OSS. sulla notazione posizionale dei numeri naturali

Ricordo che

TEOREMA: Sia $b \geq 2$ $b \in \mathbb{N}$ detto base.
Allora $\forall a \in \mathbb{N}$ esistono e sono univocamente determinati $k \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ tali che $a_k \neq 0$ e $0 \leq a_j \leq b-1$ $\forall$ $j = 0, 1, \dots, k$ e tali che

$$a = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

OSS: Si possono utilizzare per i coefficienti esattamente b simboli diversi; se $b \geq 11$ possiamo utilizzare ad esempio le lettere

Es: $b = 16$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

ESEMPIO: gli angoli con la numerazione sessagesimale!

$$\alpha = 150° \; 37' \; 42''$$

$1' = 60''$

$1^\circ = 60' = (60^2)''$

$\alpha = \underbrace{150} \cdot 60^2 + 37 \cdot 60 + 42$

non devono superare 59

in forma normale

$\beta = 150^\circ \; 82' \; 77''$

scrivere in forma normale:

$\beta = 150 \cdot 60^2 + 82 \cdot 60 + 77$

$= 150 \; 60^2 + 82 \cdot 60 + (1 \cdot 60 + 17)$

$= 150 \; 60^2 + \underbrace{83} \cdot 60 + 17$

$= 150 \; 60^2 + (1 \cdot 60 + 23) \cdot 60 + 17$

$= 151 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60 + 17$

$= 151^\circ \; 23' \; 17''$

Analogamente per ore, minuti, secondi ...

ESERCIZI (Scrittura posizionale dei numeri naturali)

Es. 1: Scrivere 3752 in base 16

$$[3752]_{10} = [x]_{16}$$

$$\underbrace{0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}\ \ \underset{10}{A}\ \ \underset{11}{B}\ \ \underset{12}{C}\ \ \underset{13}{D}\ \ \underset{14}{E}\ \ \underset{15}{F}$$

$$3752 : 16 = 234$$

55

-72

-8

$$3752 = 234 \cdot 16 + 8 = (14 \cdot 16 + 10) \cdot 16 + 8 =$$

$$234 : 16 = 14 \qquad = 14 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16 + 8$$

74

10

$$\left(= [14 \quad 10 \quad 8]_{16} \right)$$

$$234 = 14 \cdot 16 + 10$$

$$= [E\ A\ 8]_{16}$$

Es3: Convertire $[256]_8$ in base 5

$$[256]_8 = 2\cdot 8^2 + 5\cdot 8 + 6 = 2\cdot 64 + 40 + 6 =$$

$$128 + 46 = 174$$

$$[256]_8 = [174]_{10}$$

passo alla base 5

$$174 : 5 = 34$$
$$24$$
$$4$$

$$174 = 34\cdot 5 + 4$$

$$34 = 6\cdot 5 + 4 = (1\cdot 5 + 1)\cdot 5 + 4 =$$
$$= 1\cdot 5^2 + 1\cdot 5 + 4$$

$$174 = (1\cdot 5^2 + 1\cdot 5 + 4)\cdot 5 + 4 =$$
$$= 1\cdot 5^3 + 1\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 4$$

$$[174]_{10} = [1144]_5$$

Es. 6: Calcolare $[FD9]_{16} + [82A]_{16}$ in base 16

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & F & D & 9 \\
+ & & 8 & 2 & A \\
\hline
 & 1 & 8 & 0 & 3
\end{array}
$$

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

$19 = 1 \cdot 16 + 3$

$16 = 1 \cdot 16 + 0$

$24 = 1 \cdot 16 + 8$

$[FD9]_{16} + [82A]_{16} = [1803]_{16}$

Es. 12 (Tema 22/5/2023)

Convertire $[3257]_{10}$ in base 11

utilizzando 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A

Sommare $[A9]_{11}$

Poi verificare in base 10

$3257 : 11 = 296$
105
67
1

$$3257 = 296 \cdot 11 + 1 = (2 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11 + 10) \cdot 11 + 1$$
$$= 2 \cdot 11^3 + 4 \cdot 11^2 + 10 \cdot 11 + 1$$

$296 : 11 = 26$
76
10

$$296 = 26 \cdot 11 + 10 = (2 \cdot 11 + 4) \cdot 11 + 10 = 2 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11 + 10$$

$$26 = 2 \cdot 11 + 4$$

$$[3257]_{10} \left(= [2 \; 4 \; 10 \; 1]_{11} \right) = [24A1]_{11}$$

$10 \rightarrow A$

Somma

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 4 & A & 1 \\ + & & & A & 9 \\ \hline & 2 & 5 & 9 & A \end{array} = \begin{array}{rcccc} & 2 & \overset{1}{4} & 10 & 1 \\ + & & & 10 & 9 \\ \hline & 2 & 5 & 9 & 19 \end{array}$$

$19 = A$

$20 = 1 \cdot 11 + 9$

$$[24A1]_{11} + [A9]_{11} = [259A]_{11}$$

in base 10

$$2 \cdot 11^3 + 5 \cdot 11^2 + 9 \cdot 11 + 10 =$$

$$2 \cdot 1331 + 5 \cdot 121 + 99 + 10 = 3376$$

$$[A9]_{11} = 10 \cdot 11 + 9 = 119$$

$$119 + 3257 = 3376$$

Troviamo a $MCD(a, b)$

<u>ESERCIZIO</u>: Determinare $MCD(220, 121)$ con il metodo delle divisioni successive

$$\boxed{220 = 1 \cdot 121 + 99} \quad (3)$$

$$MCD(220, 121) = MCD(121, 99)$$

$$\boxed{121 = 1 \cdot 99 + 22} \quad (2)$$

$$MCD(121, 99) = MCD(99, 22)$$

$$\boxed{99 = 4 \cdot 22 + 11} \quad (1)$$

$$MCD(99, 22) = MCD(22, 11) = 11$$

$$22 = 2 \cdot 11 + 0$$

Vogliamo ora scrivere $MCD(220, 121)$ come

$$MCD(220, 121) = m\,220 - n \cdot 121$$

oppure $n\,121 - m\,220$

Da (1) $\quad 11 = 99 - 4 \cdot 22$

(2) $\quad 22 = 121 - 99$

(3) $\quad 99 = 220 - 121$

$$
\begin{aligned}
11 &= 99 + 4\,(121 - 99) = 99 - 4\cdot 121 + 4\cdot 99 \\
&= 5\cdot 99 - 4\cdot 121 \\
&= 5\cdot(220 - 121) - 4\cdot 121 \\
&= 5\cdot 220 - 5\cdot 121 - 4\cdot 121 = \\
&= 5\cdot 220 - 9\cdot 121 \\
&= m\cdot 220 - n\cdot 121
\end{aligned}
$$

$m = 5$

$n = 9$

Abbiamo dimostrato <u>SU UN ESEMPIO</u> il seguente

<u>TEOREMA</u> (di BÉZOUT)

Dati $a, b \in \mathbb{N}$ non entrambi nulli, esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$
\begin{aligned}
MCD(a,b) &= ma - nb \quad \text{oppure} \\
&= nb - ma
\end{aligned}
$$

(Non lo dimostriamo in generale)

Questo ci permette di completare la dimostrazione della proposizione (che risolvo)

<u>Proposizione</u>: Dati $a, b \in \mathbb{N}$ non entrambi nulli, i divisori comuni di a e b sono tutti e soli i divisori di $MCD(a,b)$

<u>dim</u>: Sia d un divisore comune di a e b allora poiché per Bézout

$$MCD(a,b) = ma - nb$$

$$(\text{oppure} = nb - ma)$$

se $a = q_1 d$ allora
$b = q_2 d$

$$MCD(a,b) = m q_1 d - n q_2 d =$$
$$= (m q_1 - n q_2) d$$

d divide $MCD(a,b)$

l'altra implicazione era già stata dimostrata.

OSS (sul teorema di Bézout)

1) La coppia m, n tale che
$MCD(a,b) = ma - nb$
(oppure $nb - ma$)
non è unica. Una delle coppie possibili è quella che si determina tramite l'algoritmo delle divisioni successive

2) In generale, dati $a, b \in \mathbb{N}$ non entrambi nulli, se

$$d = ma - nb$$

non è detto che d sia $MCD(a,b)$!!

Es: $a = 15$ $MCD(15,3) = 3$
$b = 3$

ma per esempio

$$33 = \underset{m}{3} \cdot 15 - \underset{n}{4} \cdot 3$$

$33 \neq MCD(a,b)$!!!

3) Se $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$1 = ma - nb$$

<u>allora</u> $MCD(a,b) = 1$

<u>Definizione</u>: Dati $a, b \in \mathbb{N}$ non entrambi nulli, diremo che a e b sono <u>PRIMI FRA LORO</u> se $MCD(a,b) = 1$.

<u>ESERCIZI</u> (sul MCD)

<u>Es. 1</u>: mostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che n e $n+1$ sono primi fra loro

$$1 = A(n+1) - Bn \qquad \begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \end{array}$$

$$1 = \underbrace{\cancel{n}+1}_{} \cancel{-n}$$

ogni divisore comune di n e $(n+1)$ deve dividere anche 1 $\longrightarrow$ l'unico è 1.

Es. 2: Calcolare $d = MCD(347, 251)$ ed esprimere d come differenza fra multipli dei due numeri dati

$347 = 1 \cdot 251 + 96$ $\longrightarrow$ 6 $\boxed{96 = 347 - 251}$

$MCD(347, 251) = MCD(251, 96)$

$251 : 96 = 2$

59

$251 = 2 \cdot 96 + 59$ 5 $\boxed{59 = 251 - 2 \cdot 96}$

$MCD(251, 96) = MCD(96, 59)$

$96 = 1 \cdot 59 + 37$ 4 $\boxed{37 = 96 - 59}$

$MCD(96, 59) = MCD(59, 37)$

$59 = 1 \cdot 37 + 22$ 3 $\boxed{22 = 59 - 37}$

$MCD(59, 37) = MCD(37, 22)$

$$37 = 1 \cdot 22 + 15 \qquad \text{(2)}\ \boxed{15 = 37 - 22}$$

$$MCD(37, 22) = MCD(22, 15)$$

$$22 = 1 \cdot 15 + 7 \qquad \text{(1)}\ \boxed{7 = 22 - 15}$$

$$MCD(22, 15) = MCD(15, 7)$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1 \qquad \boxed{1 = 15 - 2 \cdot 7}$$

$$MCD(15, 7) = MCD(7, 1) = 1$$

$$1 = 15 - 2 \cdot 7 \overset{(1)}{=} 15 - 2(22 - 15) = 15 - 2 \cdot 22 + 2 \cdot 15$$

$$= 3 \cdot 15 - 2 \cdot 22 \underset{(2)}{=} 3 \cdot (37 - 22) - 2 \cdot 22$$

$$= 3 \cdot 37 - 5 \cdot 22 \underset{(3)}{=} 3 \cdot 37 - 5(59 - 37)$$

$$= 8 \cdot 37 - 5 \cdot 59 \underset{(4)}{=} 8 \cdot (96 - 59) - 5 \cdot 59$$

$$= 8 \cdot 96 - 13 \cdot 59 \underset{(5)}{=} 8 \cdot 96 - 13 \cdot (251 - 2 \cdot 96)$$

$$= 34 \cdot 96 - 13 \cdot 251 \underset{(6)}{=} 34 \cdot (347 - 251) - 13 \cdot 251$$

$$\boxed{1 = 34 \cdot 347 - 47 \cdot 251}$$

Es. 9: (Tema 12/6/2023)

MCD(6916, 2205) e ricavare l'uguaglianza

$$7 = 22 \cdot 6916 - 69 \cdot 2205$$