COME SI COSTRUISCE UNA TEORIA MATEMATICA?

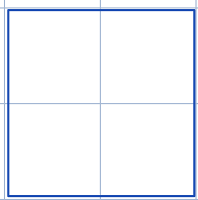
Si parte da "enti primitivi" che si danno per buoni e da "postulati" o "assiomi" che non si devono dimostrare: si suppone che siano veri.

Ad esempio: nella geometria Euclidea si assumono i concetti primitivi di
- punto, retta, piano
- si assumono dei postulati (ad esempio il postulato delle parallele)

A partire da enti primitivi e assiomi si danno nuove DEFINIZIONI: a oggetti conosciuti con particolari proprietà si dà un nuovo nome

ESEMPIO: Chiamiamo quadrato ogni rettangolo con 4 lati uguali

Una definizione NON SI DIMOSTRA! Si deve invece esibire un esempio per essere certi che la definizione non sia vuota.



In una definizione si usano le locuzioni: "si dice", "chiamiamo", "definiamo"... mentre queste non si usano in un enunciato di un teorema!!

Attenzione! È fondamentale assicurarsi che una definizione non sia vuota!

ES: Chiamo QUADRATO OTTUSO un quadrilatero con 4 lati uguali e 4 angoli ottusi.

È IMPOSSIBILE! È una definizione vuota.

Attenzione! Se si hanno definizioni diverse per lo stesso oggetto è indispensabile che le definizioni siano equivalenti, cioè ogni oggetto che soddisfa la prima definizione soddisfi anche la seconda e viceversa.

Ad esempio

Definizione 2: chiamiamo QUADRATO ogni rombo con 4 angoli retti

È indispensabile mostrare che le due definizioni sono equivalenti.

Con le definizioni si cerca di dimostrare dei teoremi: proposizioni vere

Vogliamo mettere in relazione i vari oggetti che sono stati costruiti

Un teorema è fatto da:

- un enunciato
- una dimostrazione

Per dimostrare un teorema non è mai possibile fare un esempio: è indispensabile dimostrare il risultato nella sua più totale generalità utilizzando un ragionamento logico deduttivo <u>INCONTROVERTIBILE</u>, condivisibile da chiunque.

<u>ESEMPIO</u>:

<u>TEOREMA</u>: Sia $n \in \mathbb{N}$.
Se n è dispari allora anche n^2 è dispari.

<u>È un enunciato</u>
È del tipo: sia $x \in A$ $\qquad A = \mathbb{N}$
$p(x)$ è la proprietà x è dispari
$q(x)$ è la proprietà x^2 è dispari

$$\boxed{\forall x \in A \qquad p(x) \Longrightarrow q(x)}$$

implica

$x \in A$, $p(x)$ è l'ipotesi
$x \in A$, $q(x)$ è la tesi

dimostrazione:

Sia $n \in \mathbb{N}$, dispari, cioè $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che
$n = 2k+1$.

Dobbiamo mostrare che anche n^2 è dispari, cioè dobbiamo trovare $l \in \mathbb{N}$ tale che
$n^2 = 2l+1$.

Si ha $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 1 + 2(2k)$

$= 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1$

Abbiamo trovato $l = 2k^2 + 2k$

———o———

Ci sono vari tipi di "teoremi"

- TEOREMA
- PROPOSIZIONE } sinonimi
- LEMMA : risultato accessorio per dimostrare un altro risultato.
- COROLLARIO: un risultato che segue direttamente da un altro, ne è un caso particolare

OSS: I teoremi possono essere del tipo:

$$\forall x \in A \qquad p(x) \Rightarrow q(x)$$

oppure

$$\exists x \in A: \qquad p(x)$$

con $p(x)$ e $q(x)$ proprietà di x.

OSS: Per mostrare che un teorema è falso basta esibire un controesempio.

ESEMPIO:

TEOREMA: Se p è un numero primo, allora p è dispari.

OSS: "p numero primo" significa $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ e p è divisibile solo per 1 e per se stesso.

L'enunciato è:

Sia $p \in \mathbb{N}$ $\qquad \underbrace{p \text{ primo}}_{a(p)} \Rightarrow \underbrace{p \text{ dispari}}_{b(p)}$

FALSO! 2 è un numero primo ed è

pari.

Basta un unico controesempio per mostrare che il teorema è falso.

TEOREMA: Se p è un numero primo, $p>2$, allora p è dispari.

VERO, dimostrazione:

per assurdo supponiamo vera l'ipotesi (p primo e $p>2$) e supponiamo vero il contrario della tesi (p non dispari)

Quindi supponiamo che p sia primo, $p>2$ e p pari, allora $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$p = 2k$$

Allora 2 divide p che è primo, $p>2$ e ciò è assurdo.

OSS. IMP:

Se un teorema è del tipo

$\forall x \in A \quad p(x) \Rightarrow q(x)$

nulla si può dire su $q(x) \Rightarrow p(x)$

ES:

TEOREMA.

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se n^2 è dispari allora n è dispari.

VERO!

Dimostrazione: per assurdo supponiamo che n^2 sia dispari e che n sia pari, cioè che $\exists\, k \in \mathbb{N}$: $n = 2k$.

Allora $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

cioè n^2 è pari. **ASSURDO!**

ESERCIZIO: Dimostrare il seguente teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$. n è divisibile per 3 $\Longleftrightarrow$ n^2 è divisibile per 3.

Se un teorema è del tipo

$$\forall x \in A \quad p(x) \Longrightarrow q(x)$$

significa che

$p(x)$ è SUFFICIENTE per $q(x)$

o in modo equivalente

$q(x)$ è NECESSARIO per $p(x)$

o in modo equivalente

non $q(x) \Longrightarrow$ non $p(x)$

Avete $p(x) \Longleftrightarrow q(x)$ se e solo se

Sono equivalenti !

ESERCIZI (1° foglio)

Es. 6 (31/01/2024)

$p(n,m)$: il numero naturale n è multiplo del numero naturale m

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $p(n,m)$

b) $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} \quad p(n,m)$

c) $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ non $p(n,m)$

d) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}$ tale che non $p(n,m)$

Neghiamo la a)

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\forall m \in \mathbb{N}$ si ha non $p(n, m)$

Es. 8 (22/09/2021)

a) Tutte le strade portano a Roma
È una proposizione: non contiene variabili
oppure è anche vero che la variabile
"strada" è quantificata da "tutte".
(una proprietà poteva essere "la strada
porta a Roma")

b) La frazione $q = \frac{m}{n}$ è ridotta ai
minimi termini.
È una proprietà: la variabile q non
è quantificata

c) Esiste un numero naturale n dispari
che è anche primo.
Proposizione: "esiste" è il quantificatore

Es. 9 (5/9/2023)

Sia data la proposizione
"Ogni funzione convessa è derivabile". (*)
È possibile dedurre dalla proposizione precedente le seguenti proposizioni?

a) Se una funzione è derivabile, allora è convessa. (#)

(*) $p(x)$ x è convessa
$q(x)$ x è derivabile
$p(x) \Rightarrow q(x)$

(#): $q(x) \Rightarrow p(x)$
Non si può dedurre! Non abbiamo nessuna informazione!

b) Se una funzione non è convessa allora non è derivabile
$\text{non } p(x) \Rightarrow \text{non } q(x)$

è equivalente alla a) : non possiamo dire nulla!

c) Se una funzione non è derivabile allora non è convessa:

$$\text{non } q(x) \Rightarrow \text{non } p(x)$$

<u>VERO</u>! È equivalente alla proposizione data

<u>COMPITO</u>: $\boxed{\text{Es. 10}}$ (31/01/2024)