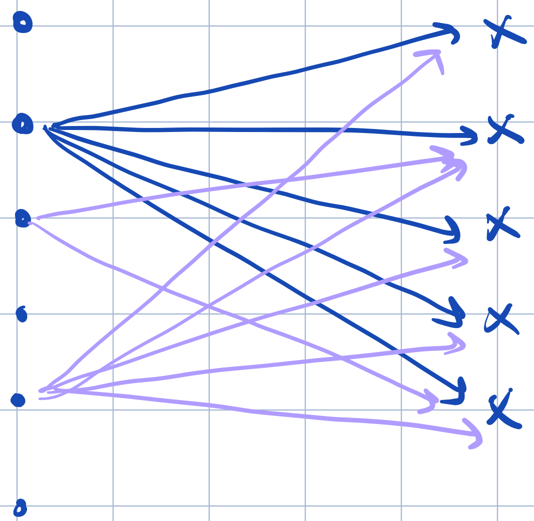
(1) $\exists x, \exists y : \quad p(x,y)$

Esiste almeno un uomo ed esiste almeno una stella tale che l'uomo guarda la stella



② $\exists x$ tale che $\forall y \quad p(x,y)$

Esiste almeno un uomo che guarda tutte le stelle

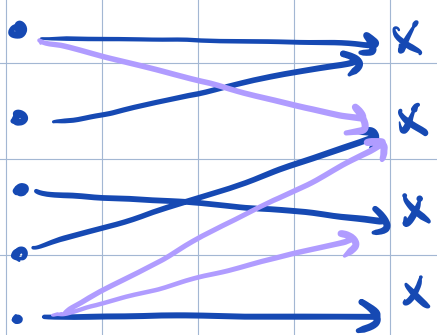


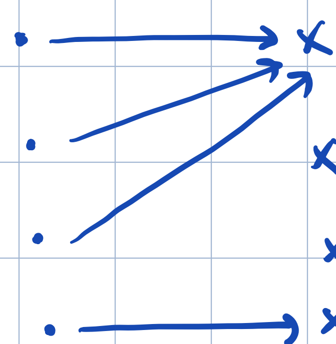
③ $\forall x \; \exists y : \quad p(x,y)$

Ogni uomo guarda almeno una stella

($\forall x$ ~~tale che~~ $\exists y$ tale che $p(x,y)$)

in italiano non si dice!





ESERCIZIO: scrivere in italiano

4) $\forall x, \forall y \quad p(x,y)$

5) $\exists y, \exists x: \quad p(x,y)$

6) $\forall y, \exists x: \quad p(x,y)$

7) $\exists y: \forall x \quad p(x,y)$

8) $\forall y$ e $\forall x \quad p(x,y)$

(eventualmente aiutarsi con una rappresentazione)