OSS: $\emptyset \subseteq X \quad \forall X$ insieme

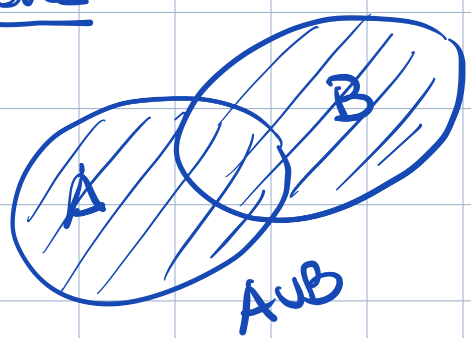
OPERAZIONI FRA INSIEMI

Siano A, B insiemi e supponiamo che $\exists X$ insieme tale che $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ (tale insieme esiste sempre! basta considerare $X = \{a \in A, b \in B\}$)

Allora

$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$

unione

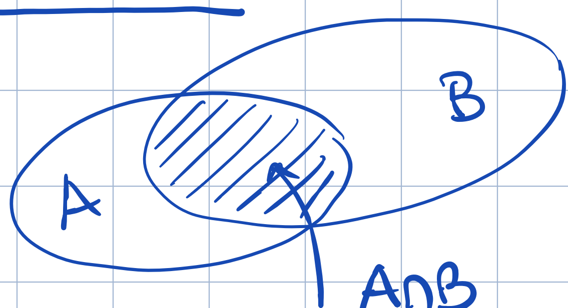


$A \subseteq A \cup B$

$B \subseteq A \cup B$

$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}$

intersezione



$A \cap B \subseteq A$

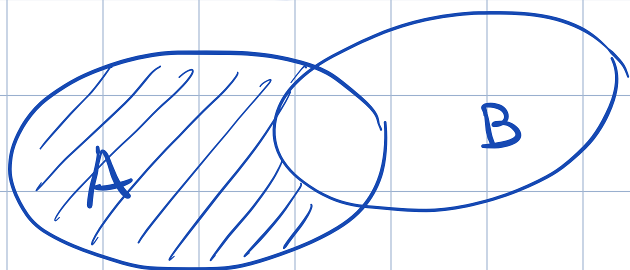
$A \cap B \subseteq B$

$A^c = \complement A = \{x \in X : x \notin A\}$

<u>complementare</u>

$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$

<u>differenza</u>



<u>OSS</u>: Non è detto che $B \subseteq A$!!

<u>ESERCIZIO</u>

$A = \{a, b, c\}$

Determiniamo <u>tutti</u> i sottoinsiemi di A

$\mathcal{P}(A) = \{\text{sottoinsiemi di } A\} =$

parti di A $= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\},$

$\{b,c\}, A\}$

Vero o falso?

$a \in \mathcal{P}(A)$ NO

$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ sì

$\{a,b\} \in \mathcal{P}(A)$ sì

tra un elemento e un insieme

$a \in \{a\}$

$\{a\} \subseteq A$

tra due insiemi

Scriviamo in linguaggio matematico alcuni insiemi

(1) Insieme dei numeri naturali pari.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 2k\}$$

(2) Numeri dispari

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1\}$$

③ $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\} =$
$= \{1, -1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ con } x = (-1)^n\}$

④ $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

PROPOSIZIONI & PROPRIETÀ

Esempi: È vero o falso?

a) Il numero 52 è un numero dispari. PROPOSIZIONE

b) Il numero $n \in \mathbb{N}$ è un numero pari. PROPRIETÀ

c) Dato un numero $k \in \mathbb{Z}$, si ha che $k \geq 10$. PROPOSIZ.

d) Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 = -1$. PROPOSIZ.

e) Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ e tale che k divide 10. PROPRIETÀ

f) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2k$. PROPOSIZIONE

g) La retta se è parallela. NON HA SENSO
non è prop.

h) Milano è una città lombarda. non è proposizione
PROPOSIZIONE

Risposte:

a) Poiché $52 = 2 \cdot 26$ 52 è un numero pari e non dispari. <u>FALSO</u>

b) <u>$n \in \mathbb{N}$ è pari</u>: La frase ha senso ma compare una variabile n <u>libera</u>, non precisata.
Senza conoscere il valore di n non si può stabilire se la frase è vera oppure falsa.

c) Cosa significa "Dato $k \in \mathbb{Z}$" ?
La frase è equivalente alla seguente:
$\forall k \in \mathbb{Z}$ si ha $k \geq 10$.
La frase ha senso, è presente una variabile k che è <u>quantificata</u>,

non possiamo scegliere il suo valore!
È "per ogni k"...
Possiamo stabilire se è vera o falsa, ed è falsa: basta esibire un controesempio, per esempio $k=1$

d) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$
Frase che ha senso, esiste una variabile quantificata ("esiste x tale che"...)
possiamo stabilire se è vera o falsa: è falsa infatti $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

e) Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ e tale che k divide 10.

La frase ha senso, sono presenti due variabili k, n.
La variabile k è quantificata ("esiste k...")
la variabile n non è quantificata, è libera
La verità di questa frase dipende dal valore di n: se $n \leq 10$, allora $\exists k \geq n$ tale che k divide 10: basta prendere $k=10$.

Se $n > 10$ la frase è falsa.

f) $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $k \in \mathbb{N}$: $n = 2k$.
Questa frase ha senso; contiene due variabili (due quantità che possono assumere vari valori, in questo caso n e k), le due variabili sono entrambe quantificate:
$\forall n$
$\exists k \ldots$
È falsa! P. es. $n = 3$ non verifica la condizione.

g) La retta r è parallela.
Non ha senso

h) Milano è una città lombarda.
È una frase sensata, non ci sono variabili, è vera.

Definizione: (PROPOSIZIONE)
È una frase di senso compiuto che non contiene variabili oppure, se ne contiene, sono tutte quantificate.
È sempre lecito chiedersi se è vera oppure falsa.

Definizione (PROPRIETÀ)
È una frase di senso compiuto e contiene almeno una variabile libera.
In generale la verità o falsità della proprietà dipende dal valore della (delle) variabile libera.

OSS: Il numero reale x è tale che $x^2 = -1$
È una proprietà, poichè x non è quantificata, ma è comunque sempre falsa.
Quindi esistono proprietà sempre vere oppure

sempre false per le quali la verità o falsità non dipende dal valore delle variabili.

OSS: Per le variabili si può scegliere qualunque notazione, ma bisogna restare coerenti con la scelta fatta.

ES: 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che n^2+n+1 è dispari

2) $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha che k^2+k+1 è dispari

3) ~~$\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che k^2+k+1 è dispari~~

OSS: Una proprietà può servire a definire un insieme

$$A = \{ \overbrace{\text{studenti e studentesse di SF.P}}^{\text{proprietà}}$$

2° anno }

$B = \{ n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}$ con $n = 2k \}$

= numeri pari

ESERCIZIO:

Scrivere in linguaggio matematico i seguenti insiemi, individuati da proprietà

(1) L'insieme dei numeri interi positivi che sono somma di due quadrati di numeri interi positivi

(2) L'insieme delle potenze intere di 2

(1) $A = \{ \underbrace{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}, \ n = k^2 + \ell^2$ con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

oppure $n \in \mathbb{N} : n > 0$

oppure $n \in \mathbb{Z}, \ n > 0$

oppure $k \in \mathbb{N}, \ \ell \in \mathbb{N}$, $k > 0, \ \ell > 0$

oppure $n \in \mathbb{Z}^+$ con

$$\mathbb{Z}^+ = \{ m \in \mathbb{Z} : m > 0 \}$$

2) $B = \{ x \in \mathbb{R} : x = 2^m, \ m \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ x \in \mathbb{Q} : x = 2^m, \ m \in \mathbb{Z} \}$

(Ricordo che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$)

$\cancel{= \{ x \in \mathbb{Z} : x = 2^m, \ m \in \mathbb{Z} \}}$