Scienze della Formazione Primaria — AA 2023/2024
Matematiche Complementari

3. – Principio di induzione

Dimostrare tramite il principio di induzione le seguenti proposizioni.

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Per ogni $n \geq 3$ la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a $(n-2)\pi$.
3. Per ogni $n \geq 4$ si ha la seguente disuguaglianza
$$2^n \geq n^2.$$
4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha la seguente disuguaglianza
$$3^n \geq 1 + 2n.$$
5. (Tema di febbraio 2022)
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha
$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1).$$
6. (Tema di luglio 2021)
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2.$$
7. Per ogni $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
(*Suggerimento: l'induzione non si fa su q che è un numero reale che si suppone fissato, ma qualunque, ma su n che è un naturale*).
8. In un poligono, chiamiamo *diagonale* qualsiasi segmento che unisce due vertici non consecutivi. Dimostrare che un poligono di n lati (con $n \geq 4$) ha esattamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali
suggerimento: dopo aver dimostrato il passo iniziale, determinare come si passa da 4 a 5 lati, poi da 5 a 6 lati e, una volta capito il meccanismo, come si passa da n a $n+1$ lati.
9. (Tema di giugno 2022)
Mostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ il numero $4^n - 1$ è divisibile per 3.
10. (Tema di maggio 2023)
Sia $P(n)$ la proprietà seguente: $n^3 > 1 + n$. Mostrare per induzione che la proprietà $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 2$.