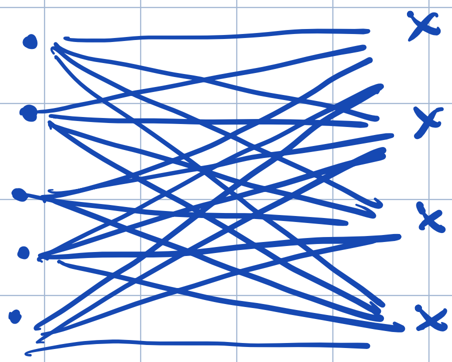
ESERCIZIO: scrivere in italiano

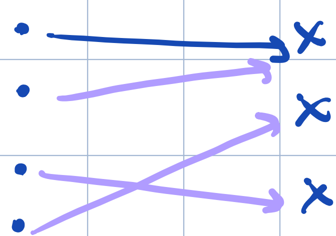
(4) $\forall x, \forall y \quad p(x,y)$

Tutti gli uomini guardano tutte le stelle



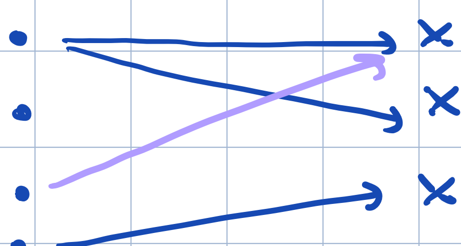
(5) $\exists y, \exists x : \quad p(x,y)$

Una stella è guardata da un uomo
(è logicamente equivalente a "un uomo guarda una stella" $\exists x \exists y : \ p(x,y)$)



(6) $\forall y, \exists x : \quad p(x,y)$

Ogni stella è guardata da qualcuno



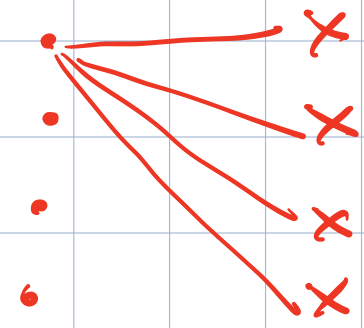
Attenzione!

L'uomo x non è necessariamente

sempre lo stesso e non è neanche unico.

OSS: Esiste almeno un uomo che guarda tutte le stelle

$$\exists x : \forall y \quad p(x,y)$$

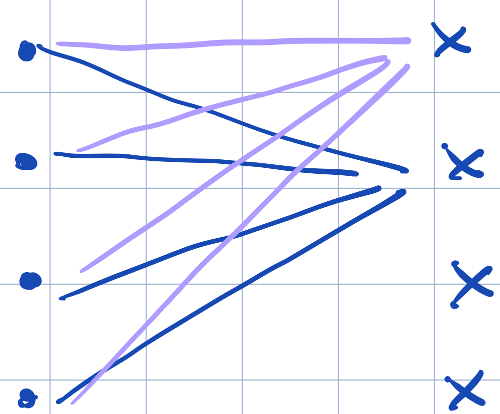


⑦ $\exists y : \forall x \quad p(x,y)$

C'è una stella che tutti guardano

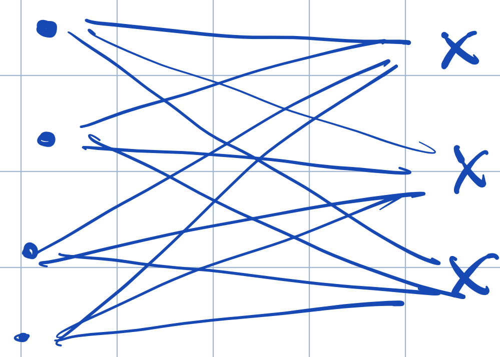
oppure

Tutti guardano la stessa stella



⑧ $\forall y$ e $\forall x \quad p(x,y)$

Ogni stella è guardata da tutti



<u>OSS</u>: $\forall y \; e \; \forall x$ è logicamente equivalente a

$\forall x \; e \; \forall y$

<u>Tema d'esame</u> 17/06/2021

Sia $p(x,y)$ la proprietà "lo studente x ha sostenuto l'esame y".
Usando i simboli matematici $\forall, \exists, !$ ed eventualmente le loro negazioni, scrivere le proposizioni seguenti:

a) Uno studente ha sostenuto tutti gli esami.

$\exists x$ tale che $\forall y$ $p(x,y)$

b) C'è un esame che nessuno studente ha sostenuto

$\exists y$ tale che $\forall x$ non $p(x,y)$

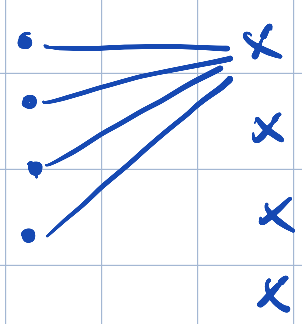
oppure

$\exists y$ tale che $\nexists x$ tale che $p(x,y)$

c) Uno studente ha sostenuto un solo esame

$\exists x$ tale che $\exists! \, y$ tale che $p(x,y)$

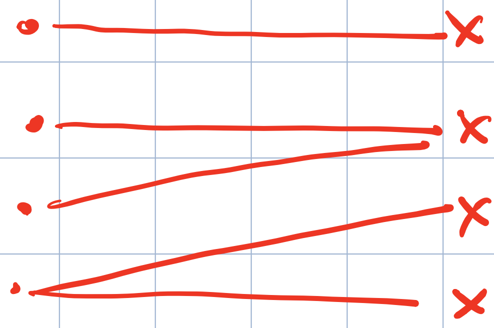
d) Tutti gli studenti hanno sostenuto lo stesso esame.



$\exists y$ tale che $\forall x$ $p(x,y)$

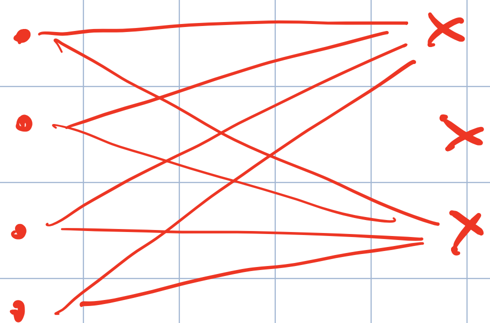
Attenzione!

1) $\forall x$ $\exists y$ tale che $p(x,y)$



2) Non c'è unicità: non è

(*) $\exists !\, y$ tale che $\forall x \quad p(x,y)$



La frase (*) sarebbe stata:
c'è un unico esame che tutti gli studenti hanno sostenuto.

e) ogni studente ha sostenuto un esame

$\forall x \quad \exists\, y$ tale che $\quad p(x,y)$

LA DISGIUNZIONE "o" "oppure"

Esempi.

1. Vuoi carne o pesce?
2. Vieni lunedì o martedì?

Nella lingua italiana "o" è esclusiva
(non entrambe le possibilità)
In linguaggio matematico NON È
una disgiunzione esclusiva.

ESEMPIO:
TEOREMA (Proprietà di Euclide)
Se un numero primo p divide
il prodotto a.b ($a, b \in \mathbb{N}$) numeri naturali
appartiene

allora p divide a oppure divide b.

Significa: se p non divide a, allora
sicuramente divide b, ma è possibile

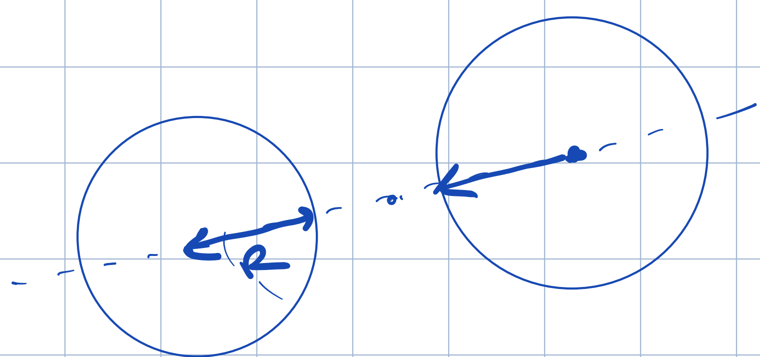
che divida sia a che b.

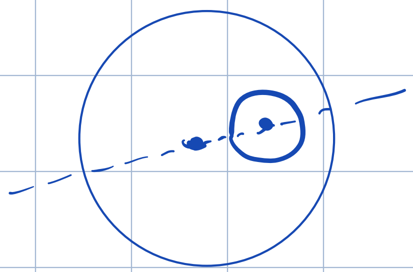
Non c'è bisogno di dire "oppure divide entrambi".

Se vogliamo specificare che di due possibilità se ne può realizzare solo una bisogna dirlo espressamente.

ESEMPIO: Se due circonferenze non hanno punti in comune, allora accade solo una delle due possibilità seguenti:

La distanza dei centri è maggiore della somma delle lunghezze dei raggi oppure è minore della loro differenza





TUTTI e SOLI

Esempio:

(1) Possono votare alle elezioni nazionali **tutti** i cittadini che abbiano compiuto 18 anni.

Se x è un cittadino italiano

La condizione x ha almeno 18 anni è condizione **sufficiente** alla condizione x può votare

Se x ha meno di 18 anni non sappiamo!!

(2) Possono votare solo i cittadini che hanno almeno 18 anni

Avere 18 anni è condizione necessaria (indispensabile) per poter votare.

Attenzione! La frase non dice se basta avere 18 anni per poter votare.

Altri esempi

(3) Tutti i multipli di 4 sono pari.

(4) Solo i multipli di 4 sono pari.

(3) Essere multiplo di 4 è sufficiente per essere pari.

(è vera! Dimostriamola:

Sia $n \in \mathbb{N}$ un multiplo di 4, cioè
sia $n = 4k$ con $k \in \mathbb{N}$.
Dobbiamo mostrare che n è pari,
cioè $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2m$
(cioè è pari).

Si ha $n = 4k = 2 \cdot \underbrace{2k}_{m} = 2 \cdot m$

Abbiamo trovato $m = 2k$.
Abbiamo dimostrato che n è pari.

④ Essere multiplo di 4 è necessario
per essere pari.

<u>È falso!</u> Basta esibire un controesempio

Ad esempio $n = 2$ è pari ma non è
un multiplo di 4.

——— ∘ ———

Come si fa a negare una proposizione matematica?

ES: Un uomo guarda una stella

Neghiamola:

1) Nessun uomo guarda stelle
2) Un uomo guarda molte stelle

Quale negazione è "quella giusta"?
In linguaggio matematico esiste un unico modo di negare una proposizione

la proposizione precedente era:

$\exists x, \exists y$ tali che $p(x,y)$

La negazione è

$\forall x$ e $\forall y$ non $p(x,y)$

- Ogni volta che nego un $\exists$ metto un $\forall$
- e ogni volta che nego un $\forall$ metto un $\exists$

e la proprietà diventa non $p(x,y)$

Esempio

$\exists x$ tale che $\forall y$ $p(x,y)$

negandola:

$\forall x$ $\exists y$ tale che non $p(x,y)$

ESERCIZIO: Negare tutte le proposizioni scritte con x, y, $p(x,y)$.

ESERCIZIO: (Tema d'esame 31/01/2024)
Sia $p(n,m)$ la proprietà seguente "il numero naturale n è multiplo del numero naturale m".

Utilizzando i simboli $\forall$, $\exists$ e non $p(n,m)$, scrivere le proposizioni seguenti:

a) Ogni numero naturale n è multiplo di un qualche numero naturale m

b) Tutti i numeri naturali n sono multipli dello stesso numero naturale m

c) esiste un numero naturale n che non è multiplo di alcun numero naturale m

d) Nessun numero naturale n è multiplo di tutti i numeri naturali m

<u>Inoltre</u> negare ogni proposizione (sempre con il linguaggio matematico)