IMPLICAZIONI, DIMOSTRAZIONI, CONTROESEMPI

Sia Q un quadrilatero e consideriamo le seguenti proprietà:

a) Q ha un angolo ottuso
b) Q ha 3 angoli acuti
c) Q non ha angoli retti.

(Ricordo che :

i) La somma degli angoli interni di un quadrilatero è $2\pi = 360°$

ii) α angolo ottuso: $\alpha > \frac{\pi}{2} = 90°$

α angolo retto: $\alpha = \frac{\pi}{2}$

α angolo acuto: $\alpha < \frac{\pi}{2}$)

OSS. IMP.: Non è possibile specificare chi è Q stabilire la verità o falsità delle 3 proprietà precedenti.

Qui vogliamo discutere le possibili implicazioni fra a), b), c).

Cioè: a) $\Rightarrow$ b) ?

IMPLICAZIONE: $A \Rightarrow B$

A è l'ipotesi
B è la tesi

Per dimostrare una implicazione
NON è possibile esibire esempi!

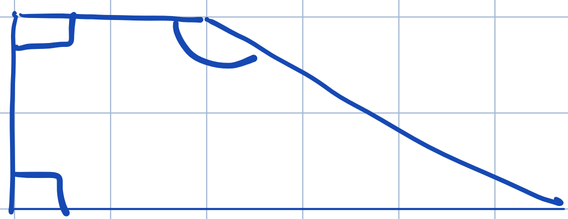
È indispensabile una dimostrazione
nella più totale generalità

Invece per confutare una implicazione
bisogna esibire un controesempio:
un esempio in cui A è verificato ma
non B.

Consideriamo ora a), b) e c).
a) $\Rightarrow$ b) ?
Se Q è un quadrilatero con un angolo

ottuso, allora Q ha 3 angoli acuti?

Ragioniamo facendo dapprima degli esempi.



è già un controesempio!

a) $\not\Rightarrow$ b)

non implica

b) $\Longrightarrow$ a) ?

Se Q ha 3 angoli acuti, allora Q ha un angolo ottuso?

$\boxed{\text{Sì}}$: dimostriamolo

Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i 4 angoli del quadrilatero.

<u>Per ipotesi</u> $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

Sappiamo inoltre che

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$$

quindi $\delta = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma$

Ma $-\alpha > -\frac{\pi}{2}$
$-\beta > -\frac{\pi}{2}$
$-\gamma > -\frac{\pi}{2}$

e sommando $-\alpha-\beta-\gamma > -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$
da cui

$$\delta = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma > 2\pi - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

quindi δ è ottuso.

OPPURE PER ASSURDO:

Supponiamo che valgano a) e non b) e arriviamo ad un assurdo

Supponiamo per assurdo che Q abbia 3 angoli acuti e nessun angolo ottuso cioè $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$ e

$$\delta \leq \frac{\pi}{2}$$

Allora $\boxed{\underset{\le \frac{\pi}{2}}{\alpha} + \underset{\le \frac{\pi}{2}}{\beta} + \underset{\le \frac{\pi}{2}}{\gamma} + \delta} < \frac{3}{2}\pi + \delta < \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2} = \boxed{2\pi}$

Assurdo poiché sappiamo che $\alpha+\beta+\delta+\gamma = 2\pi$.

<u>ora</u> : a) $\Longrightarrow$ c) ?

Se Q ha un angolo ottuso allora Q non ha angoli retti ?

<u>FALSO</u> : stesso controesempio di prima

c) $\Longrightarrow$ a) ?

Se Q non ha angoli retti allora Q ha un angolo ottuso?

<u>VERO</u> : dimostriamolo per assurdo:

Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono acuti allora

$\alpha+\beta+\gamma+\delta < \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = 2\pi$

assurdo.

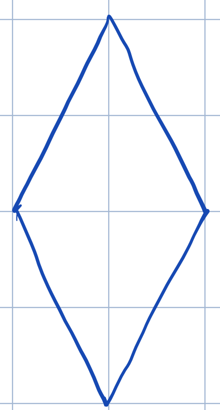
b) $\Longrightarrow$ c) ?

Se Q ha 3 angoli acuti, allora Q non ha angoli retti?

Sì: stessa dimostrazione precedente

c) ⇒ b)

Se Q non ha angoli retti allora ha 3 angoli acuti? NO



Q non ha angoli retti e non ha 3 angoli acuti.

ESERCIZIO:

Vero o falso?

1) Un quadrato ha 3 angoli retti.

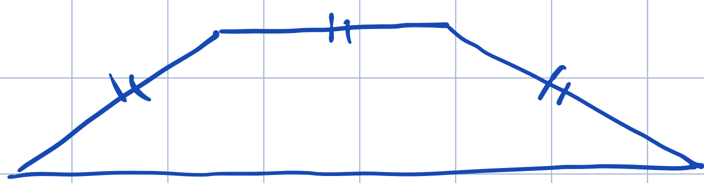
VERO

2) Un rombo ha 2 angoli uguali.

Sì: un rombo è un quadrilatero

con 4 lati uguali e si dimostra che
ha anche angoli uguali a 2 a 2.

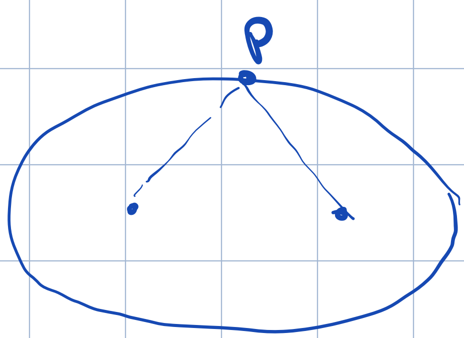
3) Solo i rombi sono quadrilateri con
3 lati uguali.



NO

4) Solo le circonferenze sono ellissi.

FALSO: Non è vero che condizione
necessaria per avere una ellissi è
che sia una circonferenza!



5) Solo le ellissi sono circonferenze.
cioè:
Tutte le circonferenze sono ellissi

VERO! condizione necessaria per essere una circonf. è essere una ellisse. Una circonf. è una ellisse coi fuochi coincidenti.

RICHIAMI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Richiamiamo terminologia e notazioni:

L'"insieme" è una nozione primitiva, possiamo descriverlo:
un insieme è una collezione di oggetti (chiamati elementi).
Un insieme è ben individuato se di ogni possibile oggetto è possibile stabilire con certezza se appartiene o meno all'insieme.

Ad esempio:

$A = \{$ persone simpatiche $\}$

non è un insieme nel senso matematico del termine.

In generale, gli insiemi si denotano con le lettere maiuscole $A, B, C, X, Y, \ldots$

e gli elementi con lettere minuscole

$a, b, c, x, y, \ldots$

"l'oggetto a appartiene all'insieme A"

$$a \in A$$

appartiene

$$a \notin A$$

non appartiene

<u>ESEMPI</u>:

① $X = \{1, 2, 3\}$

insieme individuato <u>per elencazione</u>

② $X = \{$ studenti e studentesse iscritti al 2° anno di SFP, Unibg $\}$

insieme individuato tramite la proprietà comune a <u>tutti</u> e <u>soli</u> i suoi elementi

Insiemi possono essere <u>finiti</u> oppure <u>infiniti</u> (in base al numero finito / infinito dei propri elementi)

$\emptyset$ insieme vuoto: non contiene alcun elemento

$\nexists$ x tale che $x \in \emptyset$

↑ non esiste

<u>OSS</u>: In un insieme non esiste molteplicità né ordinamento

<u>ES</u>: $X = \{1, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 3\}$

sono lo stesso insieme!

$= \{2, 3, 1\}$

<u>Gli insiemi numerici</u>

$\mathbb{N}$ = numeri naturali

$n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$0 \in \mathbb{N}$

(in alcuni testi $0 \notin \mathbb{N}$)

$\mathbb{Z}$ = numeri interi (relativi)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali = {allineamenti decimali infiniti periodici}

$q \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ = numeri reali = {tutti gli allineamenti decimali}

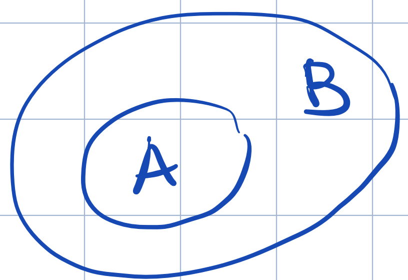
$x \in \mathbb{R}$

CONFRONTO FRA INSIEMI

Siano A, B insiemi

$A \subseteq B$ (A è un sottoinsieme di B
A è contenuto in B)

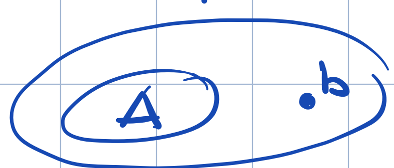
ogni elemento di A appartiene a B:
$\forall a \in A, \ a \in B$



$A \subseteq B$ non esclude $A = B$

$A \subset B$ (A è sottoinsieme proprio,
$A \subsetneq B$ A è contenuto propriamente
in B)

$\forall a \in A, \ a \in B$ e $\exists b \in B : b \notin A$



$$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A}$$

$A \nsubseteq B$ A non è contenuto in B.

$\exists a \in A : \quad a \notin B$.

A, B sono **DISTINTI** se sono diversi

cioè $\exists a \in A : \quad a \notin B$ oppure

$\exists b \in B : \quad b \notin A$.

DISGIUNTI se non hanno

nessun elemento in comune.

DISGIUNTI $\Rightarrow$ DISTINTI

DISTINTI $\not\Rightarrow$ DISGIUNTI