Sulle funzioni: $f: X \longrightarrow Y$ $X, Y$ insiemi

- funzione iniettiva:

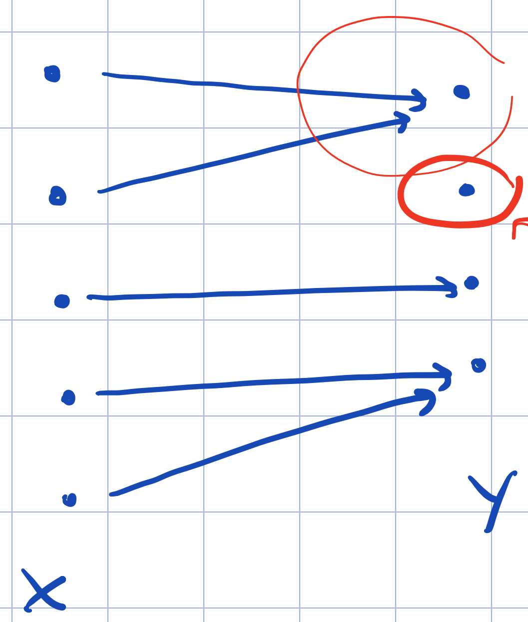
  $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$

- funzione suriettiva:

  $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ tale che $y = f(x)$

- funzione biunivoca: iniettiva + suriettiva

ESEMPI:

① 



è una funzione

1) è iniettiva? NO

ci sono elementi diversi che hanno la stessa immagine in Y

2) è suriettiva? NO $\exists y \in Y$ tale che $\nexists x \in X$ con $y = f(x)$

② $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(n) = 2n$

è una funzione

1) è iniettiva? sì se $n_1 \neq n_2$ $f(n_1) \neq f(n_2)$

2) è suriettiva? NO ad esempio se $y=3$
$\nexists\, n \in \mathbb{N}: \quad f(n)=3.$

<u>OSS</u>: Se $f: X \to Y$ $X, Y$ <u>insiemi finiti</u> è biunivoca, allora $X$ e $Y$ hanno lo stesso numero di elementi. (è una corrispondenza 1 a 1, cioè

$\forall x \in X \quad \exists!\, y \in Y$ con $y=f(x)$
(def. di funzione) e
$\forall y \in Y \quad \exists!\, x \in X$ con $y=f(x)$
(proprietà iniettiva + suriettiva)

<u>Definizione</u>: Dato $X$ un insieme di natura qualunque, chiamiamo <u>RELAZIONE su X</u> ogni corrispondenza da $X$ a $X$.
Indichiamo una relazione con $R$, quindi $R \subseteq X \times X$ e se $(x,y) \in R$ scriviamo $xRy$.

<u>ESEMPI</u>:
① $X = \{1,2,3,4,5,6\}$
Definiamo $R$ su $X$ nel modo seguente:

$xRy$ $\underbrace{\text{per definizione se}}_{:=}$ $x$ è divisibile per $y$

$:=$ notazione

$1R1$

$2R1 \quad 2R2$

$3R1 \quad 3R3$

$4R1 \quad 4R2 \quad 4R4$

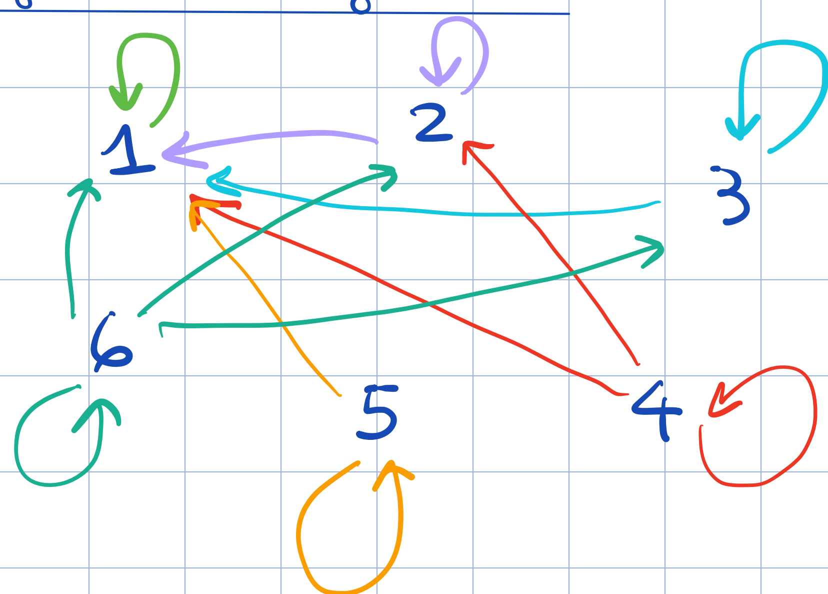
$5R1 \quad 5R5$

$6R1 \quad 6R2 \quad 6R3 \quad 6R6$

oppure

$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\} \subseteq X \times X$

diagramma sagittale:



Se $xRx$  LOOP

se $xRy$ 

diagramma a doppia entrata

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | | | | | |
| 2 | X | X | | | | |
| 3 | X | | X | | | |
| 4 | X | X | | X | | |
| 5 | X | | | | X | |
| 6 | X | X | X | | | X |

diagonale principale

PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI

- riflessiva
- simmetrica
- antisimmetrica
- transitiva

Definizione: Una relazione $R$ su $X$ si dice RIFLESSIVA se $\forall x \in X$ si ha $xRx$.

ESEMPI:

1) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$

$xRy$ se $x$ è divisibile per $y$ è riflessiva.

2) $A = \{a,b,c\}$

$X = \mathcal{P}(A) = \{$ sottoinsiemi di $A\} =$

$= \{A, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

Siano $W, Z \in \mathcal{P}(A)$

definiamo $WRZ$ se $W \subseteq Z$, cioè

$\forall w \in W$ si ha $w \in Z$

$\forall W \in \mathcal{P}(A)$ si ha $W \subseteq W$, quindi è una relazione riflessiva

$R = \{(A,A), (\phi,\phi), (\phi,A), (\phi,\{a\}), (\phi,\{b\}), (\phi,\{c\}), (\phi,\{a,b\}), (\phi,\{a,c\}), (\phi,\{b,c\}), (\{a\},\{a\}), (\{a\},\{a,b\}), (\{a\},\{a,c\}), (\{a\},A), \ldots$ finire $\}$

3) $X = \{a, b, c\}$

$R = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a)\}$

non è riflessiva! $(c,c) \notin R$.

4) $X = \{\text{regioni di Italia}\}$

Siano $x, y \in X$; definiamo $xRy$ se

$x$ confina con $y$, cioè $x$ ha una parte

di frontiera comune con $y$.

$R$ è riflessiva: ogni regione confina con se stessa.

<u>Definizione</u>: Una relazione $R$ su un insieme $X$

si dice <u>SIMMETRICA</u> se

$\forall x, y \in X$ si ha $xRy \Leftrightarrow yRx$

<u>Attenzione</u>! Presi due elementi $x, y \in X$ ci

sono due possibilità

- $x \not R y$ (cioè $(x,y) \notin R$)
- $xRy$ e $yRx$

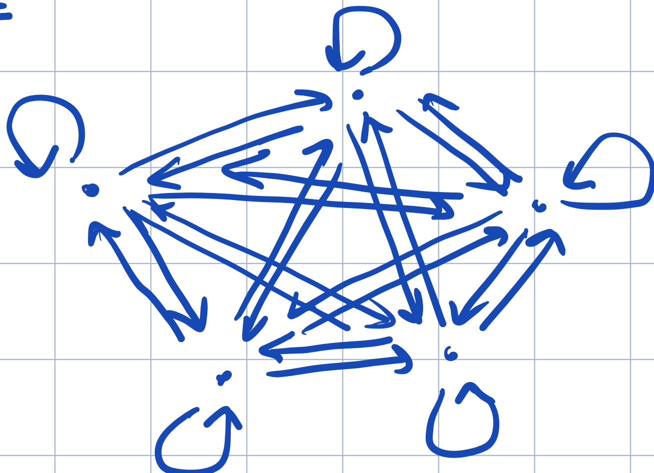
cioè nel diagramma sagittale

$x \rightleftarrows y$

Non ci possono essere frecce singole fra elementi diversi. Se c'è una freccia, c'è anche la sua opposta!!

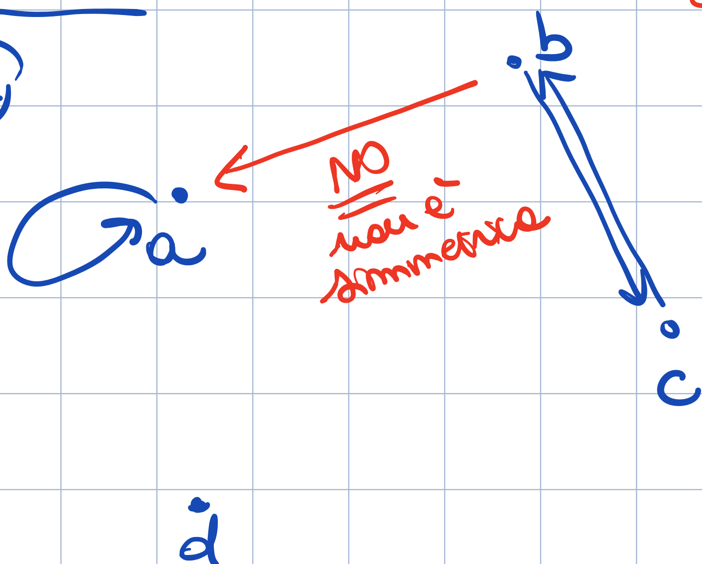
**IMPORTANTE!**

La definizione di relazione simmetrica **NON È**: $\forall\, x, y \in X$ si ha $xRy$ e $yRx$



**ESEMPI:**

(1)




Attenzione! La relazione in cui è compresa la freccia rossa NON è simmetrica.

Non è riflessiva $(b,b) \notin R$

è simmetrica!! $(b,c)$, $(c,b)$

e non ci sono altre frecce fra elementi diversi.

OSS: È la relazione che è simmetrica o non simmetrica! Non è corretto dire che esistono elementi simmetrici (nel diagramma precedente b e c) ed elementi non simmetrici (a e b)

(2) $X = \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$z, w \in \mathcal{P}(A)$

$wRz$ se $w \subseteq z$

È simmetrica? NO $\{a\} R \{a,b\}$ ma $\{a,b\} \not R \{a\}$

(3) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$

$xRy$ se $x$ è divisibile per $y$

Non è simmetrica: $2R1$ ma $1 \not R 2$

(4) $X = \{\text{regioni di Italia}\}$

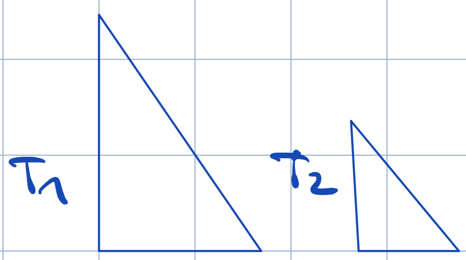
$xRy$ se $x$ confina con $y$

è simmetrica! $xRy \Leftrightarrow yRx$

⑤ $X = \{ \text{Triangoli} \}$

Dati $T_1, T_2 \in X$ definiamo la relazione $R$ seguente: $T_1 R T_2$ se $T_1$ è <u>SIMILE</u> a $T_2$

(cioè $T_1$ e $T_2$ hanno gli stessi angoli interni)




$R$ è riflessiva: $\forall T \in X \quad TRT$

$R$ è simmetrica: $T_1 R T_2 \iff T_2 R T_1$

In un diagramma a doppia entrata

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | · | | x | |
| b | | · | | |
| c | x | | · | |
| d | | | | · |

Se compare una x in un punto fuori dalla diagonale principale, deve comparire anche il simmetrico rispetto alla diagonale.

<u>**Definizione:**</u> Diremo che una relazione $R$ su $X$ è <u>ANTISIMMETRICA</u> se

$\forall x, y \in X$ se $xRy$ e $yRx$ allora $x = y$

<u>**OSS:**</u> Nel diagramma sagittale non ci possono essere doppie frecce fra elementi <u>diversi</u>: ci possono essere solo loop


<u>**ESEMPI!**</u>

(1) $A = \{a, b, c\}$

$X = \mathcal{P}(A)$

$z, w \in X \qquad wRz$ se $w \subseteq z$.

Sappiamo che $R$ è riflessiva, $R$ non è simmetrica.

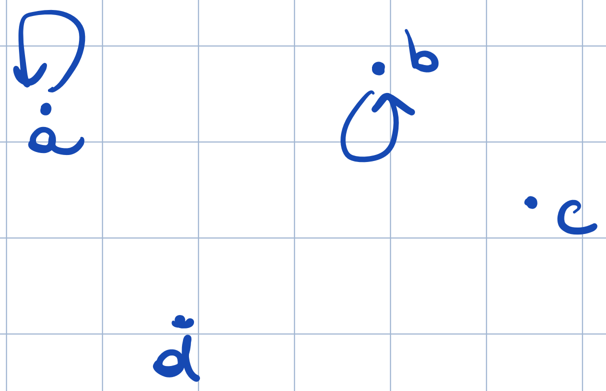
È antisimmetrica?

Se $wRz$ e $zRw \Rightarrow w = z$ ? $\boxed{\text{SI}}$ !!

$w \subseteq z$ e $z \subseteq w \Rightarrow w = z$

è antisimmetrica.

**OSS:** Esistono relazioni sia simmetriche che antisimmetriche: sono sottoinsiemi della relazione identica che $\forall x \in X \; xRx$.




$X = \{a, b, c, d\}$

è sia simmetrica che antisimmetrica.
Non è riflessiva.

**Attenzione!** Nei temi d'esame non dare mai per sottointeso che se una relazione è simmetrica allora non è antisimmetrica (e viceversa)!!

**Definizione:** Diremo che una relazione $R$ su $X$ è **TRANSITIVA** se
$\forall x, y, z \in X$ tali che $xRy$ e $yRz$ allora
$$xRz$$

**OSS:** Nel diagramma sagittale si ha la situazione seguente

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & z & \end{tikzcd}$$

## ESEMPI:

① $X = \{\text{Triangoli}\}$

$T_1 R T_2$ se $T_1$ è simile a $T_2$

R è riflessiva e simmetrica.

È transitiva? $\boxed{\text{Sì}}$

se $T_1$ è simile a $T_2$ e $T_2$ è simile a $T_3$, allora $T_1$ è simile a $T_3$.

② $X = \{\text{regioni d'Italia}\}$

$xRy$ se $x$ confina con $y$.

R è riflessiva, simmetrica ma non è transitiva!!

mostriamo che $\exists\, x,y,z \in X$ tali che $xRy$, $yRz$ ma $x \not R z$

$x$ Piemonte

$y$ Lombardia

$z$ Veneto

## Nel diagramma a doppia entrata

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | | x | x | |
| b | | | x | |
| c | | | | |
| d | | | | |

$aRb$
$bRc$
$\to aRc$

**Definizione**: Chiameremo **RELAZIONE DI EQUIVALENZA su X** ogni relazione $R$ su $X$

- riflessiva
- simmetrica
- transitiva

**Definizione**: Chiameremo **RELAZIONE DI ORDINE su X** ogni relazione $R$ su $X$

- riflessiva
- antisimmetrica
- transitiva.

**ESEMPI:**

(1) $X = \{\text{Triangoli}\}$

$T_1 R T_2$ se $T_1$ è simile a $T_2$

R è una relazione di equivalenza!!

(2) $X = \mathcal{P}(A)$   A insieme qualunque

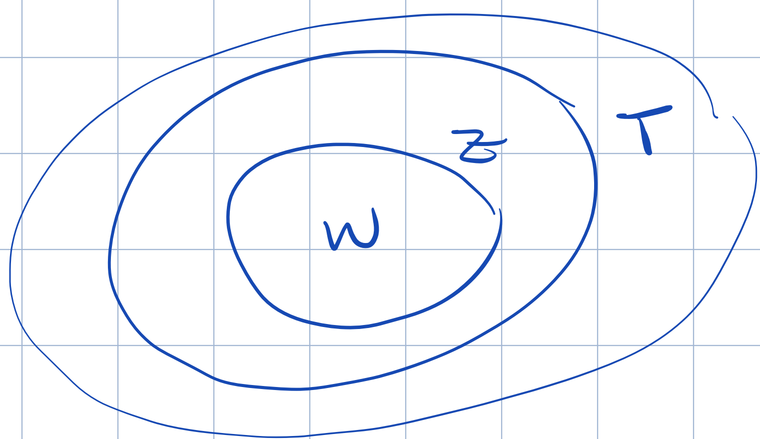
$W R Z$ se $W \subseteq Z$

R è una relazione d'ordine!

R è riflessiva, antisimmetrica e transitiva:

infatti se $W R Z$ e $Z R T$ allora

$W R T$




(3)

Ricordo che

TEOREMA (Divisione euclidea)

Dati $a, b \in \mathbb{N}$ con $b \neq 0$ esistono e sono univocamente determinati $q, r \in \mathbb{N}$ tali che $a = q \cdot b + r$

e $0 \leq r \leq b-1$

(Non lo dimostriamo, ma andrebbe dimostrato!)

ESEMPIO.

$a = 25$

$b = 3$

$$25 = \underbrace{8}_{q} \cdot 3 + \underbrace{1}_{r}$$

$\left( = 7 \cdot 3 + 4 \right.$ l'unicità si ha perché si assume $0 \le r \le b-1$ )

Consideriamo ora la relazione $R$ su $\mathbb{N}$ definita come segue:

$n_1 R n_2$ se dividendo $n_1$ e $n_2$ per 5 si ottiene lo stesso resto.

$n_1 = 0$ $\quad 0 = 0 \cdot 5 + 0$

$n_2 = 5$ $\quad 5 = 1 \cdot 5 + 0$

$n_3 = 10$ $\quad 10 = 2 \cdot 5 + 0$

$0R5$, $0R10$, $0R15$, $0R0$

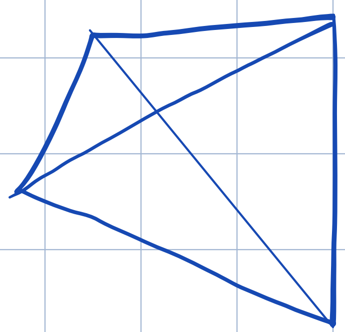
$1R1$, $1R6$, $1R11$ ...

$R$ è riflessiva, simmetrica, transitiva: è una relazione di equivalenza!!

# ESERCIZI SULL' INDUZIONE

$\boxed{\text{Es. 8}}$ Un poligono di $n$ lati ha esattamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali per $n \geq 4$

1) $p(4)$ un poligono con 4 lati ha 2 diagonali



OK

2) Sia $n \geq 4$ mostriamo che

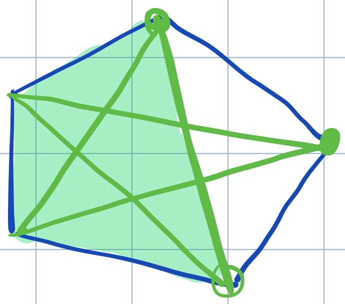
$$p(n) \Longrightarrow p(n+1)$$

Supponiamo che un poligono di $n$ lati abbia $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali e deduciamo che un poligono di $(n+1)$ lati ha

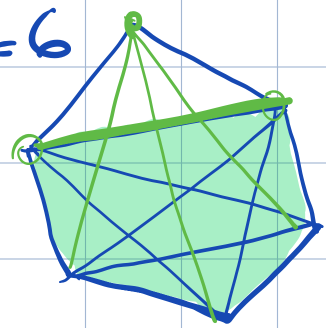
$$\frac{(n+1)((n+1)-3)}{2} \text{ diagonali}$$

$$= \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

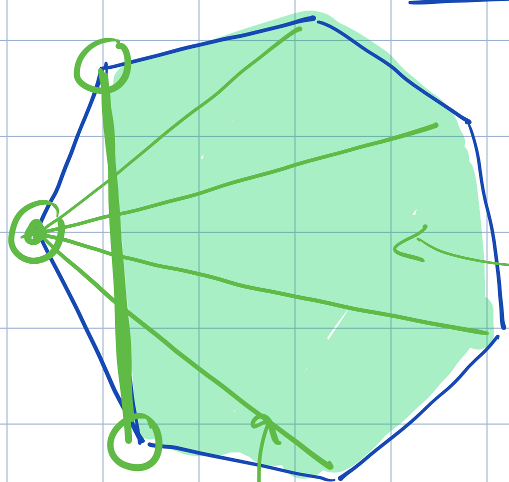
$n=5$



$n=6$



$\underline{n+1}$ lati



ho $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali

$(n+1)-3+1$

$$\frac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \frac{n^2-3n+2n-2}{2} =$$

$$= \frac{n^2-n-2}{2} \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

$$\frac{n^2+n-2n-2}{2} =$$

$$= \frac{n^2-n-2}{2} \quad \boxed{\text{Sì}}$$

**Es. 9** $\forall n \geq 1$ $\quad 4^n - 1$ è divisibile per 3

1) $n=1$ $\quad 4-1=3$ è divisibile per 3 <u>ok</u>

2) Sia $n\geq 1$ mostriamo che $p(n)\Rightarrow p(n+1)$

cioè supponendo che $4^n-1$ sia divisibile per 3, deduciamo che $4^{n+1}-1$ è divisibile per 3.

$$\frac{4^{n+1}-1}{3}\in\mathbb{N}\ ? \iff \exists k\in\mathbb{N}:$$

$$4^{n+1}-1=3k\ ?$$

$$4^{n+1}=4^n\cdot 4$$

$$4^{n+1}-1=4\cdot 4^n-1=4(4^n-1)+4-1=$$

$$=4\cdot\underbrace{(4^n-1)}_{\text{per ipotesi di induzione è divisibile per 3}}+\underbrace{3}_{\text{è divisibile per 3}}$$

$\rightarrow$ è divisibile per 3 !

$\boxed{\text{Es. 7}}$ $\quad\forall q\in\mathbb{R},\ q\neq 1$ e $\forall n\in\mathbb{N}$ si ha

$$1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\qquad p(n)$$

OSS: se $q=1$ l'uguaglianza perde significato perché il termine a destra diventa $\frac{0}{0}$

Sia quindi $q \neq 1$ fissato

Dimostriamo per induzione

1) se $n=0$

$p(0) \qquad 1 = \frac{1-q}{1-q}$ VERA

2) ora se $n \geq 0$ mostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, cioè supponiamo che

$$\underbrace{1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{p(n)}$$

e deduciamo che

$$\underbrace{1+q+q^2+\dots+q^n}+q^{n+1} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

uso l'ipotesi di induzione

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} =$$

$$= \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad \text{OK}$$