ESERCIZIO (RIPETIZIONE)

Mostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\cancel{0}+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad p(n)$$

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : \ p(n)\}$

Vogliamo mostrare che $A = \mathbb{N}$.

Utilizziamo il principio di induzione e mostriamo che

1) $0 \in A$

2) se $n \in A$ allora $n+1 \in A$

1) $0 \in A$? vale $p(0)$?

$p(0)$: $\quad 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ VERA!

$\rightarrow 0 \in A$

ipotesi di induzione

2) Supponiamo ora $n \in A$ e deduciamo che $n+1 \in A$

Supponiamo che

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad p(n)$$

mostriamo che

$$0+1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

ora:

$$\underbrace{0+1+2+\dots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

per ipotesi di induzione

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\cdot\frac{(n+2)}{2}$$

VERA! $p(n+1)$

Quindi poiché $0 \in A$

$p(n) \to p(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora $A = \mathbb{N}$

OSS:

1) Il secondo passo della dimostrazione per induzione NON È mostriamo che $p(n)$ è vero $\forall n$, ma è l'implicazione

$$p(n) \Longrightarrow p(n+1)$$

2) Attenzione! può accadere che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ <u>ma</u> $p(0)$ è falsa! e quindi la proposizione

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p(n)$$

<u>non</u> è dimostrata!!

<u>ES</u>: $\forall n \in \mathbb{N} \qquad n(n+1)$ è dispari.

$p(n)$: $n(n+1)$ è dispari

Mostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

Supponiamo che per $n \geq 0$ $n(n+1)$ è dispari e deduciamo che anche

$(n+1)(n+2)$ è dispari

$$(n+1)(n+2) = \underbrace{(n+1)\,n}_{\substack{\text{dispari} \\ \text{per ipotesi di} \\ \text{induzione}}} + \underbrace{2(n+1)}_{\text{pari}} \qquad \underline{\text{dispari}}$$

<u>Tuttavia</u>: $p(0)$ $0 \cdot 1$ è dispari <u>FALSO</u>!!

$p(1)$ $1 \cdot 2 = 2$ è pari

La proposizione proposta è FALSA, poiché invece vale

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ è PARI.

per induzione

1) $p(0)$ $\quad 0 \cdot 1 = 0$ pari

2) $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

supponiamo che $n(n+1)$ sia pari e deduciamo che $(n+1)(n+2)$ è pari:

$$(n+1)(n+2) = \underbrace{n(n+1)}_{\substack{\text{pari} \\ \text{per ipotesi di} \\ \text{induzione}}} + \overbrace{2(n+1)}^{\text{pari}} \qquad \underline{\text{pari}}$$

$\rightarrow$ $p(n+1)$ è vera.

Abbiamo mostrato che:

$A = \{ n \in \mathbb{N} : \quad p(n) \}$

1) $0 \in A$

2) se $n \in A$ allora $n+1 \in A$

$\Rightarrow \quad A = \mathbb{N}.$

3) (Cazzola, cap. 2)

si può utilizzare il principio di induzione anche per dimostrare proposizioni del tipo:

$$\forall n \geq n_0 \, , \; n_0 \in \mathbb{N} \qquad p(n)$$

si dimostrano i due passaggi

1) $P(n_0)$ vera
2) se $n \geq n_0$ $\qquad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

ESEMPIO:

mostrare che $\forall n \geq 3$ la somma degli angoli interni a un poligono di n lati è $(n-2)\pi$

OSS: per $n = 0, 1$ la proprietà non ha senso!

Per $n = 2$  angoli interni $= 0$

La proprietà ha senso per $n \geq 3$

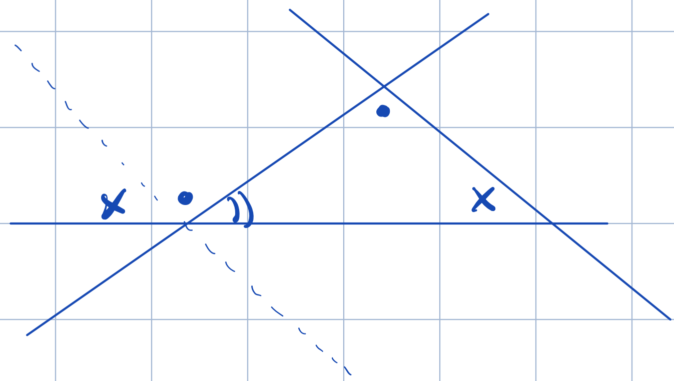
Mostriamo per induzione:

1) $p(3)$ è vera.

2) sia $n \geq 3$, mostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

1) $p(3)$: La somma degli angoli interni di un triangolo è $(3-2)\pi = \pi$

VERA

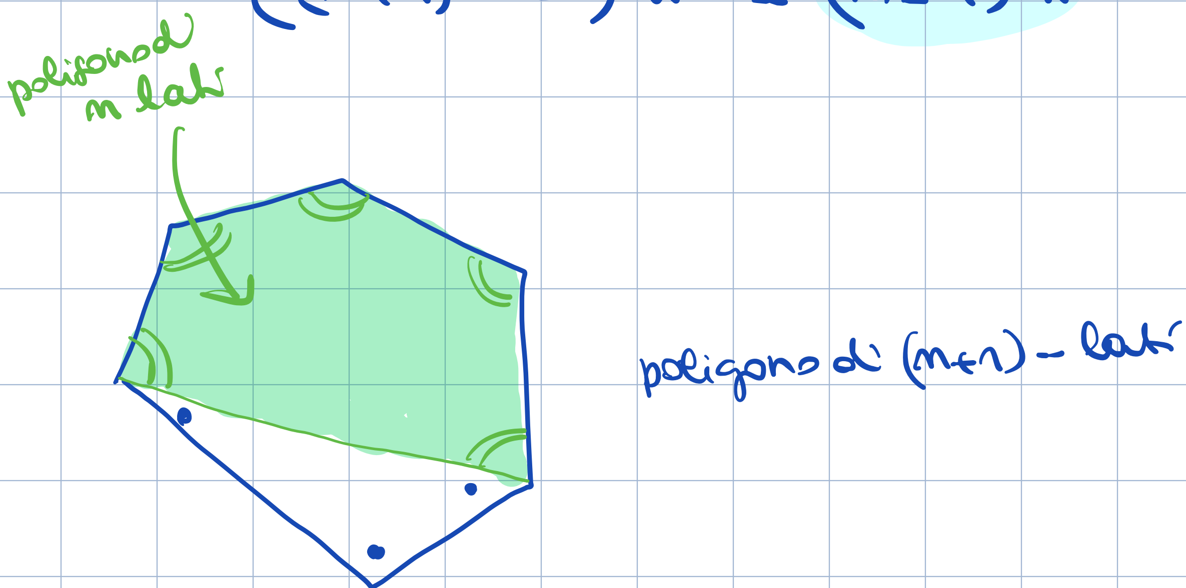


2) Sia $n \geq 3$: mostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

Supponiamo che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati sia $(n-2)\pi$

e deduciamo che la somma degli angoli interni di un poligono di $(n+1)$ lati sia

$$((n+1)-2)\pi = (n-1)\pi$$



La somma degli angoli verdi è $(n-2)\pi$ (per ipotesi di induzione) ; dobbiamo sommare gli angoli interni del triangolo blu e sappiamo che la loro somma è π

$$\Rightarrow \quad (n-2)\pi + \pi = (n-2+1)\pi = (n-1)\pi$$

ESERCIZIO (Luglio 2021)

Mostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2 \qquad \boxed{p(n)}$$

1) Scrivere $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(n+1)$

2) Risolvere l'esercizio.

1) $p(0)$: $\quad 1 = 1$ VERA

$p(1)$: $\quad 1+3 = 2^2$ VERA

$p(2)$: $\quad \underbrace{1+3+5}_{9} = \underbrace{(3)^2}_{9}$ VERA

$(2\cdot 2+1)$

$p(n+1)$: $\quad 1+3+5+\dots+2n+1+(2(n+1)+1)$

$$= ((n+1)+1)^2$$

2) <u>Dimostriamo per induzione</u>

$n=0$ $\qquad$ $p(0)$ VERA

sia $n \geq 0$ $\qquad$ mostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

<u>Supponiamo</u> che

$1+3+5+\dots+ 2n+1 = (n+1)^2$ $\qquad$ $p(n)$

e mostriamo che

$$1+3+5+\dots+2n+1+(2(n+1)+1) = ((n+1)+1)^2$$

Infatti:

$$\underbrace{1+3+\dots+(2n+1)}_{(n+1)^2 \text{ ipotesi d'induzione}} + (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2(n+1)+1$$

Mostriamo che $\underbrace{(n+1)^2 + 2(n+1)+1}_{= ((n+1)+1)^2} = (n+2)^2$

(oppure si fanno i conti!!) $\qquad$ OK

$\Rightarrow$ Abbiamo mostrato che

$\forall n \quad p(n)$

(2) Mostrare che $\forall n \geq 4$

$$2^n \geq n^2$$

È del tipo $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$

$n_0 = 4$

$p(n) \qquad 2^n \geq n^2$

(<u>OSS</u>: cosa succede per $n = 0, 1, 2, 3$?

$n=0 \qquad 2^0 \geq 0^2 \qquad 1 \geq 0 \qquad$ <u>sì</u>

$n=1 \qquad 2^1 \overset{?}{\geq} 1^2 \qquad 2 \geq 1 \qquad$ <u>sì</u>

$n=2 \qquad 2^2 \geq 2^2 \qquad$ <u>sì</u>

$n=3 \qquad 2^3 \geq 3^2 \qquad 8 \geq 9 \qquad$ <u>NO</u>)

<u>Per induzione</u>

1) $p(4)$ vera

2) Sia $n \geq 4$: mostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

1) $p(4)$: $\quad 2^4 \geq 4^2 \quad 16 \geq 16$ $\boxed{\text{Sì}}$

2) Sia $n \geq 4$ supponiamo $2^n \geq n^2$
e dimostriamo che $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq n^2 \cdot 2$$

$2^n \geq n^2$ ipotesi di induzione

voglio mostrare che $2n^2 \geq (n+1)^2$

cioè $\quad 2n^2 \geq n^2 + 1 + 2n \iff$

$n^2 - 2n - 1 \geq 0$ $\quad n \in \mathbb{N}$
$n \geq 4$

Risolviamo la disequazione in $\mathbb{R}$

$$x^2 - 2x - 1 \geq 0$$

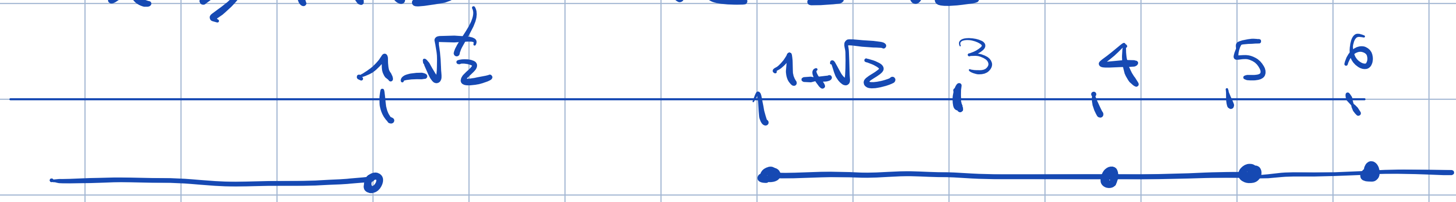
Trovo le radici

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

$x \geq 1 + \sqrt{2}$ $\qquad$ $x \leq 1 - \sqrt{2}$



$n \geq 4$ verifica la disuguaglianza !

CORRISPONDENZE, FUNZIONI, RELAZIONI

(Cazzola, cap 5-6)

Cominciamo con esempi

(1) Descriviamo l'orario di una 1ª PRIMARIA:

A = { giorni della settimana } = { lu, mar, mer, gio, ven, sab, dom }

B = { ita, mate, inglese, storia, motoria, chimica }

lunedì: ita, inglese

martedì: mate

mercoledì: storia, motoria

giovedì: ita, mate

venerdì: ita

Abbiamo costruito delle coppie

(giorno, materia)

(lu, ita), (lu, ingl), (mart, mate),
(merc, storia), (merc, motoria),
(gio, ita), (gio, mate)
(ven, ita)

<u>OSS</u>: Ci sono giorni che non compaiono (sab, dom) e una materia che non compare (chimica)

② $A = \{$ Anna, Bianca, Carlo, Diana $\}$ ← 1 anno
$B = \{$ calcio, danza, nuoto, yoga $\}$

Quali attività fanno i bambini durante la settimana?
(Anna, calcio), (Anna, nuoto)
(Bianca, danza)
(Carlo, danza), (Carlo, nuoto)

Anche in questo caso abbiamo costruito delle <u>coppie</u> (bambino, attività)

C'è un bambino (Diana) che non fa attività e una attività (yoga) che non è fatta da nessuno.
Bianca compare in un'unica coppia mentre Anna e Carlo compaiono in 2 coppie ognuno.

<u>Definizione</u>: Siano X e Y due insiemi di natura qualunque.
Chiamiamo <u>PRODOTTO CARTESIANO di X per Y</u> l'insieme delle <u>coppie ordinate</u>: il primo elemento in X, il secondo in Y e lo denotiamo $X \times Y$, quindi

$$X \times Y = \{ (x,y), x \in X, y \in Y \}$$

si legge
X cartesiano Y

<u>OSS</u>: l'ordine è importante! $X \times Y \neq Y \times X$

<u>ESEMPI</u>:

1. $X = \{$giorni della settimana$\}$
$Y = \{$ita, mate$\}$

$X \times Y = \{ (lu, ita), (lu, mate), (mar, ita), (mar, mate),$
$(merc, ita), (merc, mate), (giov, ita), (giov, mate),$
$(ven, ita), (ven, mate), (sab, ita), (sab, mate),$
$(dom, ita), (dom, mate) \}$

<u>OSS</u>: se X ha n elementi $\quad n \geq 1$
$\qquad Y$ ha m elementi $\quad m \geq 1$

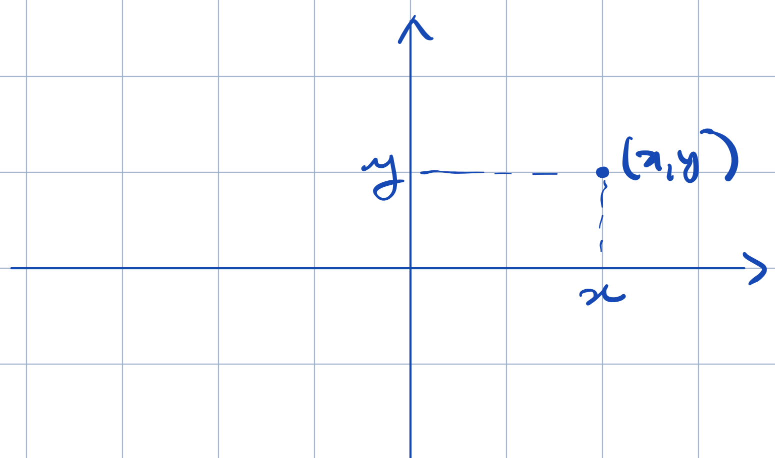
$X \times Y$ ha $n \times m$ elementi

② $X = \mathbb{N}$ $\qquad X \times Y = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$
$Y = \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (n, m), \; n, m \in \mathbb{N} \}$

③ $X = \mathbb{R}$ $\qquad X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$Y = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y), \; x, y \in \mathbb{R} \}$



piano cartesiano

Definizione: Dati X e Y insiemi di natura qualsiasi chiameremo **CORRISPONDENZA DA X A Y** ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

La indicheremo $\mathcal{C} \subseteq X \times Y$.

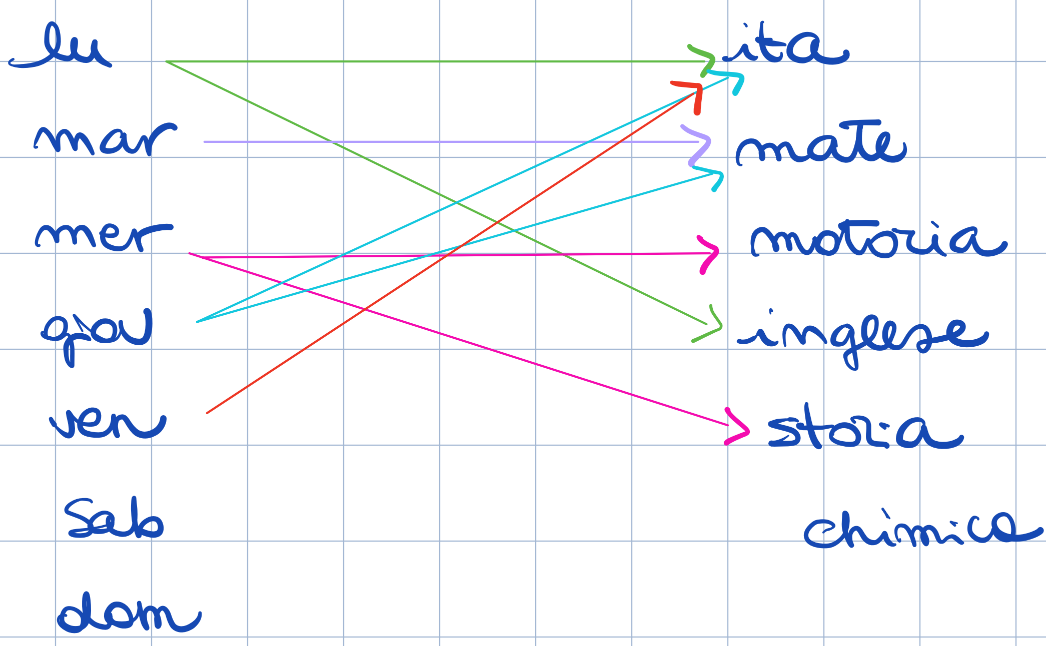
Se $(x,y) \in \mathcal{C}$ diremo che a x corrisponde y.

ESEMPI: Gli esempi iniziali sono corrispondenze

Come si possono rappresentare delle corrispondenze?

1) Enumerare tutte le coppie della corrispondenza (se l'insieme è finito !!)
oppure scrivendo l'insieme tramite la proprietà che caratterizza la corrispondenza.

2) <u>Diagramma sagittale</u>



3) <u>Diagramma a doppia entrata</u>

	ita	mate	storia	motoria	ingl.	chim
lu	x				x	
mar		x				
mer			x	x		
giov	x	x				
ven	x					
sab						
dom						

<u>OSS:</u> Se gli insiemi X, Y sono infiniti non è sempre possibile rappresentare la

corrispondenza mediante diagrammi.

Si può fare quando la corrispondenza è un insieme finito.

<u>ES</u>: $X = Y = \mathbb{N}$

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}^2 \qquad \mathcal{C} = \{(1,2), (1,3), (3,4), (5,6)\}$

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 2 \\
1 & \longrightarrow & 3 \\
3 & \longrightarrow & 4 \\
5 & \longrightarrow & 6
\end{array}
$$

<u>ES</u>: in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\mathcal{C} = \{(n,m)\ ,\ n,m \in \mathbb{N}$ tali che $m = 2n\}$

$\mathcal{C}$ è <u>infinito</u>, non si può rappresentare con diagrammi.

<u>OSS</u>: In una corrispondenza da X e Y è possibile che ci siano elementi $x \in X$ a cui <u>non corrispondano</u> elementi in Y ed elementi $x \in X$ a cui corrispondano <u>vari</u>

elementi in Y.

<u>Definizione</u>: Dati X e Y insiemi di natura qualsiasi, chiamiamo <u>FUNZIONE da X a Y</u> ogni corrispondenza $\mathcal{C}$ da X a Y tale che

1) $\forall x \in X \quad \exists\, y \in Y$ con $(x,y) \in \mathcal{C}$
2) $\forall x \in X$ esiste <u>al più</u> $y \in Y$ con $(x,y) \in \mathcal{C}$

1) + 2) $\quad \forall x \in X \quad \exists!\, y \in Y$ con $(x,y) \in \mathcal{C}$

<u>OSS</u>: 1) I primi due esempi fatti
(A = giorni, B = materie
A = bambini, B = attività)
<u>non sono funzioni</u> !!

2) $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\mathcal{C} = \{(n, 2n), \quad n \in \mathbb{N}\}$
è una funzione

Notazione: una funzione da X a Y

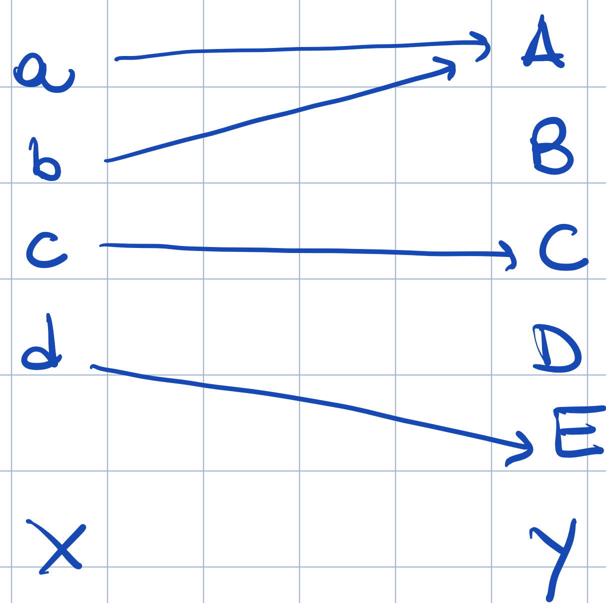
↳ si indica

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$y = f(x)$$

ESEMPI:

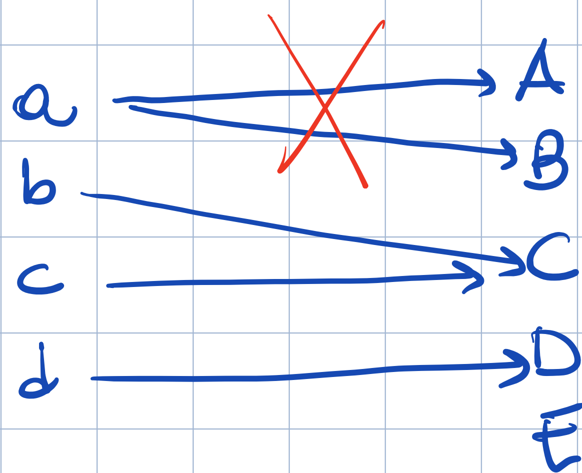
$X = \{a, b, c, d\}$ $Y = \{A, B, C, D, E\}$

1



è una funzione!!

2



NON È UNA FUNZIONE