Ricordo che

Definizione: Una relazione R su un insieme X si dice DI EQUIVALENZA se verifica le tre proprietà

1) riflessiva: $\forall x \in X$ si ha xRx
2) simmetrica: $xRy \Leftrightarrow yRx \quad \forall x, y \in X$
3) transitiva: se xRy e yRz allora $xRz \quad \forall x, y, z \in X$

OSS: $\forall x \in X$ si ha almeno xRx

Definizione: Data una relazione R di equivalenza su $X \neq \phi$, X insieme e dato $x \in X$ chiamiamo CLASSE DI EQUIVALENZA di x rispetto alla relazione R e la denotiamo con $[x]$ il sottoinsieme di X così definito:

$$[x] = \{ y \in X : xRy \}$$

OSS: $x \in [x]$ (perché R è riflessiva!)

ESEMPI:

① $X = \{ \text{triangoli} \}$

$T_1 R T_2$ se T_1 è simile a T_2

Dato $T \in X$ $[T] = \{ x \in X : x \text{ è simile a } T \}$

② $X = \mathbb{N}$

$n_1 R n_2$ se dividendo n_1 e n_2 per 5 si ottiene lo stesso resto

Sia $n \in \mathbb{N}$; sappiamo che $\exists!\, q \in \mathbb{N}$, $\exists!\, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 4$ tali che

$n = q \cdot 5 + r$

$[r] = \{ m \in \mathbb{N} : m = l \cdot 5 + r \quad l \in \mathbb{N} \}$

$[0] = \{ m \in \mathbb{N} : m = l5, \quad l \in \mathbb{N} \}$
$= \{ 0, 5, 10, 15, \dots \}$

$[1] = \{ m \in \mathbb{N} : m = l \cdot 5 + 1, \quad l \in \mathbb{N} \}$

$= \{1, 6, 11, 16, \dots\}$

$[2] = \{ m \in \mathbb{N} : m = l \cdot 5 + 2, \ l \in \mathbb{N} \}$
$= \{2, 7, 12, 17, \dots\}$

$[3] = \{ m \in \mathbb{N} : m = l \cdot 5 + 3, \ l \in \mathbb{N} \}$
$[4] = \{ m \in \mathbb{N} : m = l \cdot 5 + 4, \ l \in \mathbb{N} \}$
$[5] = \{ m \in \mathbb{N} : m = l \cdot 5, \ l \in \mathbb{N} \} =$
$= [0]$

OSS: Esistono solo un numero finito di classi di equivalenza!

ESERCIZIO: inventare una relazione di equivalenza

(3) su $X = \{$ studenti / studentesse di SFP iscritti nell' a.a. 2023/2024 $\}$

→ sarebbe da precisare! "quanto" tempo?

a) $x R y$ se x e y portano gli occhiali per un certo tempo nelle 24 ore

ho 2 classi di equivalenza
{ studenti/esse con gli occhiali }
{ ——— senza occhiali }

Cosa vuol dire "certo"? Anche 0 minuti è un certo tempo → c'è 1 sola classe di equivalenza?

b) xRy se x e y prendono lo stesso
tipo di mezzo di trasporto
per arrivare in università

è ben definita? se prendo il treno per arrivare a BG e poi finisco a piedi sono arrivata in treno oppure sono arrivata a piedi? Bisogna essere più precisi nella definizione della relazione!!

a) e b) non sono esempi rigorosi

3) xRy se x e y frequentano
le lezioni per la stessa
percentuale di tempo

da precisare!

Ad esempio divido il tempo in 3 parti

0% : gruppo 1

$0\% < t < 75\%$ gruppo 2

$t \geq 75\%$ gruppo 3

xRy se x, y appartengono allo stesso gruppo.

$\to$ 3 classi di equivalenza.

4) xRy se a) x e y non hanno passato esami

oppure

b) x ha superato almeno un esame in comune con y

non è transitiva! NON È DI EQUIV

b') x ha superato lo stesso esame di y È DI EQUIV.

Quante classi di equivalenza ci sono?

$[x] = \{ x$ non ha superato esami $\}$

e tante classi quanti esami in SFP.

Proposizione: Data una relazione di equivalenza R su un insieme $X \neq \phi$ e dati $x, y \in X$, consideriamo $[x]$ e $[y]$. Si hanno solo due possibilità

1) $[x] \cap [y] = \phi$

2) $[x] = [y]$

dim: ESERCIZIO

idea: supponiamo che $[x] \cap [y] \neq \phi$

e dimostriamo che allora $[x]=[y]$

cioè che $[x] \subseteq [y]$ e

$[y] \subseteq [x]$

L'ipotesi $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ significa che

$\exists z \in X$ tale che $z \in [x] \cap [y]$ cioè

xRz e yRz

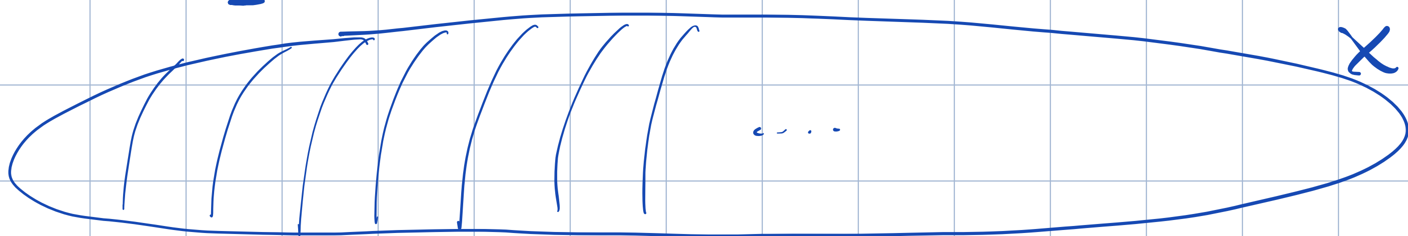
<u>Suggerimento</u>: mostrare come prima cosa che $x \in [y]$ e $y \in [x]$.

<u>OSS</u>: se R è una relazione di equivalenza su X, allora X si suddivide in sottoinsiemi disgiunti: le classi di equivalenza

<u>ES</u>:

1. $X = \{\text{triangoli}\}$

$T_1 R T_2$ se T_1 è simile a T_2



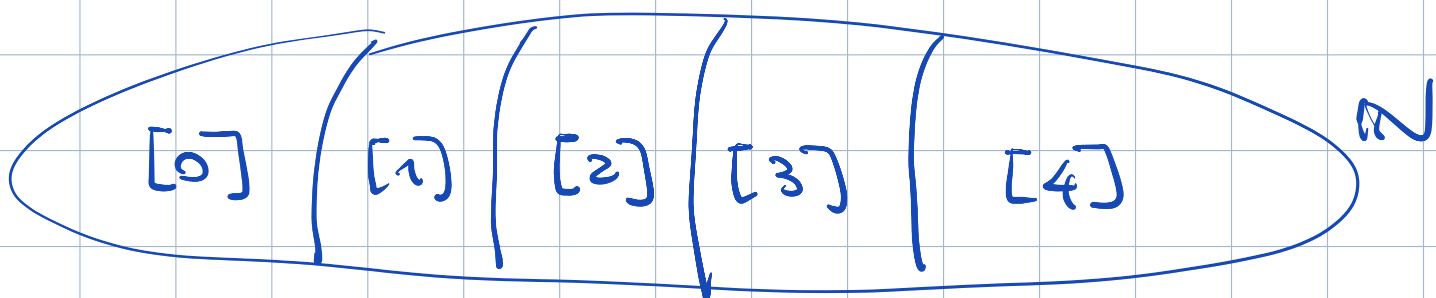
ogni classe di equivalenza è caratterizzata dai 3 angoli interni dei triangoli simili che ne fanno parte

$\rightarrow$ X è suddiviso nell'unione di INFINITE classi di equivalenza disgiunte

(2) $X = \mathbb{N}$

$n_1 R n_2$ se dividendo n_1 e n_2 per 5 ottengo lo stesso resto

Esistono solo 5 classi di equivalenza diverse: $[0], [1], [2], [3], [4]$



$\mathbb{N}$ si decompone nell'unione di un numero finito di classi di equivalenza (che si chiamano CLASSI DI RESTI MODULO (5)

può cambiare

Definizione: Una relazione R su un insieme X si dice **RELAZIONE D'ORDINE** se soddisfa le 3 proprietà seguenti

1) riflessiva: $\forall x \in X$ si ha xRx

2) antisimmetrica: se xRy e yRx allora $x = y$ $\quad \forall x, y \in X$

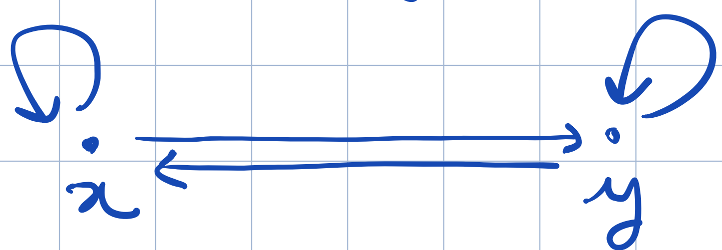
3) transitiva: se xRy e yRz allora xRz $\quad \forall x, y, z \in X$

OSS: Anche in una relazione d'ordine $\forall x \in X$ almeno xRx.

OSS (sulla transitività)

se xRy e yRx e R è transitiva allora xRx !!

e anche yRy !!



Quindi se si ha la situazione seguente

$$x \rightleftarrows y$$

senza i loop (anche solo uno dei due) allora R non è transitiva!!

ESEMPI:

1) sia A un insieme e sia

$X = \mathcal{P}(A)$

dati $Z, W \in \mathcal{P}(A)$ (cioè $Z \subseteq A$, $W \subseteq A$)

definiamo $Z R W$ se $Z \subseteq W$

È una relazione d'ordine!

Infatti 1) è riflessiva: $\forall Z \in \mathcal{P}(A)$
$Z \subseteq Z$

2) è antisimmetrica:
se $Z \subseteq W$ e $W \subseteq Z \Longrightarrow$
$Z = W$.

3) è transitiva: se $Z \subseteq W$ e
$W \subseteq V$ allora $Z \subseteq V$.

② IMPORTANTE (Cazzola pag. 57)

Sia $X = \mathbb{N}$ e siano $n, m \in \mathbb{N}$.
Diciamo che $n R m$ se $\exists h \in \mathbb{N}$ tale che $m = n + h$

Mostriamo che R è una relazione d'ordine. Scriveremo piuttosto

$$n \leq m.$$

1) riflessiva? Sia $n \in \mathbb{N}$

$n \leq n$? sì, poiché

$$n = n + 0$$

2) antisimmetrica? Siano $n, m \in \mathbb{N}$

e supponiamo che $\odot \begin{cases} n \leq m & \text{e} \\ m \leq n ; \end{cases}$

dimostriamo che allora $n = m$

si ha per $\odot$

$\exists h \in \mathbb{N}$ tale che $m = n + h$

$\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $n = m + k$

ma allora $m = (m + k) + h \overset{\text{associatività}}{=} m + (k + h)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{legge di cancellazione della somma}}}{\Longrightarrow} \quad 0 = k + h$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{legge di annullamento}}}{\Longrightarrow} \quad k = h = 0$$

ma allora $\quad m = n$.

3) <u>Transitiva</u>: Siano $\underbrace{m, n, p \in \mathbb{N}}$ tali che $n \leq m$ e $m \leq p$ $\#$;

mostriamo che $n \leq p$.

per $\#$: $\quad \exists\, h \in \mathbb{N}: \quad m = n + h$

$\qquad\quad\ \exists\, k \in \mathbb{N}: \quad p = m + k$

Da cui $\quad p = (n+h) + k =$

$\qquad\qquad = n + (h + k)$

cioè $\quad n \leq p$

<u>Oss</u>: $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $0 \leq n$

(Infatti: $n = 0 + n$)

<u>ESERCIZIO</u>. Sia $X = \mathbb{N}$ e definiamo la relazione seguente:
$n R m$ se $\exists h \in \mathbb{N}$, $h \neq 0$ tale che $m = n + h$

È una relazione d'ordine?
Denoteremo questa relazione
$n < m$

(NON È D'ORDINE! non è riflessiva)

<u>OSS</u>: La relazione $\subseteq$ tra sottoinsiemi di uno stesso insieme e la relazione $\leq$ in $\mathbb{N}$ sono entrambe d'ordine ma sono diverse!

<u>Si dimostra che</u> (non lo facciamo)
$\forall n, m \in \mathbb{N}$ si ha $n \leq m$ oppure $m \leq n$

<u>invece</u> se A è un insieme con

almeno 2 elementi e $X = \mathcal{P}(A)$
dati $Z, W \in \mathcal{P}(A)$ <u>non è detto</u>
che $Z \subseteq W$ oppure $W \subseteq Z$

<u>Es</u>: $A = \{a, b\}$
$X = \mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$Z = \{a\}$ $\qquad$ $Z \nsubseteq W$ e $W \nsubseteq Z$
$W = \{b\}$

$\leq$ è una relazione d'ordine TOTALE
$\subseteq$ è una relazione d'ordine PARZIALE

<u>ESERCIZI</u> (Foglio 3: Relazioni)

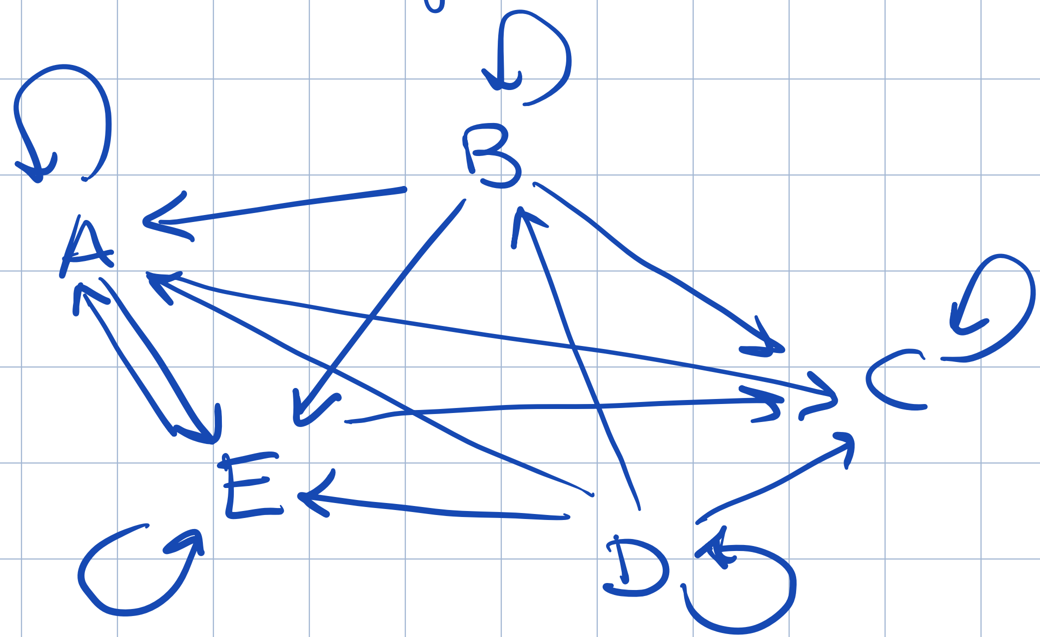
$\boxed{\text{Es. 1}}$ (Settembre 2021)

$X = \{$ Andrea, Barbara, Carlo, Daniela, Enzo $\}$

A: 180 cm
B: 172 cm
C: 182 cm
D: 170 cm

E: 180 cm

Definiamo la relazione R su X come segue: xRy se l'altezza di x e' minore o uguale all'altezza di y.



FINIRE