Es. 10 (31/01/2024)

"Ogni multiplo naturale di 6 è un numero pari".

a) Stabilire quale delle due seguenti è equivalente alla proposizione data:

i) Se $n \in \mathbb{N}$ è multiplo di 6, allora n è pari

ii) Se $n \in \mathbb{N}$ è pari, allora n è un multiplo di 6.

La proposizione equivalente è i)

b) Individuare qual è l'ipotesi della proposizione data e qual è la tesi.

Ipotesi: $n \in \mathbb{N}$ è multiplo di 6

tesi: n è pari

oppure

$p(n)$: n multiplo di 6

$q(n)$: n pari

Ipotesi: $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$

tesi: $q(n)$

c) Si considerino le due argomentazioni seguenti

i) La proposizione è vera: infatti 18 è un multiplo naturale di 6 ed è pari

ii) La proposizione è vera: infatti un numero dispari non può essere un multiplo di 6 perché 6 è già a sua volta un multiplo di 2.

Discutere la validità delle due argomentazioni per dimostrare la proposizione data

i) è un esempio: non basta per dimostrare la proposizione

ii) è una dimostrazione: è sufficiente per dimostrare la proposizione.

$\boxed{\text{ES. 2}}$

Sia $p(b,c)$ la proprietà: "il bambino b ha svolto il compito c"

a) Un bambino ha svolto tutti i compiti.

$\exists b : \forall c \quad p(b,c)$

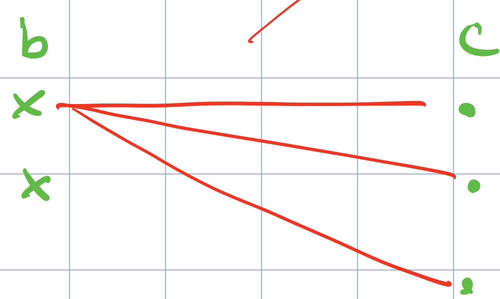
b) Nessun bambino ha svolto tutti i compiti.

$\exists b, \exists c :\ \cancel{\text{non}}\ p(b,c)$

(un bambino non ha svolto un compito)

→ $\forall b\ \exists c :\ \text{non}\ p(b,c)$

$\forall c\ \exists b :\ \cancel{\text{non}}\ p(b,c)$ NO



$\forall b, \forall c\ \ \cancel{\text{non}}\ p(b,c)$ NO

c) Un compito è stato svolto da un unico bambino

$\exists!\ b$ e $\exists c$: $p(b,c)$

(se mettiamo ! prima assume un significato diverso)

almeno è sottinteso!

d) ogni bambino ha svolto due compiti.

$\forall b\ \ \exists c_1, \exists c_2$: $p(b,c_1)$ e $p(b,c_2)$

con $c_1 \neq c_2$

Variante:
ogni bambino ha svolto esattamente due compiti

Attenzione!! Non si può usare il simbolo di unicità dal momento che ho 2 compiti.

$$\forall b \quad \exists c_1, \exists c_2 \text{ con } c_1 \neq c_2 : \; p(b, c_1) \text{ e } p(b, c_2)$$
$$\text{e} \quad \forall c_3 \neq c_1, \; c_3 \neq c_2 \quad \text{non } p(b, c_3)$$

Non possiamo scrivere $\exists ! c_1$ e $\exists ! c_2$

sono 2 !!

e) Un bambino non ha svolto compiti

$$\exists b : \; \forall c \;\; \text{non } p(b, c)$$

Attenzione a posizionare correttamente i "tale che", ce ne possono essere vari in una stessa proposizione. Leggere sempre ad alta voce la frase che si sta scrivendo!

I NUMERI NATURALI (Cap. 2 Cazzola)

Sono i numeri del contare e dell'ordinare

ES: La mia casa ha 3 piani. Io abito al secondo.

L'insieme dei numeri naturali si denota con $\mathbb{N}$

La teoria assiomatica dei numeri naturali è dovuta a Giuseppe Peano (1858-1932)

Considera come <u>enti primitivi</u>

- lo zero
- il numero naturale
- il successivo

e stabilisce i seguenti <u>ASSIOMI</u>

1) zero è un numero naturale

cioè $0 \in \mathbb{N}$

2) Ogni numero naturale ha uno e un solo successivo naturale

Denotiamo $n \in \mathbb{N}$, n^+ il successivo di n e quindi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists!\, n^+ \in \mathbb{N}$$

3) 0 non è il successivo di alcun numero naturale

cioè $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^+ \neq 0$

4) Se due numeri naturali hanno lo stesso successivo, sono uguali

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n^+ = m^+$ si ha

$n = m$

5) PRINCIPIO DI INDUZIONE:

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che

a) $0 \in A$

b) $\forall m \in A$ si ha $m^+ \in A$

Allora $A = \mathbb{N}$

OSS: Posso scrivere che $n^+ = n+1$?

Per ora no: non sappiamo chi è 1

e non sappiamo cosa vuol dire $+$

ORA: Denotiamo

$1 = 0^+$

$2 = 1^+ = (0^+)^+$

$3 = 2^+$

$4 = 3^+$

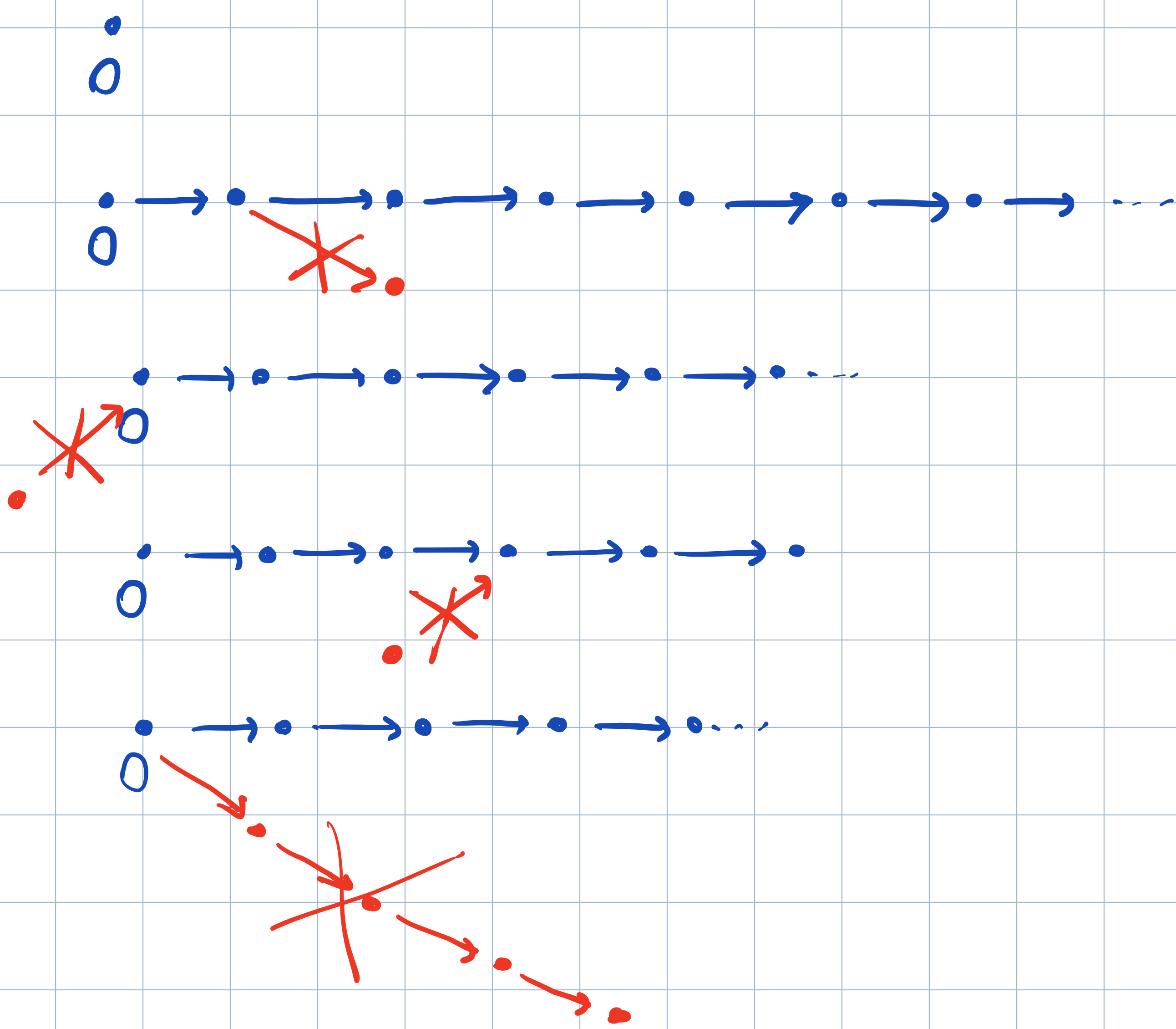
$5 = 4^+$

...

Cerchiamo di illustrare graficamente gli assiomi di Peano:

• numero naturale

→ successivo



Dobbiamo definire somma e prodotto in $\mathbb{N}$

Definizione: Dati $n, m \in \mathbb{N}$ definiamo la

SOMMA $n+m$ nel modo seguente

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n+0 = n$

2) $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n+m^+ = (n+m)^+$

Mostriamo che la definizione precedente permette di definire la somma $n+m$ $\forall n$ e $\forall m$.

Utilizziamo il principio di induzione.

Sia $A = \{ m \in \mathbb{N}$ tali che $n+m$ è ben definita $\forall n \in \mathbb{N} \}$

Vogliamo mostrare che $A = \mathbb{N}$

Per la def. di somma $0 \in A$, poiché

$$n+0 = n$$

Ora mostriamo che se $m \in A$ anche $m^+ \in A$:

infatti

$$n+m^+ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def di somma}}}{=} (\underbrace{n+m}_{\substack{\text{ipotesi di induzione:} \\ m \in A}})^{+}$$

$+$ successivo

Per il principio di induzione: $A = \mathbb{N}$.

ESEMPIO:

$$3+2 = 3+1^+ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def di somma}}}{=} (3+1)^+ = (3+0^+)^+ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def di somma}}}{=} ((3+0)^+)^+$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 3+0=3 \\ \text{def di somma}}}{=} (3^+)^+ = (4)^+ = 5$$

OSS:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{notazione di } 0^+}}{n+1} = n+0^+ \overset{\substack{\text{def di somma} \\ \downarrow}}{=} (n+0)^+ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def somma}}}{=} n^+$$

ORA posso affermare che $n^+ = n+1$

Proposizione: La somma $n+m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1) ASSOCIATIVA:

$\forall n, m, k \in \mathbb{N}$

$$(n+m)+k = n+(m+k)$$

2) 0 è ELEMENTO NEUTRO cioè

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n+0 = 0+n = n$

3) COMMUTATIVA:

$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad n+m = m+n$

4) LEGGE DI CANCELLAZIONE:

$\forall m, n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$m + k = n + k$$

si ha $\qquad m = n$

5) LEGGE DI ANNULLAMENTO

$\forall m, n \in \mathbb{N}$, se $m + n = 0$ allora $m = n = 0$

Non dimostriamo nulla, ma ogni proposizione andrebbe dimostrata e l'ordine riflette l'ordine logico delle dimostrazioni. Sul libro ci sono.

OSS:

1) $7 + (10+5) = (7+10) + 5$ quindi non abbiamo più bisogno di mettere parentesi

2) per definizione di somma sappiamo che $n + 0 = n$, ma non sappiamo che $n+0 = 0+n$ perché non abbiamo ancora mostrato la commutatività.

La commutatività si dimostra a partire dalla esistenza dell'elemento neutro

3) Per la legge di cancellazione:

$$m+k = n+k \implies m = n$$

non si può sottrarre k a destra e sinistra perché a questo punto la sottrazione non è definita!!

OSS: Le leggi di cancellazione e di annullamento sono di fatto delle equivalenze:

$$m+k = n+k \iff m = n$$

$\Leftarrow$ è evidente!

$$m+n = 0 \iff m = n = 0$$

$\Leftarrow$ è evidente!

OSS: Non esiste una ulteriore proprietà detta "PROPRIETÀ DISSOCIATIVA":

ES: $15+5 = (10+5)+5 = 10+(5+5) =$

$10+10 = 20$

$15 = 10+5$

proprietà ASSOCIATIVA

chiamiamolo "METODO DISSOCIATIVO".

<u>DEFINIZIONE</u>: Dati $m, n \in \mathbb{N}$ definiamo il <u>PRODOTTO</u> $n \cdot m$ nel modo seguente:

1) $n \cdot 0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2) $n \cdot m^+ = n \cdot m + n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

$n \cdot (m+1) = n \cdot m + n$

Mostriamo che la definizione di prodotto permette di calcolare $n \cdot m$ $\forall n, \forall m$.

Sia $A = \{ m \in \mathbb{N}$ tali che $n \cdot m$ è ben definito $\forall n \in \mathbb{N} \}$

Dobbiamo mostrare che $A = \mathbb{N}$.

Utilizziamo il principio di induzione.

$0 \in A$: per la def. di prodotto $n \cdot 0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo ora $m \in A$ e mostriamo che allora anche $m^+ \in A$.

è ben definito perché $m \in A$

$n \cdot m^+ = n \cdot m + n$ <u>è ben definito</u>.

def di prodotto

è già stata definita prima

per il principio di induzione $A = \mathbb{N}$.

ES:

$$7 \cdot 0 = 0$$

$$7 \cdot 1 = 7 \cdot 0^+ = \underbrace{7 \cdot 0}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + 7 = 7$$

$$7 \cdot 2 = 7 \cdot 1^+ = 7 \cdot 1 + 7 = 7 + 7$$

Proposizione: Il prodotto $n \cdot m$ soddisfa le seguenti proprietà

1) ASSOCIATIVA: $\forall m, n, k \in \mathbb{N}$ $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$
3) COMMUTATIVA: $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $m \cdot n = n \cdot m$
4) $\exists$ ELEMENTO NEUTRO 1: $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
5) LEGGE DI CANCELLAZIONE:

$\forall m, n, k \in \mathbb{N}$ e $k \neq 0$

se $m \cdot k = n \cdot k$ allora $m = n$

6) LEGGE DI ANNULLAMENTO:

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ se $m \cdot n = 0$ allora $m = 0$ oppure $n = 0$

7) $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ se $m \cdot n = 1$ allora

$$m = n = 1$$

(Non le dimostriamo)

Proposizione: Vale la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto:

$\forall\, m, n, k \in \mathbb{N}$

$$(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$$

(Non lo dimostriamo)

OSS: 1) 5), 6) e 7) sono di fatto dei $\Longleftrightarrow$ (se e solo se) ma la freccia $\Longleftarrow$ è ovvia.

2) Nella legge di cancellazione l'ipotesi $k \neq 0$ è essenziale: ad esempio

$$2 \cdot 0 = 3 \cdot 0 \quad \text{ma} \quad 2 \neq 3.$$

Inoltre non è possibile dividere per k per dimostrare la legge poiché la divisione non è definita !!

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Ricordo che: se $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che

1) $0 \in A$
2) se $n \in A$ allora $n+1 \in A$

allora $A = \mathbb{N}$.

Il principio di induzione permette di dimostrare proposizioni del tipo

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p(n)$$

$p(n)$ una proprietà di n

Infatti sia $A = \{n \in \mathbb{N} : \ p(n)\}$

Si mostra che 1) $0 \in A$

2) se $n \in A$ anche $n+1 \in A$

allora $A = \mathbb{N}$

ESEMPIO / ESERCIZIO:

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ la somma di tutti i numeri naturali fra 0 e n (0 e n inclusi) è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.

$p(n)$: $0+1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ $p(n)$

1) $p(0)$ è vera?

$p(0)$: $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ $\boxed{\text{Si}}$

2) Supponendo vera $p(n)$ possiamo dedurre $p(n+1)$ vera?

Suppongo che $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

posso dedurre che

$0+1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$?

$\boxed{\text{Si}}$: infatti

$$\overbrace{0+1+2+\dots\qquad+n}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$\uparrow$

p(n) vera

$$= (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]$$

$$= (n+1)\frac{(n+2)}{2}$$

ok.