<u>Ricordo che</u>: l'opposto di $a \in \mathbb{Z}$ è quell' <u>unico</u> $b \in \mathbb{Z}$: $a + b = 0$

se $a = n \in \mathbb{N}$ allora $b = \hat{n}$

$a = \hat{n} \in \mathbb{Z}^-$ allora $b = n$

Abbiamo allora denotato $\boxed{\hat{n} = -n}$

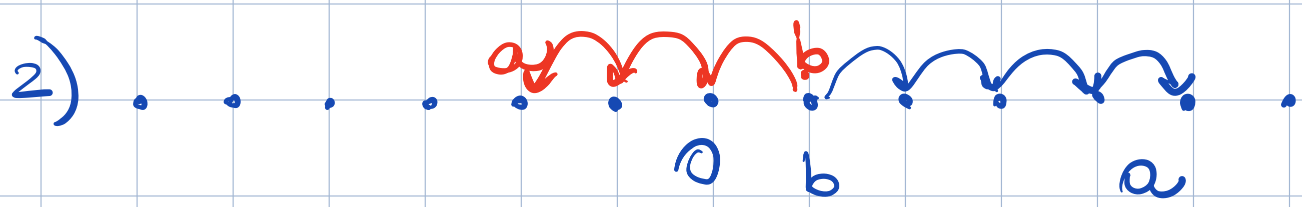
ora possiamo definire la sottrazione:

<u>Definizione</u>:

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ definiamo la <u>SOTTRAZIONE</u> $a - b$ nel modo seguente:

$$a - b = c \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a = b + c$$

<u>OSS</u>: 1) L'elemento c è <u>unico</u>, sempre per la legge di cancellazione della somma

2) 

se a è a destra di b, allora

$a - b \in \mathbb{N}$

Se a è a sinistra di b, allora

$a - b \in \mathbb{Z}^-$

3) <u>OSSERVAZIONE FONDAMENTALE</u>

$$a - b = a + (-b)$$

sottrazione

opposto

I due segni $-$ <u>sono diversi</u>!!

Mostriamolo su un esempio (<u>non</u> è una dimostrazione!!)

$3 - 5 = c$ è tale che

$3 = 5 + c$ (def. di sottrazione)

ora sommando a destra e a sinistra (-5):

$$(-5) + 3 = \underbrace{(-5) + 5}_{\overset{\shortparallel}{0}} + c = 0 + c = c$$

(per la def. di opposto)

quindi $c = (-5) + 3 = 3 + (-5)$

commutatività

Quindi: $\boxed{\text{la sottrazione è la somma con l'opposto}}$

Veniamo al prodotto in $\mathbb{Z}$:

Vogliamo che siano verificate le proprietà del prodotto in $\mathbb{N}$ e vogliamo che

$n \cdot m$ sia lo stesso definito in $\mathbb{N}$

(per $n, m \in \mathbb{N}$).

Dobbiamo definire $n \cdot (-m)$

$(-n) \cdot (-m)$

(per commutatività $(-m) \cdot n = n \cdot (-m)$

Mostriamolo su un esempio:

$3 \cdot (-5) = ?$

So che $(-5) + 5 = 0$, da cui

$3 \cdot ((-5) + 5) = 3 \cdot 0 = 0$

Vogliamo che valga la proprietà distributiva, quindi

$$3 \cdot (-5) + \underbrace{3 \cdot 5}_{\in \mathbb{N}} = 0$$

Quindi necessariamente $3.(-5) = -(3.5)$

<u>In generale</u> : $n.(-m) = -(n.m)$

Invece

$(-3)\cdot(-5) = ?$

Stesso ragionamento

$(-5)+5 = 0$, da cui

$(-3)\left((-5)+5\right) = (-3)\cdot 0 = 0$

vogliamo che $\forall a \in \mathbb{Z}$

$a.0 = 0$

per la proprietà distributiva

$(-3).(-5) + \underbrace{(-3).5}_{\text{visto poco fa } -(3.5)} = 0$

$(-3)(-5) + (-3.5) = 0$

quindi $(-3)\cdot(-5)$ è l'opposto di $-(3.5)$

quindi

$(-3).(-5) = 3.5$

In generale $(-m)\cdot(-n) = m\cdot n$

Quindi definiamo

$m\cdot n$ già definito in $\mathbb{N}$

$(-m)\cdot n = n\cdot(-m) = -(n\cdot m)$

$(-m)\cdot(-n) = m\cdot n$

la regola dei segni

$- \cdot + = -$

$+ \cdot - = -$

$- \cdot - = +$

è dovuta alle proprietà verificate da somma e prodotto.

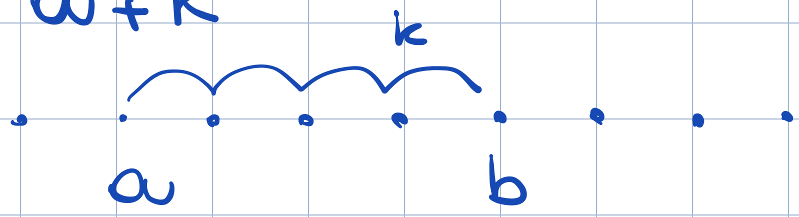
OSS. imp: Non è più valida la proprietà (valida in $\mathbb{N}$) $m\cdot n = 1 \iff m = n = 1$

In $\mathbb{Z}$ si ha anche $(-1)\cdot(-1) = 1$

OSS: 1) In $\mathbb{Z}$ è possibile estendere l'ordinamento $\leq$ definito in $\mathbb{N}$

$\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$:

$a \le b$ se $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che
$b = a + k$



Avevamo visto che $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \le n$

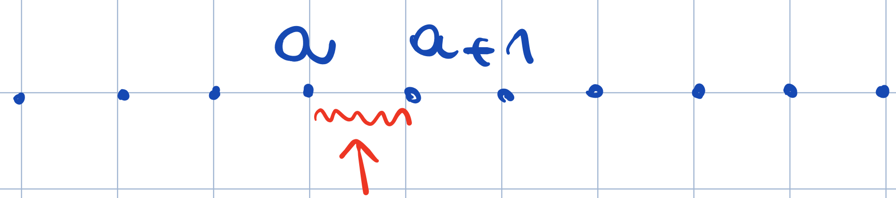
Ora: $\forall (-n) \in \mathbb{Z}^-$ si ha

$$(-n) \le 0$$

infatti $\quad 0 = (-n) + n$

2) Anche in $\mathbb{Z}$ ha senso il concetto di <u>successivo</u>

$\forall a \in \mathbb{Z}$ il successivo è $a+1$



tra a e $a+1$ <u>non</u> ci sono altri numeri interi!!

in $\mathbb{Z}$ esiste anche il concetto di
<u>precedente</u> $\quad a-1$

(in $\mathbb{N}$ 0 <u>non</u> ha precedente)

3) anche in $\mathbb{Z}$ si definisce la <u>divisione esatta</u> : $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

$a : b = c$ se $a = bc$ $c \in \mathbb{Z}$

<u>Attenzione!</u> Non è più vero che <u>i divisori</u> di un numero intero sono sempre minori o uguali al numero stesso

<u>Es</u>: $(-15) = 3 \cdot (-5)$

NUMERI RAZIONALI (Cazzola cap. 8)

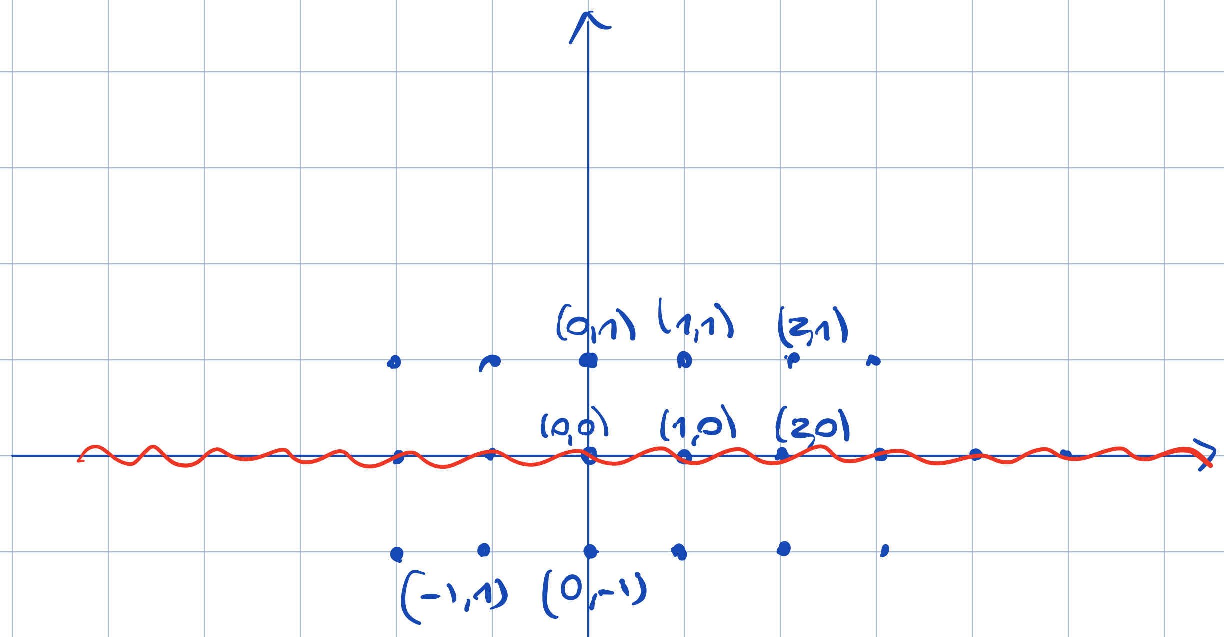
Dobbiamo ampliare l'insieme numerico per rendere possibile la divisione

$p : q$ con qualunque p, q, $q \neq 0$.

Vogliamo dare un senso alla scrittura

$\frac{m}{n}$ (Es. $\frac{2}{3}$, $\frac{-5}{4}$, $\frac{1}{(-2)}$, ...)

Introduciamo il prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{(a,b),\ a,b\in\mathbb{Z}\}$$

Consideriamo ora

$$X = \{(a,b),\ a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\}$$

Introduciamo su X una relazione di equivalenza (vorremo identificare (a,b) con il numero $\frac{a}{b}$ ed identificare le frazioni equivalenti)

Su un esempio

$$\frac{\overset{a}{3}}{\underset{b}{4}} = \frac{\overset{c}{6}}{\underset{d}{8}} \iff \frac{3\cdot\cancel{8}}{4\cdot 8} = \frac{6\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 8}$$

Definiamo la relazione seguente:
$(a,b)\ R\ (c,d)$ se $a \cdot d = b \cdot c$

$$\left[\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}\ \right]$$

Mostriamo che R è una relazione di equivalenza.

1) R è riflessiva $(a,b)\,R\,(a,b)$
2) R è simmetrica $(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow (c,d)R(a,b)$
3) R è transitiva
$(a,b)\,R\,(c,d)$ e $(c,d)\,R\,(e,f) \Longrightarrow (a,b)\,R\,(e,f)$

1) $a \cdot b = b \cdot a$ OK
2) $a \cdot d = bc \Longleftrightarrow cb = d \cdot a$ OK
3) un po' più complicato.

Supponiamo che $(a,b)\,R\,(c,d)$ e $(c,d)\,R\,(e,f)$ con $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$, $b,d,f \neq 0$

$a \cdot d \underset{①}{=} b \cdot c$ e $c \cdot f \underset{②}{=} d \cdot e$

Vogliamo mostrare che $(a,b) \mathcal{R} (e,f)$, cioè
$a \cdot f = b \cdot e$

I^a possibilità: $a = 0$ allora sicuramente (per ① e ②) anche $c = 0$ e $e = 0$

Quindi $(0,b) \mathcal{R} (0,f)$ $0 \cdot f = b \cdot 0$
OK

II^a possibilità: $a \neq 0$, e allora $c \neq 0$, $e \neq 0$

Sappiamo che $a \cdot d \underset{①}{=} b \cdot c$
moltiplichiamo ambo i termini per $e \cdot f$

$$a \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{e} \cdot f = b \cdot \cancel{c} \cdot e \cdot \cancel{f}$$

per ② possiamo usare la legge di cancellazione del prodotto!! (Nessuno dei fattori è nullo)

$af = b \cdot e$ che è quello che volevamo dimostrare.

Definizione:

Dato $X = \{(a,b), a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ e data la relazione di equivalenza R così definita: $(a,b) R (c,d)$ se $ad = bc$, chiamiamo insieme dei numeri RAZIONALI $\mathbb{Q}$ l'insieme delle classi di equivalenza in X rispetto alla relazione R.

Denotiamo $[(a,b)] = \dfrac{a}{b}$

è la classe di equivalenza

ESEMPIO:

$-24 = -24$

$$\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3} = \frac{8}{12}$$

$-6 = -6$

Attenzione! Per ora il segno di frazione NON ha significato di divisione! È solo un simbolo, una notazione.

Ora vogliamo rispondere alle seguenti domande:

1) Come mai $\mathbb{Q}$ "estende" $\mathbb{Z}$?
Infatti $\mathbb{Z}$ non è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$

2) Dobbiamo definire somma e prodotto in $\mathbb{Q}$ in modo compatibile con le operazioni in $\mathbb{Z}$.

3) Dobbiamo definire opposto e sottrazione

4) Cosa possiamo dire della divisione in $\mathbb{Q}$?

5) Dobbiamo dare un senso all'espressione $\frac{a}{b}$ come quoziente fra numeri interi

6) Osservazioni varie di proprietà vere in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Q}$ e di altre che non sono più vere.

1) In che senso $\mathbb{Q}$ estende $\mathbb{Z}$?
Esiste una funzione biunivoca

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \left\{ \frac{a}{1}, \quad a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Es: $3 \in \mathbb{Z} \longmapsto \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{-3}{-1}$

2) Definiamo somma e prodotto su $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad b,d \neq 0 \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{bd}$$

OSS: 1) $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} \overset{?}{=} \frac{2}{4} + \frac{-4}{-5}$?

Bisognerebbe mostrare che le definizioni date sono indipendenti dai rappresentanti nelle classe di equivalenza.
(Non lo facciamo).

2) Somma e prodotto estendono le definizioni date su $\mathbb{Z}$:

$$\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a\cdot 1+b\cdot 1}{1\cdot 1}=\frac{a+b}{1}$$

$$\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{a\cdot b}{1}$$

3) Bisognerebbe dimostrare che somma e prodotto verificano tutte le solite proprietà.

lo zero: $\frac{0}{b}$ $b\neq 0$

unità: $\frac{1}{1}=\frac{a}{a}$ $\forall a\neq 0$

3) Opposto e sottrazione?

$\forall\ \frac{a}{b}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$

l'opposto è $\frac{c}{d}$ tale che $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{0}{1}$

si ha che

$$\frac{c}{d} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a-a}{b} = \frac{0}{b}$$

ESEMPIO: $\frac{-3}{2} = p$

opposto è $\frac{3}{2}$

$$\frac{-3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-3.2+3.2}{2.2} = \frac{0}{4} \ (=0!)$$

Analogamente in $\mathbb{Z}$ si ha che

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{(-c)}{d}$$

la sottrazione è la somma con l'opposto.

4) Cosa possiamo dire della divisione in $\mathbb{Q}$?

Definizione: Dato $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ con

$a, b \neq 0$, chiamiamo **RECIPROCO** di $\frac{a}{b}$ quell'elemento $\frac{c}{d}$ tale

che $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$$

si ha $$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

ES:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = \frac{1}{1}$$

OSS: Per la legge di cancellazione (che vale anche in $\mathbb{Q}$) il reciproco è unico.

<u>Definizione:</u>

Dati $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$ $\quad b, d \neq 0$, $c \neq 0$

definiamo <u>il quoziente</u> $p : q = t \in \mathbb{Q}$

tale che $p = t \cdot q$

Si ha $t = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

<u>OSS:</u> Il quoziente è il prodotto con il reciproco!

5) Vogliamo dare senso all'espressione $\frac{a}{b}$ come quoziente fra numeri interi.

$m = a \in \mathbb{Z}$

$n = b \in \mathbb{Z}$ $\quad b \neq 0$

Li identifichiamo con le frazioni corrispondenti

$m = \frac{a}{1}$

$n = \frac{b}{1}$

$m : n = t$ tale che $m = t \cdot n$

$$t = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \qquad \left(\frac{a}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} \right)$$

(ora il quoziente ha senso in $\mathbb{Q}$, non aveva senso in $\mathbb{Z}$)

6) <u>Osservazioni varie su $\mathbb{Q}$</u>

1) È sempre possibile scegliere $\frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$

$$\frac{3}{(-2)} = \frac{(-3)}{2} = -\frac{3}{2}$$

Inoltre diciamo che una frazione è <u>RIDOTTA AI MINIMI TERMINI</u> se

$MCD(a, b) = 1$

(a e b sono primi fra loro)

2) Si può estendere anche a $\mathbb{Q}$ l'ordinamento:

se $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$ con

$a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

diciamo che $p \leq q$ se

$$ad \leq cb$$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff \frac{ad}{bd} \leq \frac{cb}{bd}$$

Es: $\frac{7}{15} \leq \frac{8}{17}$?

$7 \cdot 17 \leq 8 \cdot 15$?

È una estensione dell'ordinamento in $\mathbb{Z}$ e quindi in $\mathbb{N}$.

Si dimostra che l'ordinamento è compatibile con le operazioni, cioè

a) $$p \le q \iff t+p \le q+t \qquad p,q,t \in \mathbb{Q}$$

b) $$p \le q \iff tp \le tq \qquad \underline{\forall t \geq 0}$$

(<u>attenzione</u>! se $t<0$ allora $tp \geq tq$)

3) <u>Attenzione</u>! in $\mathbb{Q}$ non è vero che un prodotto accresce sempre e un quoziente diminuisce sempre!!