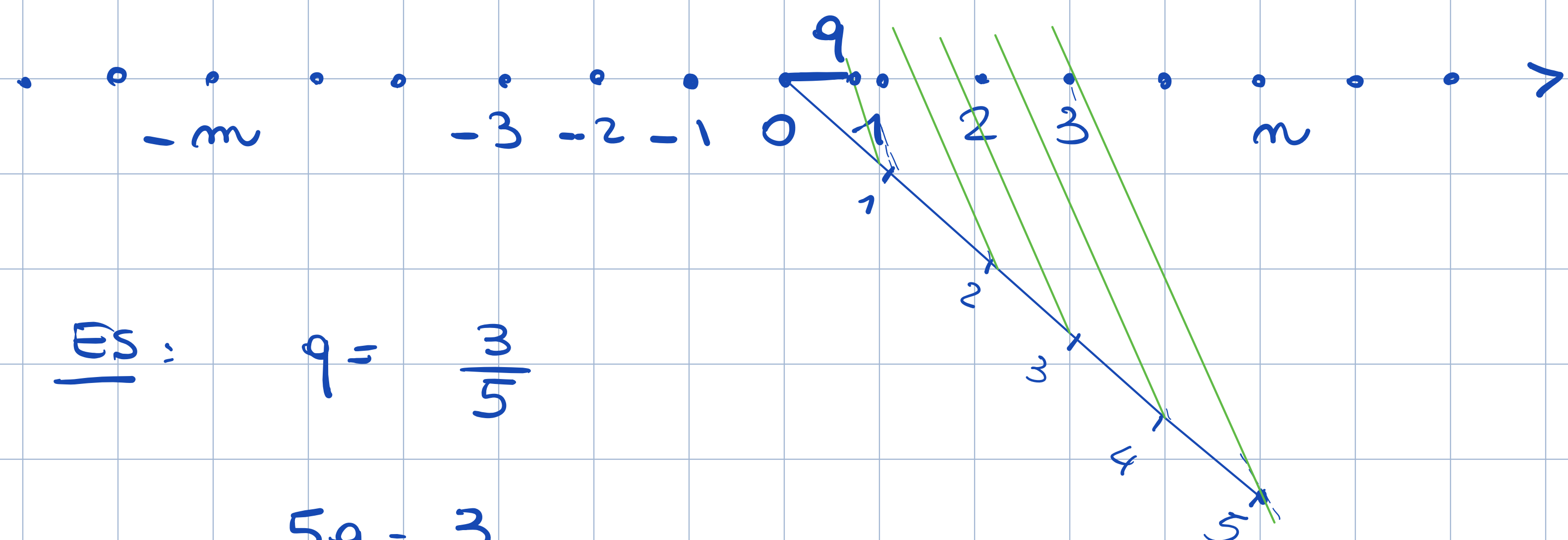
OSS: Dove si posizionano i numeri razionali sulla retta dei numeri?



ES: $q = \frac{3}{5}$

$5q = 3$

TEOREMA (Densità di $\mathbb{Q}$)

Dati $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ con $q_1 < q_2$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q_1 < q < q_2$

dim: Siano $q_1 = \frac{a}{b}$ $\quad a, c \in \mathbb{Z}$

$q_2 = \frac{c}{d}$ $\quad b, d \in \mathbb{N}$

$b, d \neq 0$

con $q_1 < q_2$ cioè $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \boxed{ad < cb}$ $(*)$

Mostriamo che $q = \frac{a+c}{b+d}$ verifica

$q_1 < q < q_2$.

Infatti $\quad q_1 < q \iff \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} \iff$

$$a(b+d) < b(a+c)$$

$$\cancel{ab} + ad \underset{*}{<} \cancel{ab} + cb$$

legge di cancellaz compatibile con l'ordinam.

e anche $\quad q < q_2 \iff \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d} \iff$

$$d(a+c) < c(b+d)$$

$$ad + \cancel{cd} < cb + \cancel{cd}$$

$*$

$\boxed{\text{ok}}$

<u>OSS</u>: 1) Tra due razionali cadono <u>infiniti</u> razionali !!

2) Non esiste il concetto di <u>SUCCESSIVO</u> in $\mathbb{Q}$!!

<u>OSS. IMP.</u> Ogni numero razionale ha anche una rappresentazione decimale

<u>ES</u>: $\quad 153,451$

NOTAZIONE POSIZIONALE dei numeri razionali (in base 10)

Ricordo che: in $\mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{N}$

$$a = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$
$$0 \le a_j \le 9$$

si trasferisce in $\mathbb{Z}$

In $\mathbb{Q}$ possiamo "spezzare" l'unità

$$1 = 10 \cdot \frac{1}{10}$$

Domanda: se $q \in \mathbb{Q}$, possiamo scrivere

$$q = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 +$$
$$+ b_1 \frac{1}{10} + b_2 \frac{1}{10^2} + \dots + b_N \frac{1}{10^N} \quad ?$$

Esempi:

1) $q = \dfrac{13}{8}$

$$\frac{13}{8} = \frac{1 \cdot 8 + 5}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1 + \frac{50}{8} \cdot \frac{1}{10} =$$

$$1 + \frac{6 \cdot 8 + 2}{8} \cdot \frac{1}{10} = 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{10}$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + \frac{20}{8} \cdot \frac{1}{10^2} =$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 8 + 4}{8} \cdot \frac{1}{10^2} =$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{10^2} =$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{40}{8} \cdot \frac{1}{10^3} =$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3}$$

OSS: Nella divisione

$13 : 8 = 1,625$

50

20

40

—

Si denota $\frac{1}{10} = 0,1$

$$\frac{1}{10^2} = 0{,}01$$

$$\frac{1}{10^3} = 0{,}001 \quad \ldots$$

$$\frac{13}{8} = 1 + 6 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001 =$$

$$1 + 0{,}6 + 0{,}02 + 0{,}005 =$$

$$= 1{,}625$$

2) $\frac{25}{12}$

$$\frac{25}{12} = \frac{2 \cdot 12 + 1}{12} = 2 + \frac{1}{12} = 2 + \frac{10}{12} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\frac{10}{12} = \frac{0 \cdot 12 + 10}{12} =$$

$$0 + \frac{10}{12}$$

$$= 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + \frac{100}{12} \frac{1}{10^2} =$$

$$= 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + \frac{8 \cdot 12 + 4}{12} \cdot \frac{1}{10^2} =$$

$$= 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{10^2} =$$

$$= 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{40}{12} \cdot \frac{1}{10^3} =$$

$= 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{3 \cdot 12 + 4}{12} \cdot \frac{1}{10^3} =$

$= 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{10^3}$

Abbiamo ritrovato lo stesso resto!

$2,08\overline{3}$

Con l'algoritmo della divisione

$25 : 12 = 2,08333\ldots = 2,08\overline{3}$

10

100

40

40

40

<u>OSS. IMP</u>: Gli allineamenti decimali di un numero razionale sono <u>SOLO</u> finiti oppure infiniti periodici!!

Infatti nel processo delle divisioni successive possiamo ottenere solo un numero <u>finito</u> di resti diversi

($q = \frac{a}{b}$ possiamo avere solo b resti diversi

$0, 1, 2, \ldots, b-1$)

→ Se otteniamo resto = 0 abbiamo allineamento <u>finito</u>

→ Se non troviamo resto = 0, dopo al più b − 1 divisioni successive otteniamo un resto già trovato e quindi otteniamo un allineamento periodico

(il periodo può essere al più di b − 1 cifre)

<u>OSS. IMP</u>: Un allineamento decimale infinito <u>NON PERIODICO</u> <u>non</u> è razionale.

<u>Domanda</u>: È possibile capire dalla frazione se corrisponde a un allineamento

finito oppure a un allineamento periodico?

Es. $31,57 =$

$$31 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{31 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7}{10^2} =$$

$$= \frac{3100 + 50 + 7}{10^2} =$$

$$= \frac{3157}{10^2}$$

In generale se q corrisponde a un allineamento decimale **finito**, allora

$$q = \frac{\alpha}{10^k} \qquad \alpha \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$$

Ora: sia $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{\text{Supponiamo che } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b \neq 0 \text{ e } MCD(a,b) = 1}$$

Quali condizioni su a, b implicano che

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{10^k} \quad ?$$

$$\Longleftrightarrow \quad a \cdot 10^k = \alpha \cdot b$$

$$\Longleftrightarrow \quad a \cdot 2^k \cdot 5^k = \alpha \cdot b .$$

Poiché sappiamo che a non divide b ($\mathrm{MCD}(a,b) = 1$) otteniamo che b ha come divisori <u>solo</u> potenze di 2 e potenze di 5

<u>Quindi</u>: $q = \frac{a}{b}$ <u>ai minimi termini</u>

corrisponde a un allineamento <u>finito</u>

$\Longleftrightarrow$ b è divisibile <u>solo</u> per potenze di 2 e potenze di 5.

(<u>oss</u>: Anche solo potenze di 2 oppure solo potenze di 5)

<u>Es</u>: $\frac{25}{12} = \frac{25}{2^2 \cdot 3}$ è ai minimi termini e $b=12$ è divisibile per 3

→ periodico!!

Domanda: Come si fa a trasformare un allineamento decimale in frazione?

1) Se l'allineamento decimale è finito → ok

ES: $152,72 =$

$$152 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{15272}{10^2}$$

2) Se l'allineamento decimale è periodico?

OSS: Non lo trovate su Cazzola (né su Baresi Montagnoli)

È un argomento di **ANALISI MATEMATICA**

$135,93\overline{72} = 135,937272727272....$

è una somma **infinita** di multipli di potenze negative di 10

→ Le operazioni (somma e prodotto) andrebbero giustificate con dei passaggi al limite (non lo facciamo!)

Lo facciamo su degli esempi

Es. 1: $q = 3,\overline{2}$

1 cifra nel periodo
0 cifre nell' antiperiodo

$10q = 32,\overline{2}$ (non è giustificato, ma ci vediamo :))

$10q - q = 32,\overline{2} - 3,\overline{2} = 32 - 3$

il periodo si elimina (non è giustificato)

$(10-1)q = 29$

$q = \frac{29}{9}$

Es. 2: $q = 3,\overline{21}$

2 cifre nel periodo
0 nell'antiperiodo

$10^2 q = 321,\overline{21}$

$10^2 q - q = 321 - 3$

$$(10^2-1)\,q = 318$$
$$99\,q = 318$$

$$q = \frac{318}{99}$$

Es. 3:

$$q = 3{,}71\overline{21}$$

2 cifre periodo
2 cifre antiperiodo

$$10^2 q = 371{,}\overline{21}$$

$$10^2 \cdot 10^2 q = 37121{,}\overline{21}$$

$$10^4 q - 10^2 q = 37121 - 371$$

$$(10^4-10^2)\,q = 36750$$
$$10^2 \cdot (10^2-1)\,q = 36750$$
$$100 \cdot 99\,q = 36750$$

$$q = \frac{36750}{100 \cdot 99} = \frac{36750}{9900}$$

IMPORTANTE: All'esame la formula NON

giustificata non sarà considerata !!

Es. 4 :

$$\boxed{q = 0,\overline{9}}$$

$$10q = 9,\overline{9}$$

$$10q - q = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} = 9$$

$$9q = 9$$

$$\boxed{q = 1}$$

OSS. : Allineamenti decimali diversi corrispondono allo stesso numero razionale!!
Il 9 periodico corrisponde ad aumentare di 1 unità il decimale precedente.

Domanda: "Quanti" sono i numeri razionali?

Definizione: Diciamo che un insieme X è NUMERABILE se esiste una funzione biunivoca

$$f: X \longrightarrow A \subseteq \mathbb{N}$$

A sottoinsieme

OSS: se A è finito, allora X è finito (ogni finito è numerabile)

TEOREMA: $\mathbb{Q}$ è numerabile.

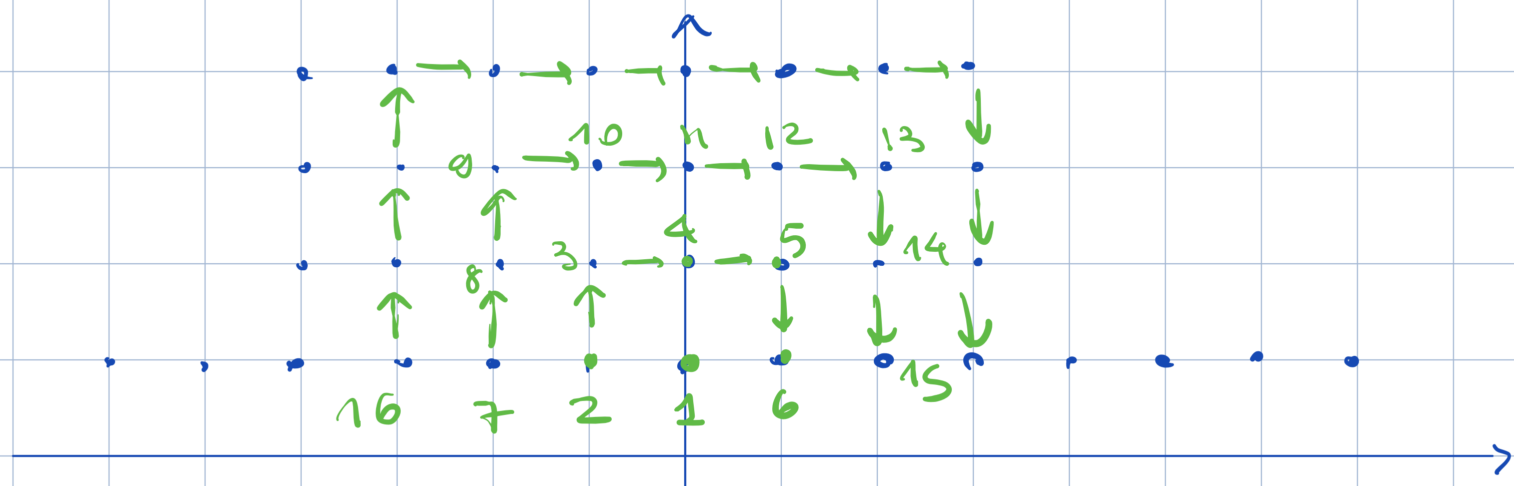
dim (idea) come possiamo mettere i numeri razionali in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$?

Facciamo di più: consideriamo l'insieme

$X = \{(a,b),\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b \neq 0\}$

e troviamo un modo per mettere in successione gli elementi di X

($\mathbb{Q}$ è meno numeroso di X poiché coppie diverse possono corrispondere allo stesso razionale)



Domanda: I punti su una retta sono in corrispondenza biunivoca con numeri razionali?

NO

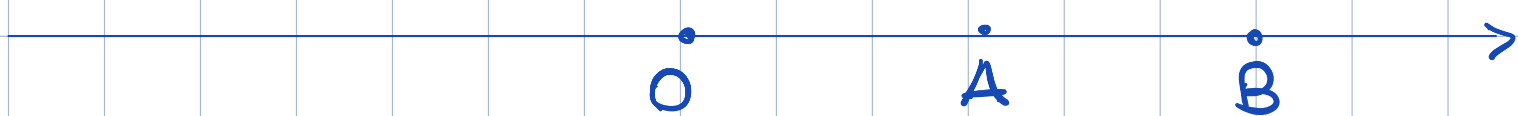
Definizione: Due grandezze a, b della stessa natura si dicono **COMMENSURABILI** se esiste una unità di misura che permette di misurare esattamente entrambe, cioè se $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$a = m\,u$$
$$b = n\,u$$

u = unità di misura.

Due grandezze non commensurabili si dicono **INCOMMENSURABILI**.

Domanda: Due segmenti sulla retta sono sempre commensurabili?



Se OA e OB sono commensurabili, allora $\exists\, u$ unità di misura:

$OA = n u$

$OB = m u$

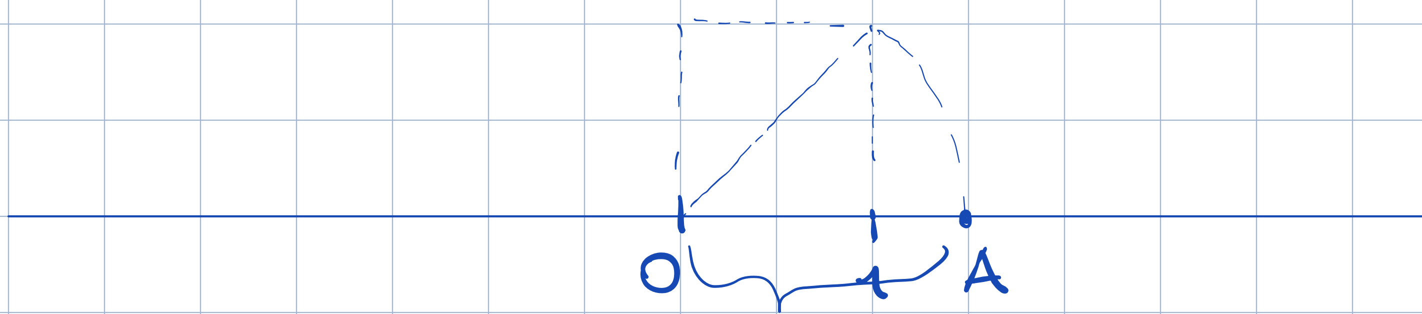
$u = \frac{OA}{n}$

$u = \frac{OB}{m}$

$$\frac{OA}{n} = \frac{OB}{m} \qquad OA = \frac{n}{m} OB$$

Se i segmenti fossero <u>TUTTI COMMENSURABILI</u> <u>fra loro</u> e se $OB = 1$ (misura)
allora $OA = \frac{n}{m}$

$\rightarrow$ tutti i segmenti avrebbero misura razionale! Non è vero!



la diagonale del quadrato è incommensurabile con il lato del quadrato se in particolare il lato vale 1

$$\overline{OA}^2 = 2$$

misura della diagonale

e non è possibile che $\overline{OA} = \frac{m}{n}$

<u>TEOREMA</u>: se $q^2 = 2$ allora $q \notin \mathbb{Q}$.

(non lo dimostriamo)

$\rightarrow$ se $q^2 = 2$ q è <u>IRRAZIONALE</u>

$(q = \sqrt{2})$