Ricordo che settimana prossima (lunedì 25/3) NON C'È LEZIONE

ESERCIZI SULLE RELAZIONI

Es. 1

$X = \{A, B, C, D, E\}$

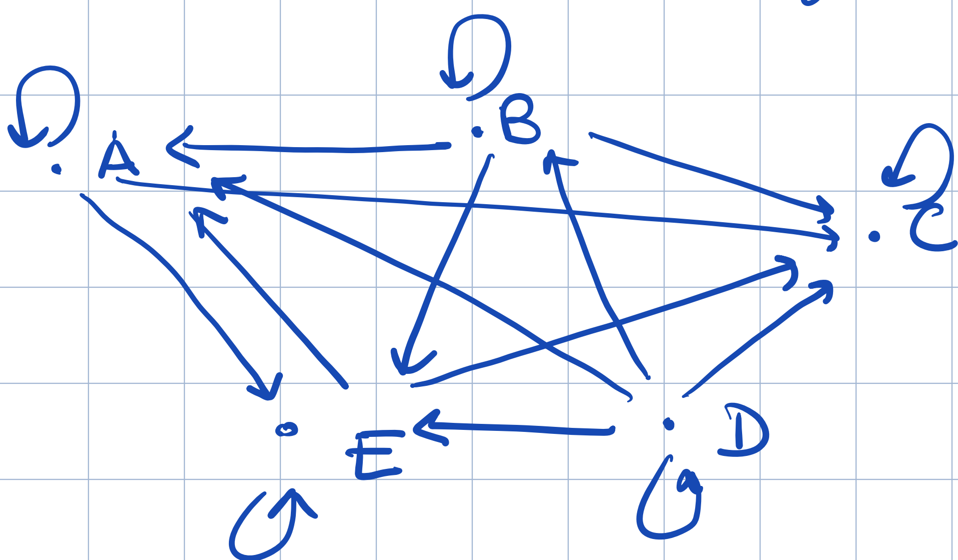
A, E : 180 cm

B: 172 cm

C : 182 cm

D: 170 cm

xRy se altezza di x è $\leq$ altezza di y



	A	B	C	D	E
A	X		X		X
B	X	X	X		X
C			X		
D	X	X	X	X	X
E	X		X		X

R è riflessiva $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in X$ si ha xRx

<u>R è riflessiva</u> (per ogni elemento è presente un loop nel diagramma sagittale e per ogni elemento della diagonale principale c'è una x)

R è simmetrica $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $xRy \Leftrightarrow yRx \quad \forall x,y \in X$

R non è simmetrica perché, ad esempio DRC ma $C \not R D$

R è antisimmetrica $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ xRy e $yRx \Rightarrow x=y$

R non è antisimmetrica perché ARE, ERA ma $A \neq E$.

R è transitiva. $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x,y,z \in X$ se xRy e yRz allora xRz

R è transitiva perché se l'altezza di x è $\leq$ altezza di y

e altezza di y è $\leq$ altezza di z

allora l'altezza di x $\leq$ altezza di z.

- R non è di equivalenza perché non è simmetrica
- R non è di ordine perché non è antisimmetrica.

OSS. IMP: Bisogna sempre GIUSTIFICARE!!

$\boxed{\text{Es. 4}}$ (Luglio 2022)

$X = \{$ studenti iscritti a SFP $\}$

xRy se il numero di matricola di x ha una cifra in comune con il numero di matricola di y

- R è riflessiva? sì: il numero di matricola $\forall x \in X$ ha tutte le cifre in comune con se stesso.

- R è simmetrica? sì se $x, y \in X$
  $xRy \Leftrightarrow yRx$ (hanno una cifra in comune)

• R è antisimmetrica? <u>NO</u>

Se due studenti/esse hanno una cifra in comune non sono per forza la stessa persona!

• R è transitiva? NO:

se xRy significa che x e y hanno in comune una cifra

yRz y e z hanno in comune una cifra

<u>ma non è detto</u> che la cifra sia la stessa

<u>p.es</u> (CHE NON È REALE)

x	2057	xRy
y	2186	yRz
z	1349	$x \not R z$

(ma i numeri non sono reali di matricola perché <u>attualmente</u> tutti i numeri iniziano con 1)

Definiamo ora una nuova operazione in $\mathbb{N}$ che <u>NON</u> sarà definita $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$

ma solo in una specifica classe.

Ricordo che: siano $n, m \in \mathbb{N}$
$n \leq m$ se $\exists\, h \in \mathbb{N}$ tale che
$m = n + h$

OSS. IMP: tale h è unico: se infatti per assurdo $\exists\, h_1, h_2$ $h_1 \neq h_2$ tali che

$$m = n + h_1$$
$$m = n + h_2$$

allora $n + h_1 = n + h_2$
e per la legge di cancellazione della somma $h_1 = h_2$ ASSURDO

Definizione: Dati $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $n \leq m$, definiamo sottrazione $m - n$ l'unico numero naturale $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$m = n + h$$

Es: $m = 12$

$n = 7$

$\underset{m}{12} = \underset{n}{7} + \underset{h}{5}$ da cui $5 = 12 - 7$

Quali proprietà della sottrazione sono vere e quali sono false?

1) NON È COMMUTATIVA!

se $n \le m$ in generale non è vero che $m \le n$ (a meno che $m = n$)

e quindi non ha senso (in generale) $n - m$

2) NON È ASSOCIATIVA!

$$(m - n) - p \neq m - (n - p)$$

(spesso non hanno neanche senso entrambe)

Es: $m = 15$, $n = 10$, $p = 5$

$(15-10)-5 = 0$

$15-(10-5) = 15-5 = 10$

3) Esiste un elemento neutro solo a destra

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n-0=n$

(poiché $\quad 0 \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

4) Vale la proprietà <u>INVARIANTIVA</u>:

Se $\quad n \leq m \quad$ e $\quad k \in \mathbb{N} \quad$ allora

$$n+k \leq m+k \quad \text{e}$$

$$m-n = (m+k)-(n+k)$$

(<u>ESERCIZIO</u>: dim)

<u>Ricordo che</u> (divisione euclidea)

$\forall\, a, b \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0,$

$\exists!\, q \in \mathbb{N} \quad \exists!\, r \in \mathbb{N} \quad$ con $\quad 0 \leq r \leq b-1$

tali che

$$a = q \cdot b + r$$

Definizione: Dati $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, diciamo che

b divide a

b è un divisore di a

a è divisibile per b

a è multiplo di b

la divisione di a per b è esatta

se $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tale che

$$a = q \cdot b$$

In questo caso, scriveremo $a : b = q$

OSS: Per l'unicità nella divisione euclidea tale q è unico (vale anche per la legge di cancellazione del prodotto!)

Quali proprietà sono vere o non vere per la divisione esatta?

1) NON È COMMUTATIVA: In generale se $a : b = q$ non ha senso

$b : a$

ES: $10 = 2 \cdot 5$ $\qquad 5 \neq q \cdot 10$, $q \in \mathbb{N}$

2) NON È ASSOCIATIVA:

$$(a : b) : c \neq a : (b : c)$$

(in generale non si possono neanche eseguire tutti!)

$a = 16$ $\qquad (16 : 4) : 2 = 2$
$b = 4$ $\qquad 16 : (4 : 2) = 8$ $\qquad \neq$
$c = 2$

3) Esiste un elemento neutro solo a destra
$a : 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$

4) $\forall a \neq 0$ $\quad a$ è divisibile per a
e $\quad a : a = 1 \qquad (a = 1 \cdot a)$

5) $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad b \neq 0$ se a è divisibile per b, allora $\forall k \neq 0$

ak è divisibile per bk e

$$ak : bk = a : b$$

(dim: ESERCIZIO)

6) proprietà distributiva

se $a, b, c \in \mathbb{N}$ $c \neq 0$, se

a è divisibile per c e b è divisibile per c

allora $(a+b)$ è divisibile per c e

$$(a+b) : c = (a : c) + (b : c)$$

DOMANDA: perché non è possibile dividere per $b = 0$?

IMPORTANTE

Vogliamo dividere $a \in \mathbb{N}$ per $b = 0$:

→ $\boxed{\text{se } a = 0}$: cerchiamo $q \in \mathbb{N}$

tale che $0 = q \cdot 0$

ciò è vero $\forall q \in \mathbb{N}$, quindi la divisione non è ben definita!

→ $\boxed{\text{se } \quad a \neq 0}$ cerchiamo $q \in \mathbb{N}$

tale che $\underset{\substack{\neq \\ 0}}{a} = q \cdot 0$

un tale <u>q non esiste</u> !!!

<u>ESERCIZIO:</u>

Sia $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Siano $n, m \in X$; diciamo che

$n \, R \, m$ se n è divisibile per m.

Mostrare che R è una relazione

d'ordine.

<u>LA SCRITTURA POSIZIONALE DEI NUMERI NATURALI</u>

(cap. 3 Cazzola)

Dalla teoria assiomatica di Peano abbiamo

$0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^+ \in \mathbb{N}$

$0 \longrightarrow 0^+ \longrightarrow (0^+)^+ \longrightarrow ((0^+)^+)^+ \longrightarrow \dots$

Come denotare i numeri naturali in modo da utilizzare solo un numero <u>finito</u> di simboli?

→ Notazione posizionale dei numeri naturali

$$1357 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Dobbiamo scegliere una base $b \geq 2$ e ripetere lo schema con cui abitualmente scriviamo i numeri in base 10.
Avremo bisogno esattamente di b simboli
(se $b = 10$ i simboli sono
$\underbrace{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9}_{10 \text{ simboli}}$)

Anche <u>la posizione</u> del simbolo contribuisce a determinare il numero!

$$1357 \neq 7315$$

Proposizione: Fissato un qualunque numero $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ detto base,
ogni numero naturale $a \in \mathbb{N}$ si può scrivere in modo unico come

$$a = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 \underset{b^1}{\underset{\shortparallel}{b}} + a_0 \underset{b^0}{\underset{\shortparallel}{1}}$$

con $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$,

$a_j \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \leq j \leq k$

$0 \leq a_j \leq b-1 \quad\quad 0 \leq j \leq k$

ES: 1357 $\quad b=10$

$$1357 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot \underset{1}{\underset{\shortparallel}{10^0}}$$

$k = 3$

$a_3 = 1$
$a_2 = 3$
$a_1 = 5$
$a_0 = 7$

b^k è una potenza $\underbrace{b \cdot b \cdot b \dots \cdot b}_{k \text{ volte}}$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ sono dei coefficienti

sono indici

Noi dimostriamo la proposizione

Come scrivere un numero in base diversa dalla base 10?

ESEMPI:

1. $b=4$

$[n]_4$ è l'espressione di $n \in \mathbb{N}$ in base 4

$n = 25$

$25 = [25]_{10}$

Con la divisione euclidea:

$25 : 4 = 6$

1

$25 = 6 \cdot \underset{b}{\underset{\shortparallel}{4}} + 1$

$[25]_{10} = [61]_4$

$6 \geq 4$

non va bene!

$6 = 1 \cdot 4 + 2$

$25 = (1 \cdot 4 + 2) \cdot 4 + 1 = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$

$[25]_{10} = [121]_4$

solo $\leq \underset{b-1}{\underset{\shortparallel}{3}}$

$k = 2$

$a_2 = 1 \leq 3$

$a_1 = 2 \leq 3$

$a_0 = 1 \leq 3$

2. $b = 6$ $\quad a = 165$

$165 : 6 = 27$

45

3

$165 = \underbrace{27}_{\geq 6} \cdot 6 + 3$

$27 = 4 \cdot 6 + 3$

$$165 = (4 \cdot 6 + 3) \cdot 6 + 3 = \underset{<6}{4} \cdot 6^2 + \underset{<6}{3} \cdot 6 + \underset{<6}{3}$$

$$[165]_{10} = [433]_6$$

3 se $b > 10$??

Abbiamo bisogno di b simboli !!

$b = 12$ dobbiamo inventare nuovi simboli

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ \underset{10}{A}\ \underset{11}{B}$$

$$[1431]_{10} = [x]_{12} \quad ?$$

$$1431 : 12 = 119$$
$$23$$
$$111$$
$$-3$$

$$1431 = 119 \cdot 12 + 3$$

$$119 = 9 \cdot 12 + 11$$

$$1431 = (9 \cdot 12 + 11) \cdot 12 + 3 =$$
$$= 9 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 3$$

$$[9 \quad \underbrace{11}_{B} \quad 3]_{12} = [9B3]_{12}$$

4) Se conosco $[x]_b$, come torno alla base 10?

<u>ES</u> $\begin{array}{c}[342]_7 \\ 2\ 1\ 0\end{array}$

$$= 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 2 = 3 \cdot 49 + 28 + 2 =$$

$147 + 30 = 177$

$$177 = \underbrace{((0^+)^+)^+ \quad \quad)^+}_{177 \text{ volte}}$$

⑤ se $b = 2$?

0 1

$$[163]_{10} = [x]_2$$

$163 = 81 \cdot 2 + 1$

$81 = 40 \cdot 2 + 1$

$40 = 20 \cdot 2$

$20 = 10 \cdot 2$

$10 = 5 \cdot 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$$163 = (40 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 40 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$$

$$= (20 \cdot 2) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 20 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1$$

$$= (10 \cdot 2) \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1 = 10 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1$$

$$= (5 \cdot 2) \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1 = 5 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2 + 1$$

$$= (2 \cdot 2 + 1) \cdot 2^5 + 1 \cdot 2 + 1 =$$

$$= 2 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow [2100011]_2 \quad \text{NO}$$

$$= 2^7 + 2^5 + 1 \cdot 2 + 1$$

$$= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$$

$$= [10100011]_2$$

Non possono comparire coefficienti ≥ 2

6 $b = 16$?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
										10	11	12	13	14	15

Scrivere $[1743]_{10} = [x]_{16}$

(Risultato: $[6CF]_{16}$)

(7) Scrivere il più grande numero in base 6 che può essere scritto utilizzando solo quattro cifre tutte diverse.

0 1 2 3 4 5

$\rightarrow \underset{3\,2\,1\,0}{[5432]_6} = 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 2 =$

$5 \cdot 216 + 4 \cdot 36 + 18 + 2 =$

$1080 + 144 + 20 =$

1244

in base 10

$$\begin{array}{r} 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 + \\ 164 \\ \hline 1244 \end{array}$$