

AA.VV.

LOGOS & PATHOS
Epistemologie contemporanee
a confronto

a cura di Patrizia Manganaro e Flavia Marcacci

EDIZIONI STUDIUM - ROMA

“Il volume è stato pubblicato con il finanziamento del Progetto STOQ. Science, Theology and the Ontological Quest destinato alle attività di ricerca dell’International Research Area on Foundation of Sciences (IRAFS, www.irafs.org) presso la Pontificia Università Lateranense”.

La collana è peer reviewed

Copyright © 2017 by Edizioni Studium - Roma
ISBN 978-88-382-.....-

www.edizionistudium.it

1. Introduzione

Può la matematica sostituirsi alla sensibilità dell'artista nella produzione di immagini estetiche? In questo articolo presentiamo alcuni elementi della teoria qualitativa dei sistemi dinamici a tempo discreto, che si occupa di indagare l'evoluzione asintotica di successioni di punti ottenuti in modo ricorsivo (o induttivo) iterando semplici funzioni. Essa ci mostra come precise formule matematiche applicate ripetutamente, ovvero prendendo il risultato (o output) di ogni iterazione come argomento (o input) del calcolo successivo, possano generare sequenze di punti dall'andamento irregolare (il cosiddetto caos deterministico) e come tali nuvole di punti possano dar vita a oggetti geometrici emergenti, detti attrattori strani, le cui proprietà possono conferire loro un aspetto di indubbio valore estetico.

In questo articolo non entreremo nei dettagli, ma ci limiteremo a mostrare in modo operativo alcune situazioni, a titolo di esempio, con il solo scopo di incuriosire e fare "toccare con mano" questo *modus operandi*. Cercheremo poi di offrire, in modo qualitativo e senza utilizzare strumenti matematici avanzati, alcune spiegazioni per permettere al lettore di intravedere certe proprietà che stanno alla base dei fenomeni che si osservano numericamente, rimandando alla ricca e recente letteratura per approfondimenti, sebbene tale letteratura sia in rapida evoluzione e in parte non ancora arrivata ad assestarsi verso formulazioni e terminologie standardizzate.

* Università di Urbino Carlo Bo, gian.bischi@uniurb.it

** Università di Macerata, francescagrassetti@gmail.com

2. *Generare successioni di punti in modo iterativo: traiettorie e attrattori*

Dato un punto del piano cartesiano, rappresentato dalla coppia di coordinate (x, y) , se ne può generare un altro, diciamo (x', y') , applicando una funzione del piano in sé: $(x', y') = (f(x, y), g(x, y))$.

Questa può essere vista come una trasformazione che trasporta un punto in un altro punto. Se poi al punto così ottenuto si applica di nuovo la stessa funzione si ottiene un terzo punto e così via. Si tratta dell'applicazione ripetuta di un ciclo di retroazione (o feedback) in cui il risultato (o output) di un calcolo viene reintrodotta come nuovo argomento (o input) dello stesso processo di calcolo. Si ottiene così, in modo induttivo o iterativo, ovvero "passo dopo passo", una successione di valori, o punti, $(x_t, y_t) = (f(x_{t-1}, y_{t-1}), g(x_{t-1}, y_{t-1}))$, dove il pedice t è in pratica un contatore di passi, o iterazioni, ottenuti partendo dalla condizione iniziale (x_0, y_0) , detta anche *punto seme* della successione.

È interessante chiedersi dove andrà a finire questa successione di punti, cioè il suo comportamento asintotico (come dicono i matematici), ovvero il comportamento limite quando il numero di iterazioni tende all'infinito, che rappresenta il destino del processo iterativo nel "lungo periodo" (come dicono gli economisti). A prima vista la questione non sembra difficile, in quanto il calcolo del valore ottenuto a ogni passo è in genere immediato e perfettamente deterministico (per definizione di funzione, dato un input ammissibile il risultato è univocamente determinato dalle operazioni contenute in essa) e pertanto partendo da una data condizione iniziale ogni successivo punto è a sua volta univocamente determinato. Eppure non è sempre facile prevedere il destino di tali successioni. Talvolta la sequenza così generata converge verso un punto limite dal quale non si discosta più (e si dice che converge a un *equilibrio attrattivo*), oppure cresce indefinitamente allontanandosi sempre più (e allora si dice che *diverge*, o che tende all'infinito), altre volte da una certa iterazione in poi comincia a oscillare percorrendo ciclicamente un numero finito di punti che si ripetono all'infinito (e si dice che entra in un *ciclo periodico*, da cui non esce più), oppure si avvicina indefinitamente a un simile ciclo periodico (detto allora attrattivo), oppure, infine, continua a generare punti sempre diversi, apparentemente disordinati, formando così una nuvola densa di punti che si annerisce sempre di più mano a mano che si continua a iterare la funzione.

In quest'ultimo caso si parla di successioni caotiche (il cosiddetto *caos deterministico*, un evidente ossimoro). Queste nuvole di punti possono as-

sumere particolari forme, intricate matasse chiamate anche *attrattori strani*. Si tratta di “strutture emergenti” che si formano induttivamente, passo dopo passo, che mano a mano che si aggiungono nuovi punti assumono sembianze che non sempre erano prevedibili in base alle proprietà elementari della funzione iterata. In altre parole, anche se il singolo spostamento è semplice da calcolare, l'effetto cumulativo, o composto, di migliaia o milioni di passi, forma strutture con proprietà geometriche (o meglio, topologiche) interessanti e talvolta inaspettate, oltre a indubbe qualità estetiche. Ovviamente la forma di questi attrattori strani (o caotici) dipende dalle proprietà della funzione iterata, che può essere espressa come composizione di trasformazioni del piano che rappresentano rotazioni, dilatazioni, contrazioni, stiramenti, ripiegamenti. Può inoltre, in certi casi, essere dotata di particolari simmetrie.

Può essere interessante, e persino divertente, investigare con l'ausilio di un computer quali forme assumono gli attrattori caotici generati mediante l'applicazione ripetuta di funzioni non lineari, ed esplorare la gamma di forme che si possono ottenere modificando le proprietà delle funzioni stesse, ovvero cambiandone le espressioni o semplicemente alcuni coefficienti, che diventano così dei parametri da far variare come “manopole” per “sintonizzarsi” su forme via via diverse, che talvolta cambiano con continuità e altre volte in modo brusco e inaspettato. Si tratta di una forma di “matematica sperimentale” in cui il computer ci permette di esplorare i diversi comportamenti asintotici, ovvero i diversi tipi di attrattori che si ottengono al variare di uno o più parametri contenuti nella funzione o della condizione iniziale dalla quale l'intera successione di punti è generata induttivamente. Infatti può accadere che una data funzione, ovvero con parametri fissati, ci mostri diversi tipi di comportamenti asintotici partendo da diverse condizioni iniziali. In tal caso si dice che la funzione ha più attrattori coesistenti, ciascuno col proprio *bacino di attrazione*, formato dai punti che, presi come condizioni iniziali, generano ciascuno una successione convergente ad esso. Gli “spartiacque” che separano i diversi bacini possono avere a loro volta forme semplici o complicate, e possono quindi costituire un'ulteriore causa di incertezza sul destino delle sequenze di punti generate. Talvolta cambiando il punto iniziale di pochissimo, anche in modo impercettibile, la successione generata viene catturata da un attrattore completamente diverso, ad esempio un punto di equilibrio anziché un attrattore caotico o un ciclo periodico. Raramente i contorni esatti delle frontiere che separano i diversi bacini possono essere determinati analiticamente, cioè attraverso

metodi puramente algebrici o geometrici, e quindi di nuovo entrano in gioco le prove numeriche che consistono nel generare tante successioni di punti mediante i ripetuti calcoli effettuati rapidamente da programmi per computer (anche molto semplici).

Di nuovo una forma di matematica sperimentale, in cui il computer svolge un ruolo simile a quello del telescopio per gli astronomi o del microscopio per i biologi e dell'acceleratore per i fisici. Si generano tante sequenze numeriche per scandagliare le (talvolta contorte) frontiere che separano i diversi bacini e per "vedere" le forme degli attrattori che vi sono contenuti. Un modo curioso e affascinante per scoprire nuove strutture matematiche emergenti dalla semplice applicazione ripetuta di una semplice funzione, che permettono di osservare nuovi oggetti matematici e studiarne le proprietà, introducendo definizioni, formulando congetture, coinvolgendo i settori più disparati della matematica: dalla geometria differenziale alla topologia, dalla teoria delle singolarità (comprese le biforcazioni o catastrofi) alla teoria dei frattali.

3. Attrattori, nuvole di punti, strutture emergenti

Consideriamo la trasformazione che a un qualsiasi punto del piano (x,y) associa il punto (x',y') calcolato nel modo seguente:

$$x' = -0.42x + y; \quad y' = x^2 - 1.6$$

Data una condizione iniziale, ad esempio $(0,0)$ possiamo calcolare il punto successivo $(0, -1.6)$ e poi da questo possiamo ottenere il secondo punto della successione $(-1.6, -1.6)$ inserendo il quale nell'espressione della funzione otteniamo il terzo $(0.928, 0.96)$ e così via. I primi 10 punti generati in questo modo sono mostrati nel pannello di sinistra della Figura 1. I punti della successione si sparpagliano sul piano, muovendosi senza un ordine apparente. Inoltre, iniziando con una condizione iniziale di poco diversa da $(0,0)$, ad esempio $(0, 0.01)$ ci si rende ben presto conto che la nuova successione differisce dalla precedente con uno scarto fra i corrispondenti punti ottenuti ben superiore. Infatti, partendo dalla prima, dopo 30 iterazioni otteniamo $(x_{30}, y_{30}) = (-0.35, -1.18)$ mentre con la seconda condizione iniziale si ottiene $(x_{30}, y_{30}) = (1.14, -0.68)$, una bella differenza. Questo fenomeno viene detto *sensitività rispetto alle condizioni iniziali*, an-

che se è ormai comunemente chiamato *effetto farfalla* dopo che nel 1972 il meteorologo Edward Lorenz descrisse l'osservazione di questo fenomeno nelle soluzioni delle equazioni dinamiche utilizzate per effettuare le previsioni del tempo mediante una relazione dal titolo *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*

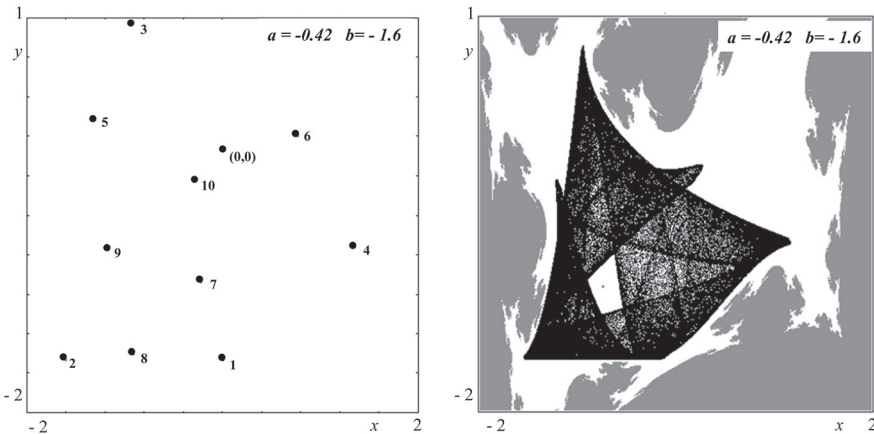


Fig. 1.

L'andamento erratico dei punti generato da simili equazioni, insieme al fenomeno della sensibilità rispetto alle condizioni iniziali, hanno portato a coniare il termine *caos deterministico*, un ossimoro utilizzato per la prima volta in un articolo di Tien-Yien Li e James Yorke del 1975. Caos infatti identifica qualcosa ottenuto attraverso azioni imprevedibili, casuali, mentre deterministico denota un processo il cui esito è calcolabile univocamente, ovvero prevedibile. Ed in effetti la successione erratica di punti ottenuti, e per di più così sensibile a piccole (anche impercettibili) variazioni nella condizione di partenza, presenta tipiche caratteristiche della casualità, ma in realtà viene a ogni passo ottenuta mediante un calcolo perfettamente deterministico.

Ma una ulteriore sorpresa arriva continuando a iterare, quando la nuvola inizialmente disordinata di punti inizia ad assumere, mano a mano che il numero di punti cresce, una forma ben definita, con contorni netti e una struttura geometrica simile a veli ripiegati, come mostrato nel pannello di destra di Figura 1, ottenuto continuando la successione di punti i cui

passi iniziali sono mostrati nel pannello di sinistra fino a raggiungere centomila iterazioni (una questione di pochi secondi utilizzando un computer). Partendo da qualunque punto della zona bianca, preso come condizione iniziale, dopo pochi passi iniziali la successione di punti così ottenuta entra nella zona identificata dal velo ripiegato in figura e iterando si annerisce sempre di più la stessa identica forma. Si tratta pertanto di una struttura stabile, detta *attrattore*, che “cattura” tutte le traiettorie che iniziano da un dato bacino di attrazione, rappresentato appunto dalla regione bianca in figura. Le condizioni iniziali prese nella regione grigia generano invece successioni divergenti, ovvero punti che si allontanano indefinitamente e non tornano più indietro. Come si può vedere, il confine che separa i due bacini è molto frastagliato, con una struttura che mostrerebbe dettagli sempre più minuti se si considerassero ingrandimenti, con proprietà di autosimilarità (o omotetia interna) tipiche delle curve frattali, si vedano su questo punto i volumi di Mandelbrot citati nella bibliografia, e l’enorme letteratura da questi generata.

Esistono altri tipi di attrattori, come un semplice punto di equilibrio, detto anche *punto fisso* in quanto prendendo su di esso la condizione iniziale le iterazioni non fanno altro che ripetere il medesimo punto, come accade per il punto di coordinate approssimativamente uguali a $(-0.7406, -1.0516)$ che sta al centro del “buco” dell’attrattore di Figura 1. Quel punto di equilibrio però è instabile, cioè partendo da una condizione iniziale non perfettamente coincidente con esso, sebbene vicinissima, la successione generata si allontanerà, come se ne venisse respinta. Simili equilibri sono anche detti repulsivi. Occorre cambiare i valori dei coefficienti della funzione per ottenerne uno attrattivo. Scrivendo la trasformazione nella forma più generale

$$x' = ax + y; \quad y' = x^2 + b$$

e assegnando ai coefficienti a e b valori diversi (ma mantenendoli poi costanti durante il processo di iterazione) si possono ottenere diversi tipi di attrattori. Ad esempio, con $a = 0.7$ e $b = -0.3$ si ottiene un punto di equilibrio stabile (si veda il pannello di sinistra in Figura 2) verso il quale convergono tutte le successioni generate dalle condizioni iniziali contenute nel suo bacino di attrazione, rappresentato dalla regione bianca in Figura 1.

4. I parametri come manopole

È quindi evidente che assegnando ai parametri valori diversi si ottengono diversi attrattori. I parametri diventano cioè delle manopole, o dei cursori, al cui variare si modifica la forma dell'attrattore di turno e del relativo bacino di attrazione. Talvolta si tratta di piccoli cambiamenti che non alterano le proprietà topologiche delle forme ottenute, altre volte invece piccole variazioni dei parametri possono provocare drastici cambiamenti di tali forme, e allora si dice che si verifica una *biforcazione* (o *catastrofe*, termine utilizzato dallo studioso inglese Christofer Zeeman nel commentare i risultati sulla classificazione di certe biforcazioni elementari ottenuti dal matematico francese René Thom negli anni Settanta del secolo scorso, un termine che ha provocato non pochi equivoci sulla portata e le implicazioni della teoria, che fu in quegli anni spesso chiamata *teoria delle catastrofi*).

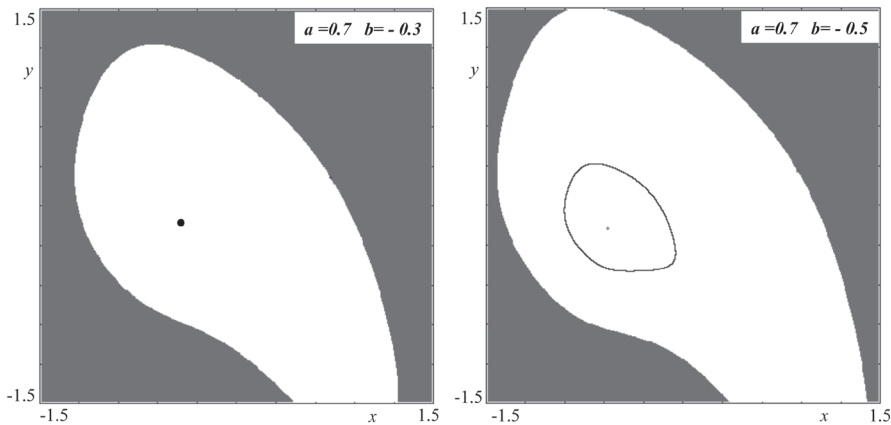


Fig. 2.

Ad esempio, diminuendo il parametro b l'equilibrio perde stabilità e diventa repulsivo, con la simultanea comparsa di una curva chiusa che lo circonda verso la quale vengono attratte tutte le successioni che nascono nella regione bianca (pannello destro in Figura 2, dove $b=-0.5$) che poi continuano a muoversi lungo quella curva indefinitamente. Diminuendo ancora il parametro b la curva si ingrandisce e cambia forma (Figura 3 a sinistra, ottenuta con $b=-0.7$). L'attrattore diventa poi un ciclo periodico di periodo 11 per $b=-0.75$, come mostrato nel pannello destro in Figura 3.

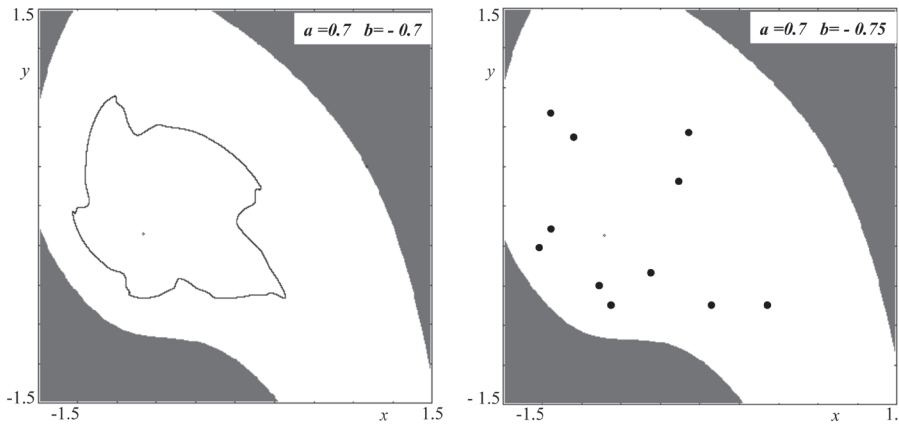


Fig. 3.

In questo caso, partendo da uno qualsiasi di quegli 11 punti ci si ritorna dopo esattamente 11 iterazioni, dopodiché la sequenza degli 11 valori si ripete indefinitamente, sempre uguale. Ma le sorprese non finiscono qui: muovendo ancora la “manopola b ” ci si “sintonizza” su attrattori via via differenti, a volte persino su più attrattori simultaneamente, ciascuno col suo bacino di attrazione. È quanto accade nella situazione mostrata in Figura 4 a sinistra, ottenuta per $b=-0.77$, in cui il ciclo di periodo 11, nel frattempo diventato un attrattore più complesso composto ancora da 11 pezzi, coesiste con un ciclo periodico di periodo 6, anch’esso attrattivo. La regione bianca rappresenta ancora il bacino di attrazione dell’attrattore a 11 pezzi, mentre le condizioni iniziali prese nelle zone in grigio scuro convergono al ciclo di periodo 6. Non lo abbiamo più specificato, però in tutte queste figure la zona grigia rappresenta sempre il bacino dell’infinito, ovvero delle condizioni iniziali che generano traiettorie divergenti, quindi possiamo dire che per $a=0.7$ e $b=-0.77$ si hanno tre attrattori coesistenti, di cui uno a distanza infinita. Un’ulteriore diminuzione del parametro b fa cessare questa coesistenza, in quanto per $b=-0.83$ si ha un solo attrattore a distanza finita, un tipico attrattore caotico (detto anche *attrattore strano* nella letteratura sui sistemi dinamici) che è mostrato nel pannello destro della Figura 4, la cui forma ci ricorda un po’ quello in Figura 1, anche se con diverse convoluzioni e ripiegamenti, una sorta di versione più barocca dell’attrattore in Figura 1.

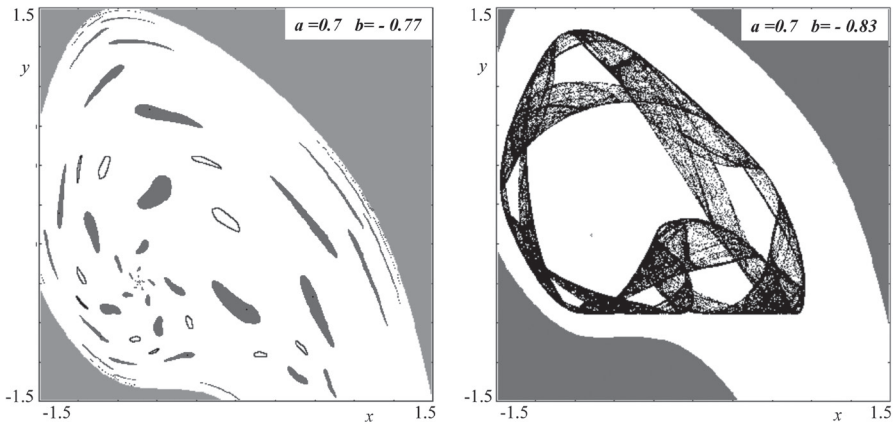


Fig. 4.

Altri esempi ottenuti con la stessa funzione esplorando diversi ranges di parametri sono mostrati in Figura 5.

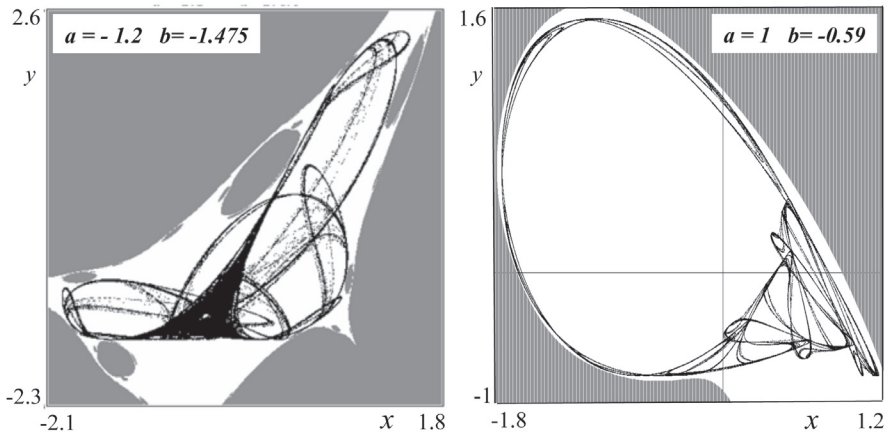
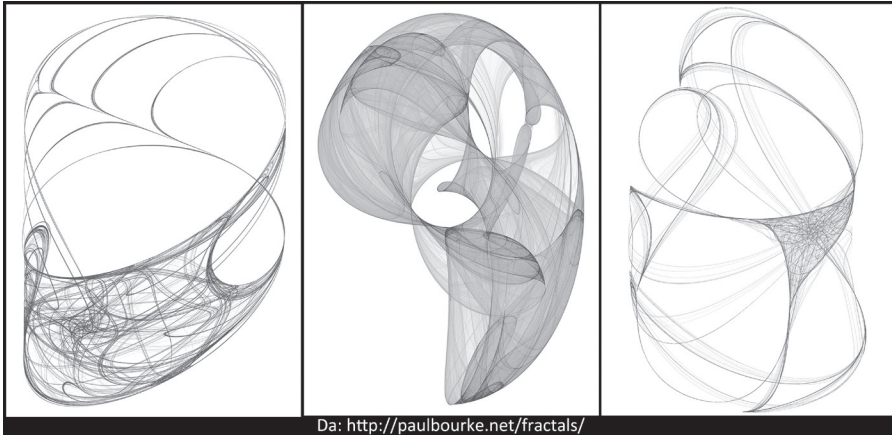


Fig. 5.

Nella storia appena narrata abbiamo mostrato cosa significhi adottare un approccio sperimentale verso le proprietà matematiche delle successioni definite mediante formule ricorsive, ovvero generate induttivamente iterando una data funzione del piano cartesiano in sé. Si tratta di un modo

nuovo, sicuramente stimolante e per certi aspetti anche divertente, di ottenere oggetti matematici con curiose proprietà geometriche che, ovviamente, vanno studiate, interpretate e catalogate. Lo strumento che ci consente una simile esplorazione è il computer, dato che le forme di attrattori e bacini di attrazione mostrate nelle figure sono state ottenute attraverso il calcolo di una stessa espressione migliaia di volte. Le forme e le qualità estetiche degli attrattori così ottenuti hanno stimolato la curiosità e la fantasia di tanti operatori che fossero in grado di scrivere o semplicemente utilizzare dei brevi programmi software in grado di eseguire gli esperimenti numerici sopra descritti. Pionieri in questo senso sono stati due studiosi di Tolosa, Igor Gumowski e Christian Mira, che già negli anni Settanta del XX secolo utilizzavano computer e plotter per realizzare tavole esteticamente attraenti che poi pubblicarono come illustrazioni, intitolate «Chaos esthétique», per abbellire il loro importante testo del 1980. Su queste tavole compariva in didascalia l'espressione della funzione del piano iterata, con i valori dei parametri utilizzati per ottenere forme gradevoli, a cui assegnavano anche dei nomi che ricordavano oggetti ai quali gli attrattori assomigliavano. E furono veri precursori, perché cercando in rete attrattori strani ci si imbatte in tante pagine che ci offrono espressioni di funzioni in grado di generare forme belle o curiose, talvolta curate da giovani dilettanti, altre volte da matematici noti. A titolo di esempio riportiamo in Figura 6 alcune immagini di attrattori realizzate dal programmatore Paul Bourke, che nel suo sito internet scrive:

There may be (probably is) some way to telling if a particular set of constants produces an attractor but I am not a mathematician, which means I don't really care. I basically write a program to pick them at random and see what comes out. Most sets diverge, some converge to a point, some converge to a boring loop, and only few produce good-looking pictures. These things are called attractors, not because they're attractive, but because they attract reasonable points. [...] What is a strange attractor? I, of course, do not know the formal, mathematical, definition of Chaotic Attractors, but I will do my best to correctly guess it. Strange Attractor is a collection of points such that each point is a function of another point. What kind of function? Everything from polynomials to transcendentals. Like a randomly-appearing mosaic - instead of individual features appearing one after the other, dots light up and eventually compose distinct shapes.



Da: <http://paulbourke.net/fractals/>

Fig. 6.

5. Un po' di ordine nel caos: stiramenti e ripiegamenti

Cerchiamo ora di capire, pur senza entrare nei dettagli, alcune proprietà delle funzioni iterate che portano alla “creazione” di attrattori caotici e a giustificare, almeno in parte, le forme che questi assumono. Per capire meglio queste proprietà, e in particolare il ruolo essenziale della non linearità delle funzioni considerate, iniziamo con l'esame di funzioni in una variabile, più semplici da analizzare e da disegnare, per poi passare alle coppie di funzioni in due variabili, ovvero funzioni del piano in sé come quelle esplorate finora, le cui proprietà verranno interpretate per confronto con le analoghe proprietà di quelle in una variabile. Un po' come nel romanzo *Flatlandia* del reverendo Abbot (1884) in cui si utilizza la comprensione di mondi a bassa dimensionalità per intuire le proprietà di mondi a più dimensioni.

5.1. Trasformazioni di Linelandia: attrattori caotici unidimensionali

Una funzione lineare $f(x)=ax$ nella singola variabile reale x trasforma punti di una retta (asse delle ascisse) in altri punti della stessa retta. Può essere anche considerata come una trasformazione che muta segmenti in altri segmenti, producendo contrazioni, o allungamenti. Consideriamo ad esempio un segmento AB rappresentato sull'asse delle ascisse dalla porzione di

estremi x_A e x_B . La sua lunghezza è data da $AB = (x_B - x_A)$. Applicando la trasformazione lineare a tutti i punti di AB si ottiene un segmento di estremi $x'_A = ax_A$ e $x'_B = ax_B$ di lunghezza $A'B' = (x'_B - x'_A) = a(x_B - x_A)$. Questo significa che il segmento risulta allungato (o dilatato) se $a > 1$, accorciato (o contratto) se $0 < a < 1$, e la trasformazione viene chiamata, rispettivamente, *dilatazione* e *contrazione*. Se $a < 0$ allora il segmento viene anche ribaltato, ossia l'immagine di x_B precede l'immagine di x_A , e il segmento trasformato risulta essere $B'A'$. Quindi per $-1 < a < 0$ la trasformazione lineare provoca una *ribaltamento e contrazione* del segmento, per $a < -1$ si ha un *ribaltamento con dilatazione*.

Possiamo dedurre che l'applicazione ripetuta di una mappa lineare contrattiva porta alla successiva riduzione di un segmento fino a farlo collassare in un punto (un equilibrio attrattivo), mentre l'iterazione di una dilatazione lineare allunga sempre più il segmento facendolo crescere a dismisura (una tipica iterazione divergente).

Se invece consideriamo una funzione non lineare, come la parabola $f(x) = ax(1-x)$, questa agisce su un segmento allungandolo in certe zone e comprimendolo in altre e, se il segmento considerato include il vertice $x=1/2$, lo ripiega anche. Due punti in posizione simmetrica rispetto al vertice della parabola, ad esempio $x_A=1/3$ e $x_B=2/3$, vengono trasformati nello stesso punto, essendo $f(1/3)=f(2/3)=2/9a$. Questo può essere espresso dicendo che il segmento $AB=[1/3, 2/3]$ viene ripiegato dalla funzione portando a coincidere i suoi estremi. Equivalentemente si può dire che la funzione di secondo grado ha due inverse, ovvero dato un punto $x' < a/4$ nel codominio si hanno due

punti distinti nel dominio, dati da $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{a(a-4x')}}{2a}$.

Avviene quindi che l'applicazione ripetuta della funzione di secondo grado su un segmento può essere vista come l'applicazione successiva di azioni di stiramento, piegamento, compressione. L'effetto combinato di queste azioni è possibile solo con funzioni non lineari, in quanto, come abbiamo fatto notare sopra, una funzione lineare o dilata o contrae (ma non entrambe le cose contemporaneamente) e non può certo causare piegamenti. Ebbene, l'essenza del caos risiede proprio nell'applicazione combinata e ripetuta di queste azioni, in particolare di quelle che provocano stiramenti e ripiegamenti (*stretching & folding*). Consideriamo il segmento AB nel pannello di sinistra della Figura 7. Applicando la funzione al segmento, quest'ultimo viene contemporaneamente stirato e ripiegato su se stesso. Il

segmento si curva nel punto che corrisponde al vertice della parabola ed i punti opposti rispetto ad esso si sovrappongono (ad esempio $f(A)=f(B)$ e $f(x_1)=f(x_2)$). Con questa prima iterazione punti inizialmente distanti finiscono per coincidere. La seconda iterazione applica nuove azioni di stiramento e ripiegamento al segmento (pannello di destra della Figura 7), azioni che si ripetono ad ogni successiva applicazione della funzione. Ciascuna iterazione modifica la posizione dei punti, avvicinandoli o allontanandoli di volta in volta. La conseguenza di questo procedimento, ripetuto nel tempo, è che punti inizialmente vicini si allontanano e poi si riavvicinano in modo imprevedibile, fino a rimescolare uniformemente il tutto, pur rimanendo all'interno dell'insieme compatto. Una trattazione rigorosa di queste proprietà geometrica è stata fornita nel 1967 dal matematico americano Steven Smale nella sua celebre teoria del ferro di cavallo (*horse-shoe*).

La parabola considerata in questo paragrafo, nota anche come “mappa logistica”, è uno degli esempi più noti di funzioni a una variabile in grado di generare caos deterministico. Il pannello sinistro della Figura 8 descrive il comportamento caotico determinato dalla ripetizione delle azioni appena descritte. Utilizzando il metodo geometrico detto *staircase diagram* è possibile, partendo da uno stato iniziale $x(0)$, stabilire la traiettoria ottenuta iterando la mappa logistica. La prima iterazione, la prima applicazione di

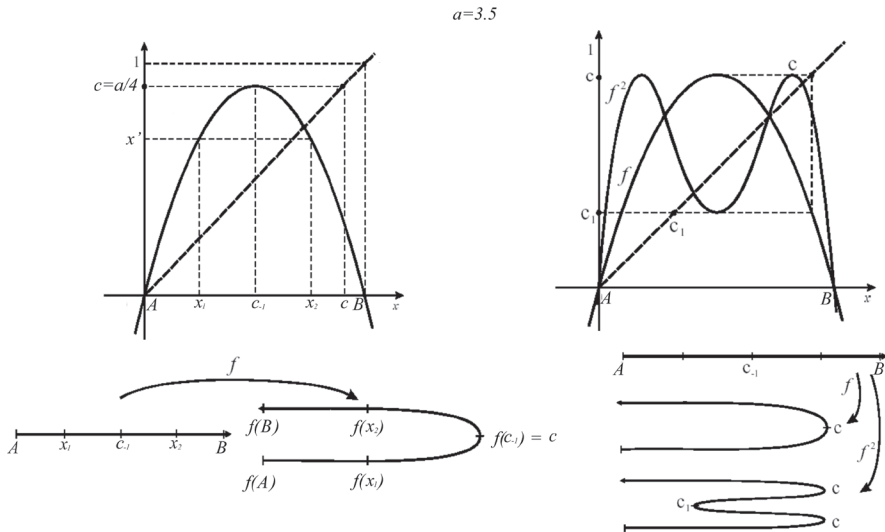


Fig. 7.

queste azioni di stiramento e ripiegamento, sposta il punto iniziale verso destra, così come le successive due iterazioni; la quarta, invece, riporta il valore della variabile x vicino allo stato iniziale. I successivi iterati si alternano ancor più disordinatamente e la risultante traiettoria è confusa. Caotica, appunto. Le iterazioni finiscono per coprire un intervallo delimitato, detto *assorbente*, i cui confini corrispondono al punto di massimo della parabola e alle sue immagini.

Torniamo per un momento alle manopole: i parametri. Come detto, data una funzione (o mappa) che descrive il comportamento della variabile x nel tempo, a diversi valori del parametro sono associati differenti attrattori. Per “visualizzare” il comportamento asintotico della mappa al variare del parametro si ricorre al *diagramma di biforcazione*, un diagramma qualitativo che riporta sull’asse delle ascisse i valori del parametro utilizzato come “manopola” e sull’asse delle ordinate i valori dei punti fissi stabili a cui la traiettoria converge, dato ogni valore di a . Il diagramma di biforcazione per la mappa logistica è riportato nel pannello destro della Figura 8.

Per valori del parametro a minori di 3, la mappa converge ad un punto fisso stabile. Per $a=3$ avviene la prima biforcazione: il punto fisso diviene repulsivo ed è sostituito da un’orbita periodica di periodo 2. Spostandoci ancora verso destra e sintonizzandoci su valori del parametro via via più grandi si susseguono nuove biforcazioni con raddoppio del periodo: il ciclo-2 perde stabilità ed è sostituito da un’orbita di periodo 4, che a sua volta lascerà il posto ad un ciclo attrattivo di periodo 8. Tali biforcazioni sono sempre più frequenti man mano che ci si sposta verso destra fino ad essere

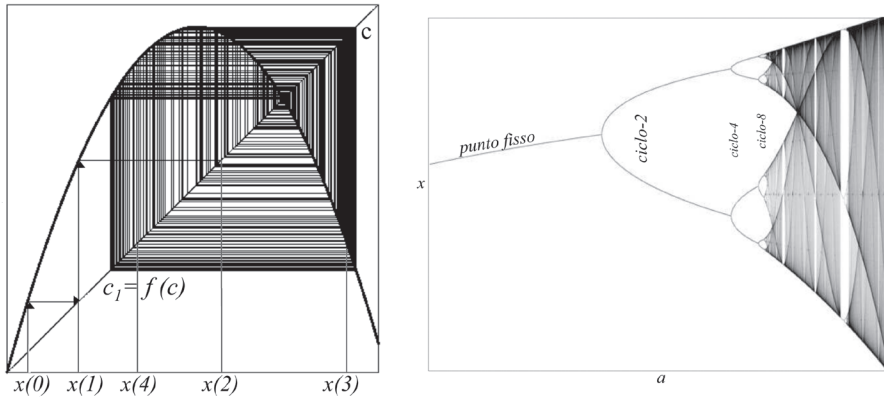


Fig. 8.

tanto vicine da sembrare indistinguibili. Il raddoppio di periodo prosegue finché a raggiunge il valore 3.56994, detto *punto di Feigenbaum*. Per tale valore infiniti cicli instabili sono stati creati, e la presenza di tanti punti repulsivi in uno spazio limitato costringe le traiettorie ad avere andamenti così frastagliati da sembrare caotici, come il moto della pallina nel flipper, respinta continuamente dai repulsori. Le traiettorie non sono più periodiche: il regime caotico si è manifestato.

5.2. Trasformazioni di Flatlandia: veli ripiegati e grovigli filiformi

La funzione del piano analizzata nei precedenti paragrafi presenta proprietà analoghe a quelle della funzione logistica. Infatti a causa del termine di secondo grado, vale la stessa proprietà di trasportare punti distinti nel medesimo punto: ad esempio dato un punto $(x\ell, y\ell)$ del codominio con $y\ell > b$ si ottengono due soluzioni distinte:

$$(x_1, y_1) = (-\sqrt{y'\ell - b}, x'\ell + a\sqrt{y'\ell - b}) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2) = (\sqrt{y'\ell - b}, x'\ell - a\sqrt{y'\ell - b})$$

mentre non si hanno soluzioni se $y\ell < b$. Pertanto la retta $y = b$ divide il piano in due semipiani i cui punti hanno due preimmagini o nessuna, mentre i punti della retta $y = b$ hanno ciascuno due preimmagini coincidenti che si trovano sulla retta $x = 0$. Ad esempio, se consideriamo la funzione con $a = 1$, $b = -2$, le due preimmagini del punto $P=(1,2)$ sono $(-2,3)$ e $(2, -1)$. Lo stesso concetto può venire espresso dicendo che applicando la funzione ai due punti distinti $P_1 = (-2, 3)$ e $P_2 = (2, -1)$ si ottiene la stessa immagine $P=(1, 2)$. Anche in questo caso, quindi, si tratta di una funzione con due inverse che ripiega il piano fino a portare punti distinti a sovrapporsi, come quando si piega e si stira un fazzoletto. In analogia con quanto visto per la mappa logistica, l'azione delle due inverse può essere visualizzata immaginando un foglio (anziché una linea) ripiegato in due parti, con la piega che corrisponde alla retta che separa le due inverse, ovvero $y=b$. Su ciascuno di questi fogli è definita una sola inversa e la piega che suddivide il foglio corrisponde alla linea in cui le due inverse vengono a coincidere, detta linea critica (o LC, dal francese *ligne critique*).

L'azione di ripiegamento può essere evidenziata analizzando come viene trasformata una figura del piano, come ad esempio il cerchio F mostrato in Figura 9, in cui la figura trasformata F' non è altro che l'insieme delle

immagini di una griglia di punti interni al cerchio. Come si può vedere, il cerchio che attraversa la retta $x=0$ viene ripiegato lungo la retta LC . È proprio a causa di questa azione di ripiegamento che gli attrattori caotici delle mappe non invertibili del piano hanno spesso una forma che richiama quella di veli ripiegati su se stessi infinite volte.

Esula dagli scopi di una esposizione elementare addentrarci ulteriormente nell'argomento, pertanto rimandiamo a testi specializzati per eventuali approfondimenti, si vedano ad esempio lavori come quelli di R. Abraham, L. Gardini e C. Mira, *Chaos in Discrete Dynamical Systems* (1997), o di C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J.C. Cathala, *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps* (1996).

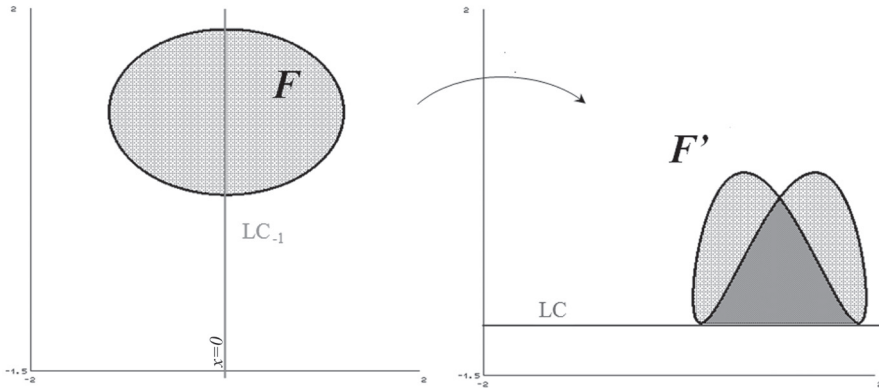


Fig. 9.

6. Un esempio di caos simmetrico

Un altro modo per mettere ordine nel caos, e addirittura riuscire a prevedere in certi casi le forme che caratterizzano gli attrattori caotici, consiste nel rilevare certe proprietà di simmetria nelle funzioni che vengono iterate. Un oggetto gode di una simmetria quando rimane inalterato in seguito a una determinata trasformazione. Si consideri, ad esempio, la seguente funzione del piano in sé

$$x' = ay(1-y) + b(x-y); \quad y' = ax(1-x) + b(y-x)$$

che può essere vista come l'accoppiamento di due funzioni logistiche di

parametro a mediante un legame lineare la cui intensità è misurata dal parametro b . Si può notare che la funzione rimane inalterata in seguito allo scambio di x con y . Dato un qualunque punto $P=(x,y)$ sul piano cartesiano, lo scambio di x e y provoca il suo spostamento nella posizione simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y=x$, i cui punti, ovviamente, non sono modificati dallo scambio (sono, cioè, i punti uniti della simmetria assiale). Questo significa che se un punto appartiene a un attrattore di quella funzione, allora anche il simmetrico deve godere della stessa proprietà, dato che non solo la funzione ma anche tutte le sue proprietà devono essere invarianti rispetto allo scambio delle variabili x e y . Questo significa che ogni attrattore di questa funzione iterata o ha una forma simmetrica rispetto alla bisettrice oppure, se non è così, ci sarà un altro attrattore coesistente “gemello” in posizione simmetrica rispetto alla bisettrice, ognuno col proprio bacino di attrazione (bacini, ovviamente, a loro volta simmetrici). Queste due situazioni sono rispettivamente rappresentate in Figura 10, dove nella parte di sinistra si ha un unico attrattore caotico simmetrico rispetto alla bisettrice (e simmetrico è anche il suo bacino di attrazione rappresentato dalla regione bianca) mentre nella parte destra si hanno due attrattori coesistenti, uno in posizione simmetrica rispetto all'altro, con bacini a loro volta simmetrici, rappresentati dai due diversi colori.

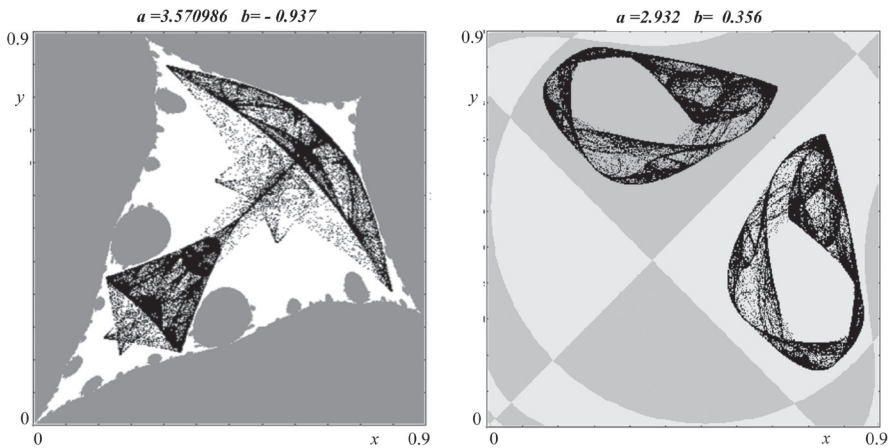
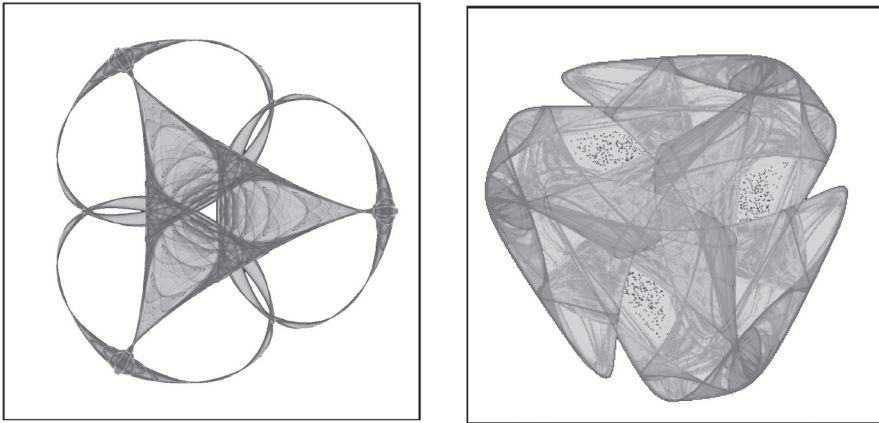


Fig. 10.

qualunque coppia di valori assegnati ai due parametri una cosa sarà sempre certa: gli attrattori che si ottengono saranno simmetrici oppure accoppiati ad altri attrattori in posizione simmetrica e con bacini simmetrici.

Alcuni autori hanno proposto funzioni dotate di particolari simmetrie che, quando vengono iterate, generano attrattori dotati delle medesime simmetrie, che conferiscono loro un aspetto di notevole valore estetico. Maestri in questo senso si sono rivelati gli studiosi americani Mike Field e Martin Golubitsky, che nel loro volume pubblicato nel 2009, così come sul sito internet da loro curato, mostrano immagini come quelle riprodotte in Figura 11, ottenute iterando funzioni invarianti rispetto a rotazioni di 120° , e offrendo semplici programmi per iterare numericamente tali funzioni. Una sorta di creatività matematica per ottenere belle immagini disegnate da pennelli di luce (pixel) guidati dall'applicazione ripetuta di funzioni matematiche. Una nuova forma di arte? A tale proposito si veda anche il volume di Stewart e Golubitsky *Terribili simmetrie. Dio è un geometra?* (1985).



Da: <http://people.mbi.ohio-state.edu/mgolubitsky>

Fig. 11.

BIBLIOGRAFIA

- E. ABBOTT ABBOTT *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, 1884 (trad. it. *Flatlandia: storia fantastica a più dimensioni*, Adelphi, Milano, 2003)
 R. ABRAHAM, L. GARDINI, C. MIRA, *Chaos in Discrete Dynamical Systems. A Visual Introduction in 2 Dimensions*, Springer Verlag, New York 1997.

- K.T. ALLIGOOD, T.D. SAUER, J.A. YORKE, *Chaos. An introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag, New York 1997.
- V. ARNOLD, *Catastrophe theory*, Springer, Berlin 1992.
- R.W. BATTERMAN, *Defining Chaos*, in «Philosophy of Science», LX, 1993, pp. 43-66.
- G.I. BISCHI, R. CARINI, L. GARDINI, P. TENTI, *Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*, Bruno Mondadori Editore, Milano 2004.
- G.I. BISCHI, *Caos deterministico, modelli matematici e prevedibilità*, in «APhEx, Il portale italiano di filosofia analitica, Giornale di Filosofia», II, 2010.
- R.L. DEVANEY, *Caos e frattali. Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni al calcolatore*, Addison Wesley Longman Italia, Milano 1990.
- M. FIELD, M. GOLUBITSKY, *Symmetry in Chaos: A Search for Pattern in Mathematics, Art, and Nature*, SIAM, Philadelphia 2009.
- J. GLEICK, *Chaos. The amazing science of the unpredictable*, Penguin, Allen Lane 1987 (trad. it. *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Sansoni, Firenze, 1996).
- I. GUMOWSKI, C. MIRA, *Dynamique Chaotique*, Cepadues Editions, Toulouse, 1980.
- T.Y. LI, J.A. YORKE, *Period Three Implies Chaos*, in «American Mathematical Monthly», LXXXII, 1975, pp. 985-92.
- E.N. LORENZ, *Deterministic non-periodic flow*, in «Journal of the Atmospheric Sciences», XX, 1963, pp. 130-141.
- E.N. LORENZ, *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?* 139° meeting dell'American Association for the Advancement of Science, 1972.
- B. MANDELBROT, *Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione*, Einaudi, Torino 1987.
- B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman & Co, New York 1982.
- R.M. MAY, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, in «Nature», CCLXI, 1976, pp. 459-467.
- C. MIRA, L. GARDINI, A. BARUGOLA, J.C. CATHALA, *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*, World Scientific, Singapore, 1996.
- H.O. PEITGEN, P.H. RICHTER, *La bellezza dei frattali*, Bollati Boringhieri, Torino 1987.
- H.O. PEITGEN, H. JÜRGENS, D. SAUPE, *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York 1992.
- C.A. PICKOVER, *Chaos in wonderland*, St. Martin's Press, New York 1995
- S. SMALE, *La matematica sulla spiaggia. Il caos e il ferro di cavallo*, Di Renzo Editore, Roma 2001.
- I. STEWART, M. GOLUBITSKY, *Terribili simmetrie. Dio è un geometra?* Bollati Boringhieri, Torino 1995.
- I. STEWART, *Does God play dice? The new mathematics of Chaos*, Penguin books, London 1997 (trad. it. *Dio gioca a dadi ?*, Bollati Boringhieri, Torino, 1993).
- R. THOM, *Stabilità strutturale e morfogenesi*, Einaudi, Torino 1980.