

Quando una farfalla può fare la differenza. Il caos deterministico e la geometria dei sistemi dinamici

Gian Italo Bischi
DESP - Dipartimento di Economia, Società, Politica
Università di Urbino "Carlo Bo"

gian.bischi@uniurb.it

<http://www.mdef.it/gian-italo-bischi/>

04/09/17 San Pellegrino, 4 settembre 2017

Poincaré e il re



Henri Poincaré (1854-1912)



Re Oscar II di Svezia (1829-1907)

Weierstrass: "Questo lavoro non si può considerare la soluzione del problema proposto, tuttavia è di tale importanza che la sua pubblicazione inaugurerà una nuova era nella storia della meccanica celeste."
04/09/17

Newton: The fundamental Anagram of Calculus

Dalla seconda lettera di Newton a Leibniz (1667): *“The foundations of these operations is evident enough, in fact; but because I cannot proceed with the explanation of it now, I have preferred to conceal it thus: 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux.”*



Un piccolo esercizio di crittografia:

“Data aequatione quocunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa”

Data un'equazione che contiene un numero qualunque di “quantità fluenti” [derivate] trovare le “flussioni” [primitive], e viceversa.

Vediamo allora che ogni cosa procede in modo matematico - cioè infallibilmente - nel mondo intero, in modo che se qualcuno avesse una sufficiente capacità di conoscere a fondo le cose, e avesse abbastanza intelligenza e memoria per considerare tutte le circostanze e tenerne conto, questi potrebbe essere un profeta e potrebbe vedere il futuro nel presente come in uno specchio



Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646 -1716

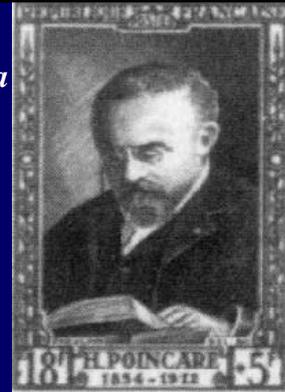
“Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro”



Pierre-Simon Laplace
1749-1827

Henry Poincaré (1903)

Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.



Henry Poincaré, 1854-1912

Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto.

Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali..

04/09/17

Legge di crescita di una popolazione. Siano $n > 0$ e $m > 0$ i tassi specifici di natalità e mortalità.

$$\text{Legge di evoluzione: } \frac{dx}{dt} = nx - mx = (n - m)x = rx$$

$$r = \frac{\dot{x}}{x} \quad \begin{array}{l} \text{tasso di crescita netto} \\ \text{per unità di popolazione} \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \begin{array}{l} \text{Equazione} \\ \text{differenziale primo} \\ \text{ordine lineare} \end{array}$$

con $x(t_0) = x_0$ cond. iniziale

Soluzione

$$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$$

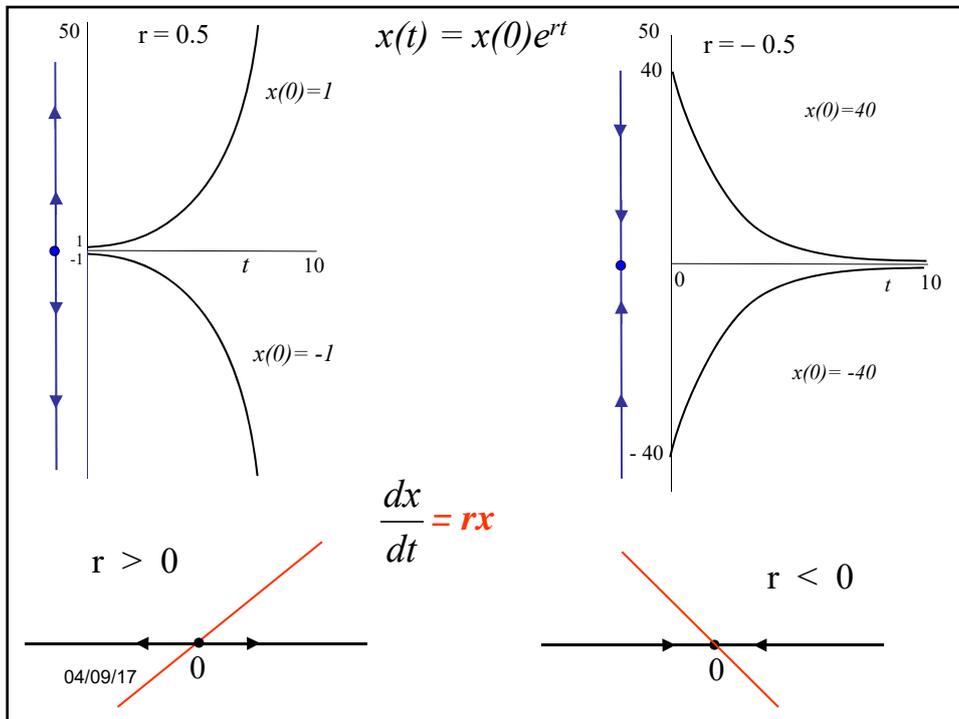
Legge esponenziale

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \text{con } x(t_0) = x_0$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t r dt \quad \Longrightarrow \quad [\ln(x)]_{x_0}^{x(t)} = r[t]_{t_0}^t$$

$$\ln x(t) - \ln x_0 = r(t - t_0)$$

$$\ln \frac{x(t)}{x_0} = r(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t)}{x_0} = e^{r(t-t_0)}$$



Popolazione che vive in un ambiente limitato

Al crescere della densità di popolazione cresce la mortalità per mancanza di cibo, spazio...):

Tasso di crescita: $n - m - sx = r - sx$

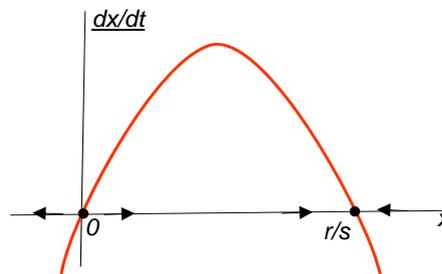
Allora: $\frac{dx}{dt} = (r - sx)x$ **Crescita logistica**

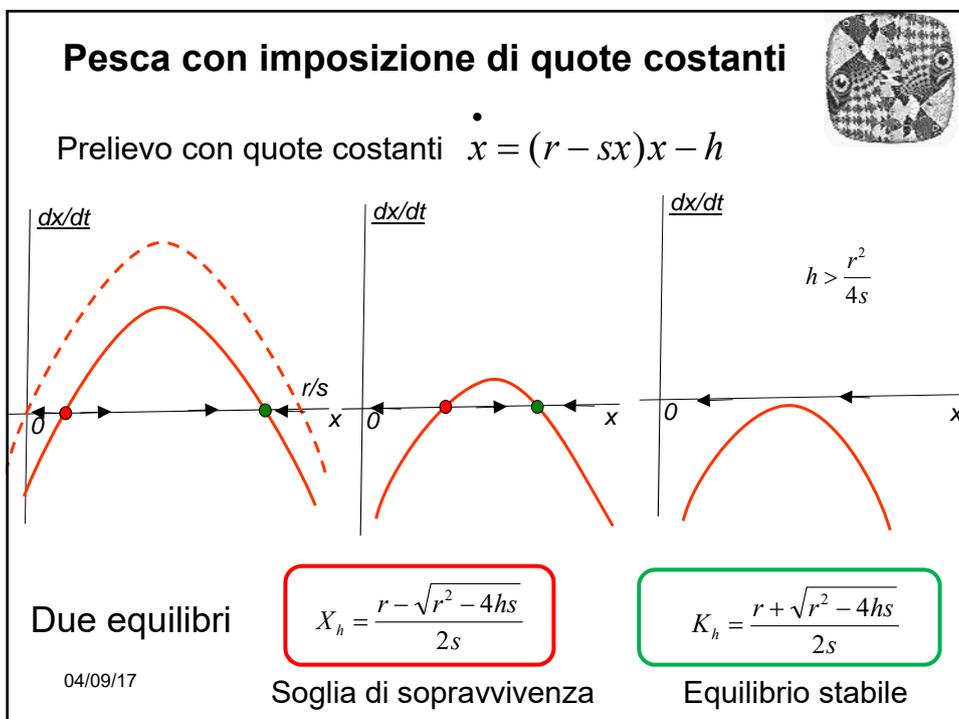
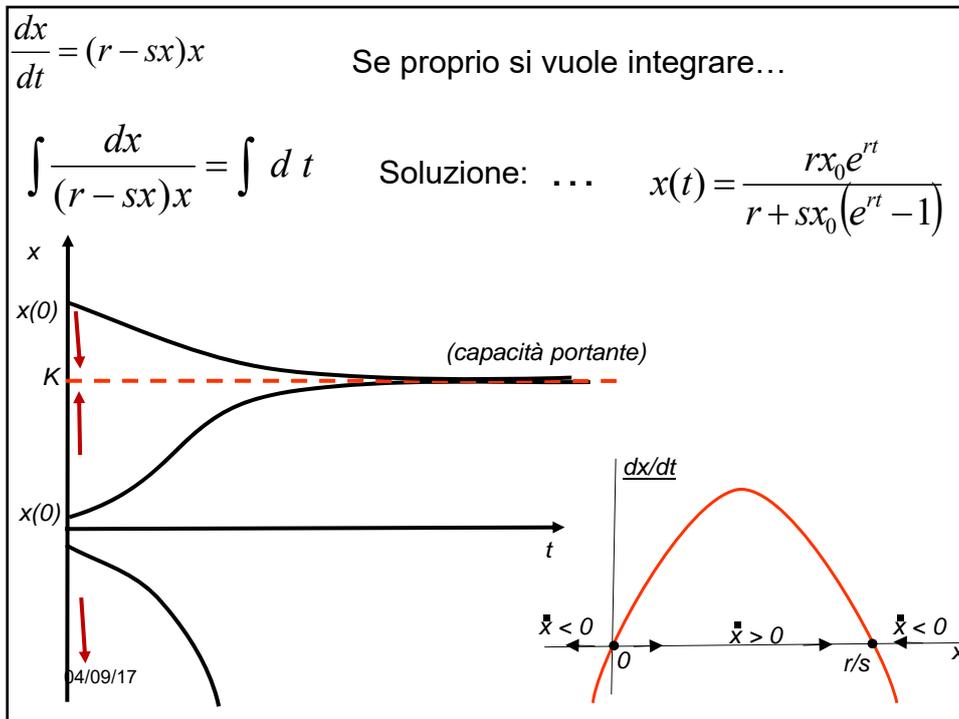
$(r - sx)x \geq 0$ per $0 \leq x \leq r/s$

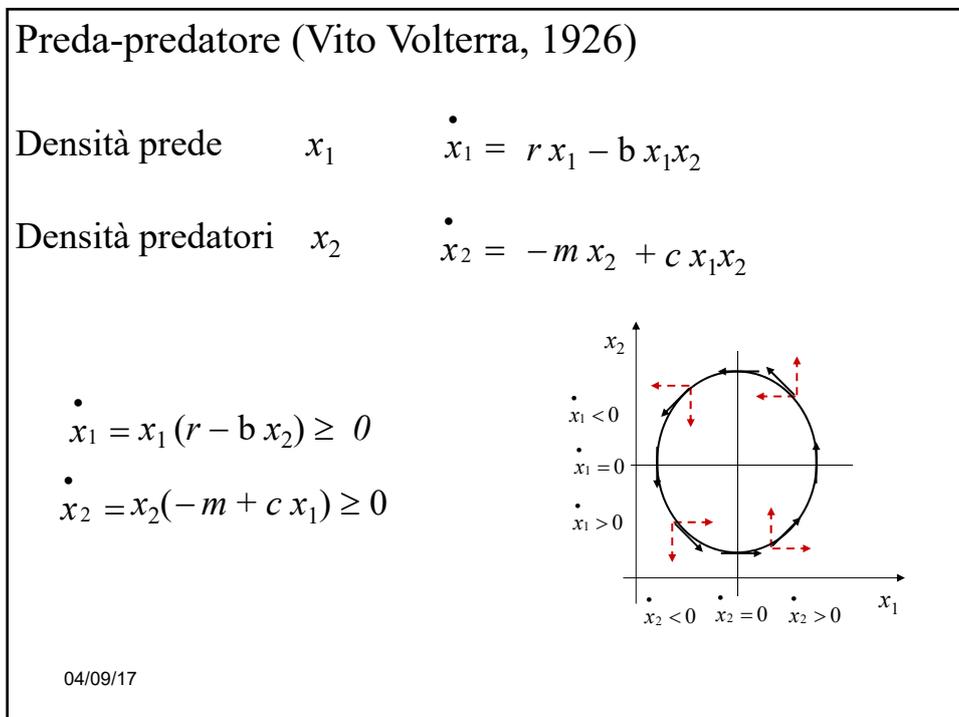
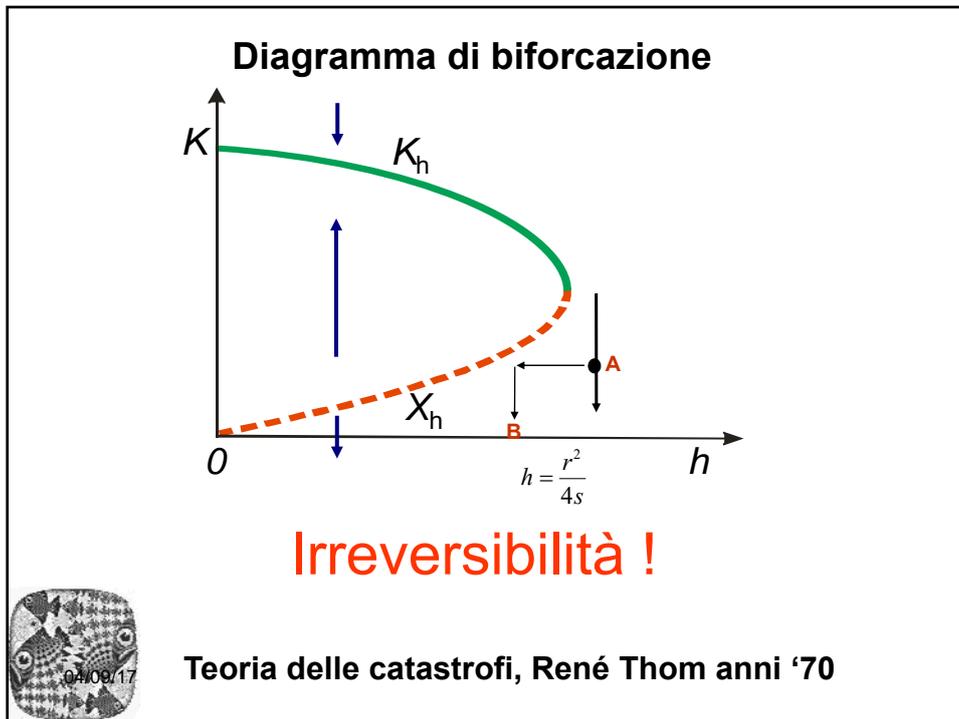
$x = 0$ equilibrio di estinzione

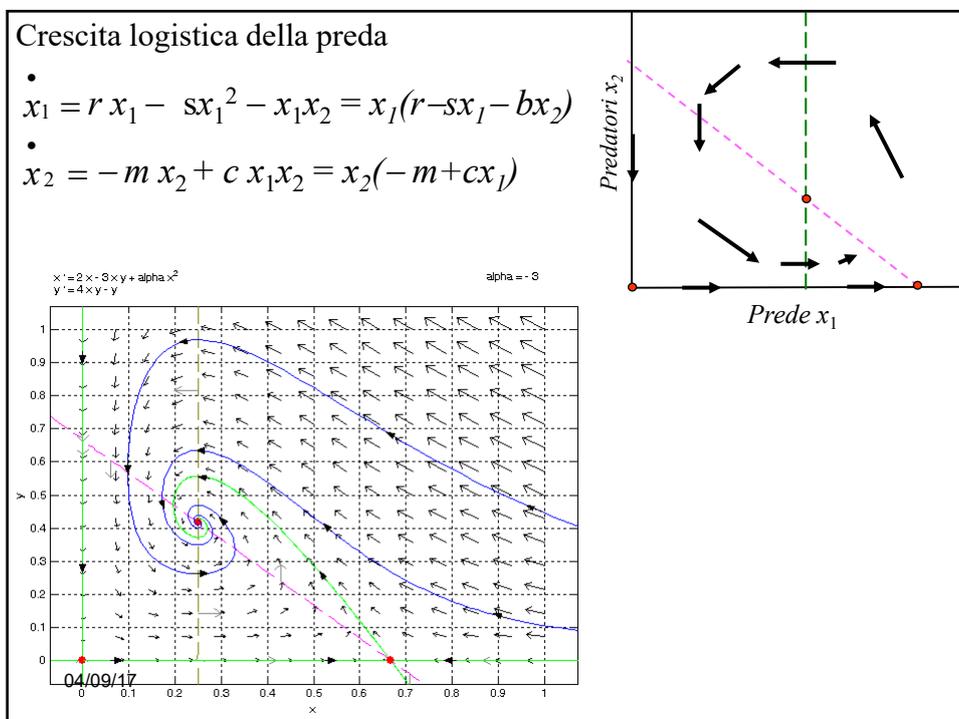
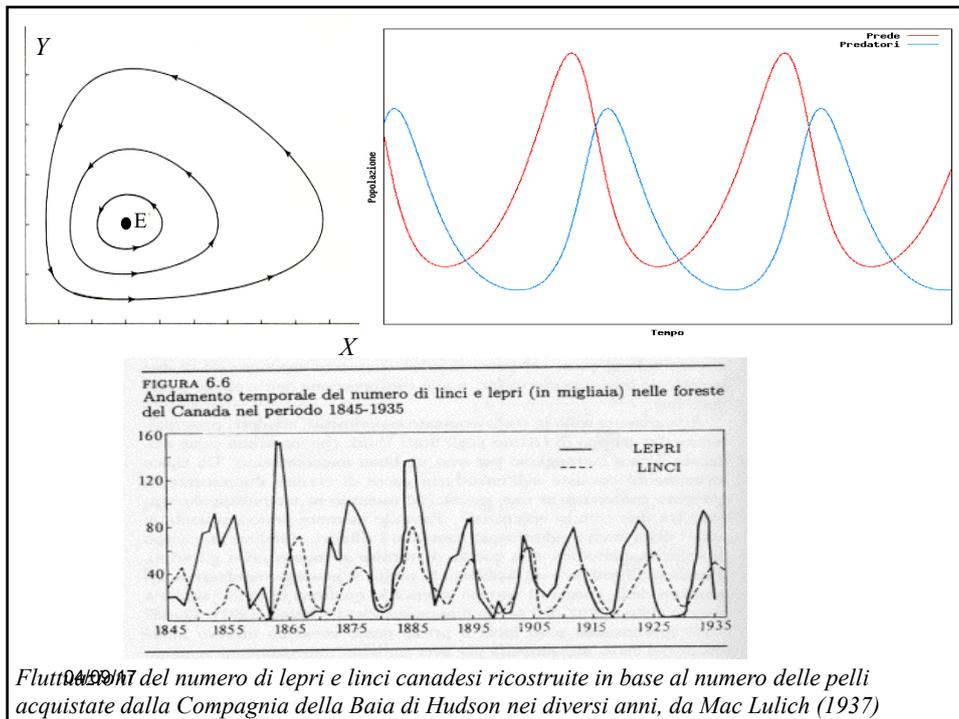
$x = K = r/s$ equilibrio naturale
 (capacità portante)

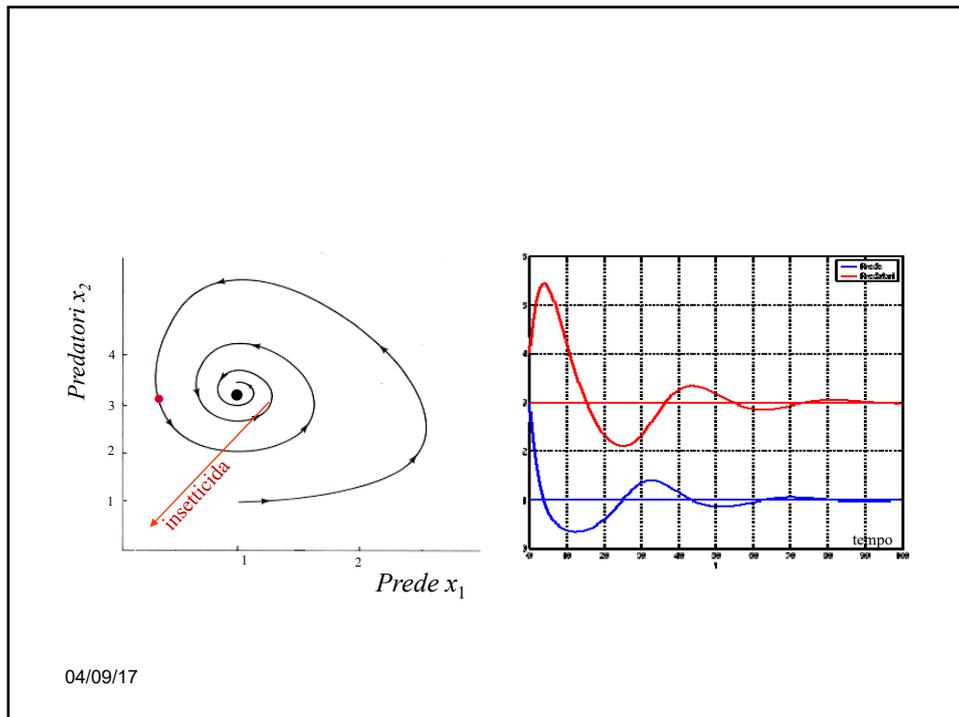
04/09/17











Sistema Dinamico

Variabili di stato

$$x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)$$

Problema: dato lo stato del sistema in un dato istante, t_0 , quale sarà il suo stato futuro e da quali stati precedenti proviene?

Operatore di evoluzione $x_i(t) = G(t; x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$

Leggi locali di evoluzione

Tempo continuo $t \in \mathbb{R}$: equazioni differenziali

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

Tempo discreto $t \in \mathbb{N}$: equazioni alle differenze (mappe iterate, induttive)

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

Teoria Qualitativa dei Sistemi Dinamici

Analisi qualitativa e Topologia (geometria dei fogli di gomma): Poincaré (1890)

Equilibri, Stabilità, Oscillazioni stabili, Biforcazioni, Controllo

Scuola russa: Lyapunov ('20), Kolmogorov ('30), Andronov ('50)
 Pontriaguine ('60) Arnold, Sinai, Sharkovski, Shilnikov
 Stati Uniti: Birkhoff ('30) Smale, Abraham, Yorke
 Brasile: Peixoto, Palis, Mora, Viana
 Europa: Julia ('20) Fatou ('20), Hadamard ('40), Mira

Teoria delle Singolarità (o catastrofi):

Morse ('30) Whitney ('50), Mather ('60), Thom ('70)

Cibernetica (autoregolazione, feed-back, meccanismi adattivi):

Wiener, J. Von Neumann, dal 1946

Sinergetica (interazione cooperativa, auto-organizzazione, processi autoalimentati): Hermann Haken, anni '80

Caos deterministico: Lorenz (1963), a Li-Yorke (1975), May (1976),
 Mira, Ruelle, Takens

Geometria dei Frattali: Benoit Mandelbrot, anni '80



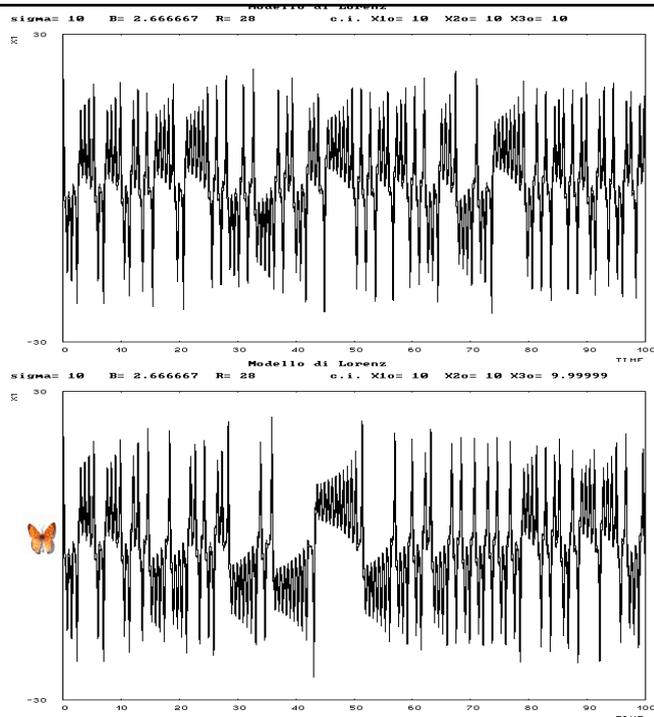
Edward Lorenz (1917-2008)

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -Bz + xy$$

04/09/17



Lorenz (1963) "Deterministic non-periodic flow" *Journal of the Atmospheric Sciences*

Lorenz (1972) "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?" presentato al 139° meeting dell' American Association for the Advancement of Science.

Ray Bradbury (1952) "A Sound of Thunder", racconto sui viaggi nel tempo
Eckels si sentì cadere su una sedia. Tastò, con frenesia lo spesso strato di fango sui suoi stivali. Sollevò un grumo di terra, tremante. «No, non può essere, una piccola cosa così. No!»

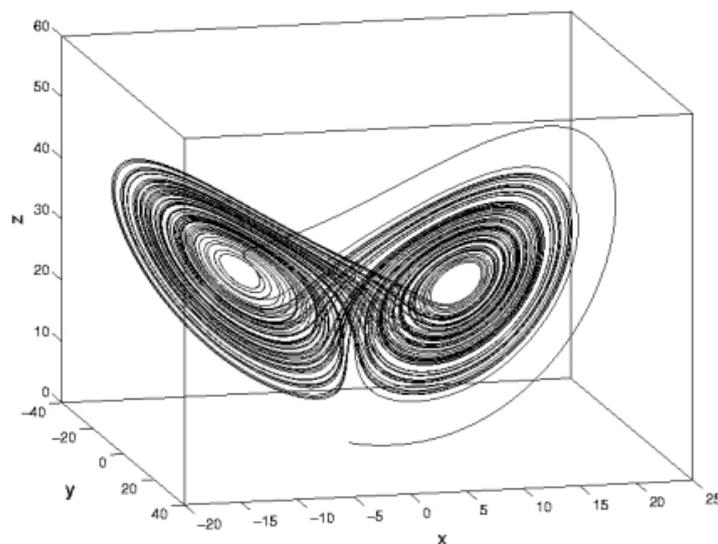
Incassata nel fango, luccicante di verde, oro e nero, c'era una farfalla, molto bella e molto morta. Una piccola e squisita creatura in grado di sconvolgere equilibri e di far cadere una fila di piccole tavolette del domino, e poi di grandi tavolette, e poi gigantesche tavolette del domino, per tutti gli anni attraverso il Tempo. La mente di Eckels vorticò. Non poteva aver cambiato le cose. L'aver ucciso una farfalla non poteva essere così importante, no!

Il suo volto era gelido. La sua bocca tremò, mentre chiedeva: «Chi... chi ha vinto le elezioni presidenziali, ieri?»

Carlo Emilio Gadda (1953) nel racconto "L'egoista"

"Se una libellula vola a Tokio, innesca una catena di reazioni che raggiungono me".

Attrattore di Lorenz nel diagramma di fase 3-dim



04/09/17

Caos Deterministico: un ossimoro

deterministico : regolare, prevedibile
fenomeni ordinati e pianificabili

caos : assenza di regole, irregolarità, imprevedibilità.

Il concetto di caos deterministico spezza questa dicotomia:
modelli matematici *deterministici non lineari* possono
generare andamenti quasi indistinguibili da processi aleatori,
ed estremamente sensibili a piccole perturbazioni

04/09/17



Nature Vol. 261 June 10 1976

review article

Simple mathematical models with very complicated dynamics

Robert M. May*

First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.

04/09/17

Modello di May: Popolazione con stagioni riproduttive.

Supponiamo che in ogni “periodo” si riproduca una frazione r di insetti e ne muoia una frazione m . Nell’anno successivo la popolazione è

$$N(t+1) = N(t) + rN(t) - mN(t) = (1 + r - m)N(t)$$

Con la solita ipotesi che il tasso di mortalità m aumenti al crescere della popolazione, ad esempio

$$m = sN(t)$$

La legge di evoluzione diventa di secondo grado:

$$N(t+1) = (1 + r)N(t) - sN(t)^2$$

Con il cambio di variabile: $N = \frac{1+r}{s}x$ si ottiene la forma standard

$$x(t+1) = ax(t)[1 - x(t)] \quad \text{dove } a = (1+r)$$

04/09/17

logistica

Robert May, 1976

“Appello evangelico per l’introduzione di queste equazioni alle differenze semplici in corsi elementari di matematica, cosicchè l’intuizione degli studenti possa essere arricchita vedendo le cose bizzarre che succedono con semplici equazioni non lineari. [...]”.

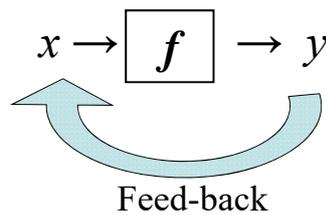
“Io vorrei sollecitare che sia presentata [l’equazione logistica] presto nell’educazione matematica. Questa equazione può essere presentata da un punto di vista fenomenologico iterandola con una calcolatrice, o persino a mano. Il suo studio non richiede più sofisticazione di quanto non richieda un corso elementare di matematica.

Tale studio potrebbe in generale arricchire l’intuito di uno studente circa i sistemi non lineari. Non solo nella ricerca, ma anche nella vita politica ed economica di ogni giorno, noi saremmo più ricchi se un numero maggiore di persone si rendesse conto che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche.”

Sistemi dinamici a tempo discreto

Assegnato x_0 , la successione degli stati (traiettoria) si ottiene per induzione: $x_{t+1} = f(x_t) \quad t = 0, 1, \dots$

Concetto di funzione $y = f(x)$



04/09/17

Funzione composta (con se stessa)

Legge di evoluzione ottenuta mediante l'iterazione (applicazione ripetuta) di una funzione, che dallo stato al tempo t permette di calcolare lo stato al tempo successivo, $t+1$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1)$$

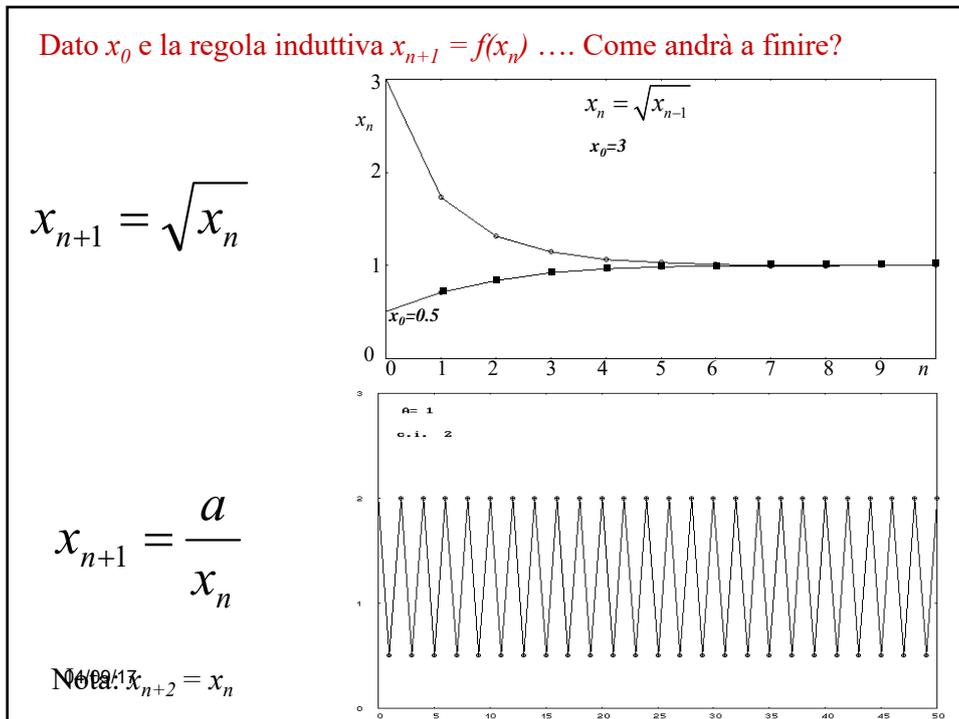
Per induzione, ossia iterando la f ...

$$x(0) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(1) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(2) \dots x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1) \dots$$

... si ottiene una "traiettoria" del sistema dinamico

$$x(1) = f(x(0)) \quad x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \dots x(t) = f^t(x(0))$$

04/09/17



Mappa lineare: $f(x) = ax$.

Evoluzione $x_{t+1} = ax_t$

$x_1 = ax_0$
 $x_2 = ax_1 = a(ax_0) = a^2x_0$
 $x_3 = ax_2 = a(a^2x_0) = a^3x_0$
 ...
 $x_n = ax_{n-1} = a(a^{n-1})x_0 = a^nx_0$

Soluzione in forma chiusa:
 $x_t = x_0 a^t$

04/09/17

- $|a| < 1$ (contraction)
 - $0 < a < 1$ Contraction and orientation preserving. It monotonously converges to $x^* = 0$
 - $-1 < a < 0$ Contraction and orientation reversing. The iteration converges to $x^* = 0$ through oscillations
- $|a| > 1$ (expansion)
 - $a > 1$, expanding and orientation preserving. It diverges monotonically
 - $a < -1$ expanding and orientation reversing. It diverges through oscillations
- Particular (bifurcation) values
 - $a = 1$ $x_t = x_0$ constant
 - $a = -1$ $x_t = (-1)^t x_0$ alternating values

Capitalizzazione (con interesse composto) interesse $i\%$.

sia $r = i/100$

$$C(t+1) = C(t) + r C(t) = (1+r) C(t)$$

Soluzione: $C(t) = C(0) (1+r)^t$

Crescita esponenziale

04/09/17

Interesse composto con tassa proporzionale al quadrato !!

$$C(t+1) = (1+r)C(t) - bC(t)^2$$

$$C(1) = (1+r)C(0) - bC(0)^2 \quad \text{grado } 2$$

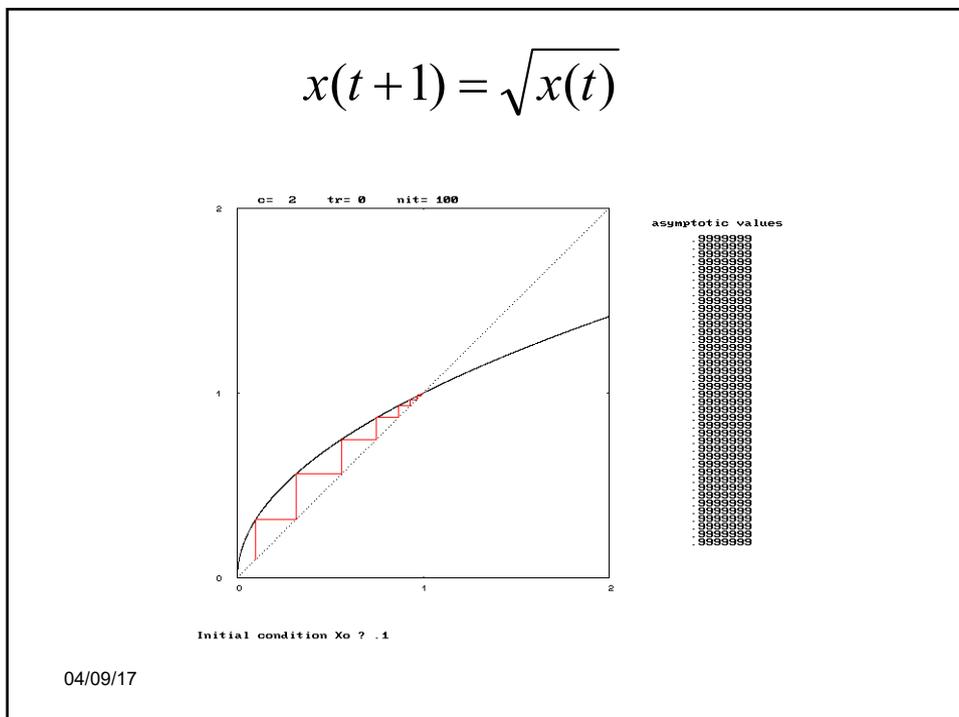
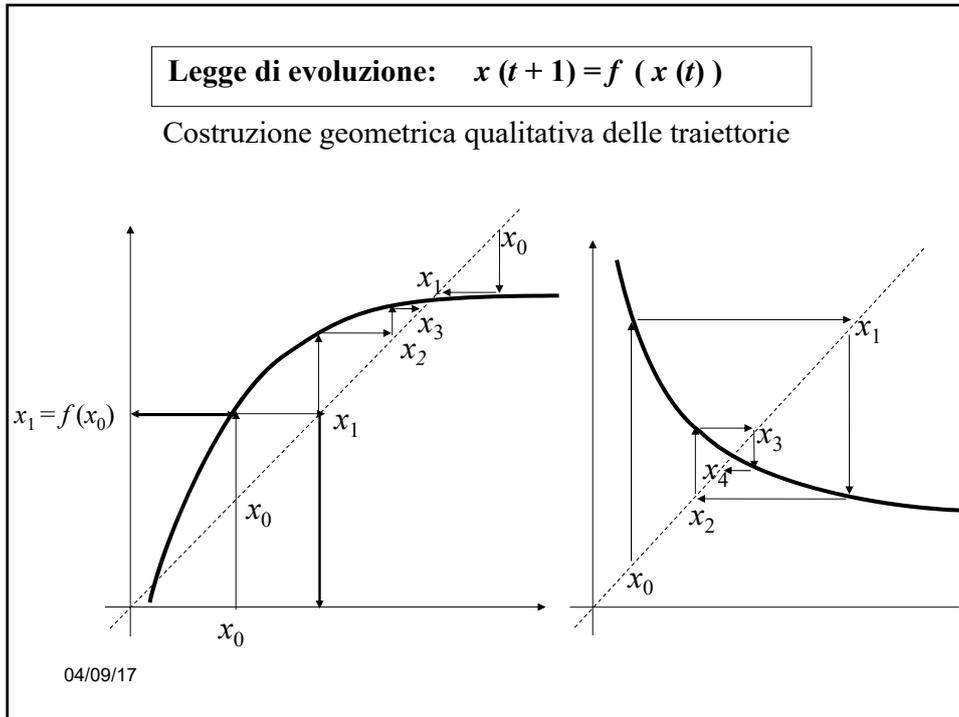
$$\begin{aligned} C(2) &= (1+r)C(1) - bC(1)^2 = \\ &= (1+r)[(1+r)C(0) - bC(0)^2] - b[(1+r)C(0) - bC(0)^2]^2 \quad \text{grado } 2^2 = 4 \end{aligned}$$

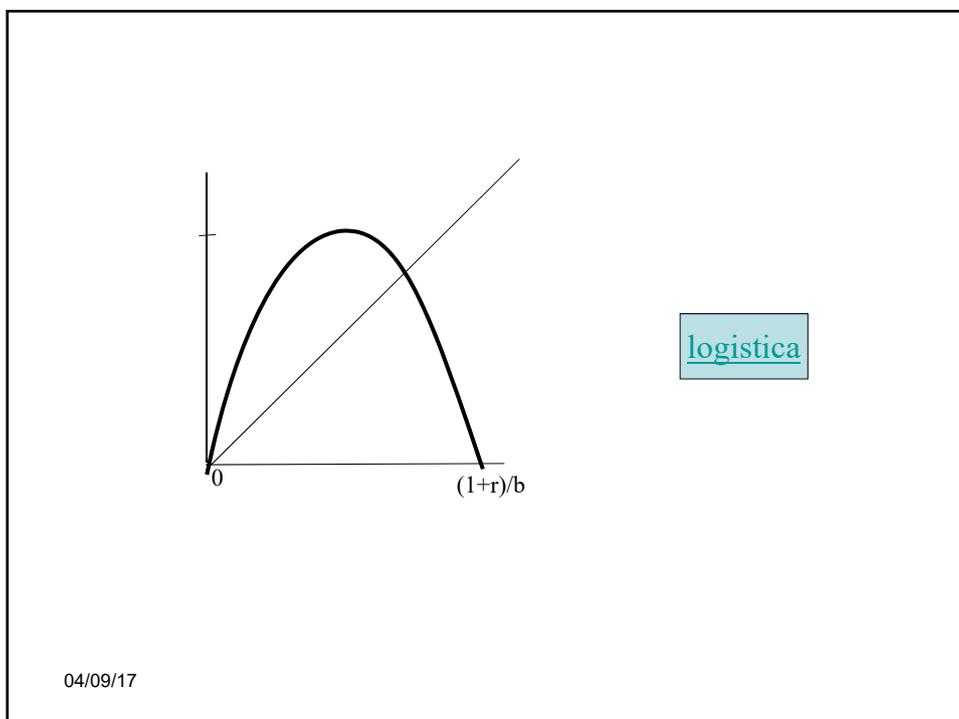
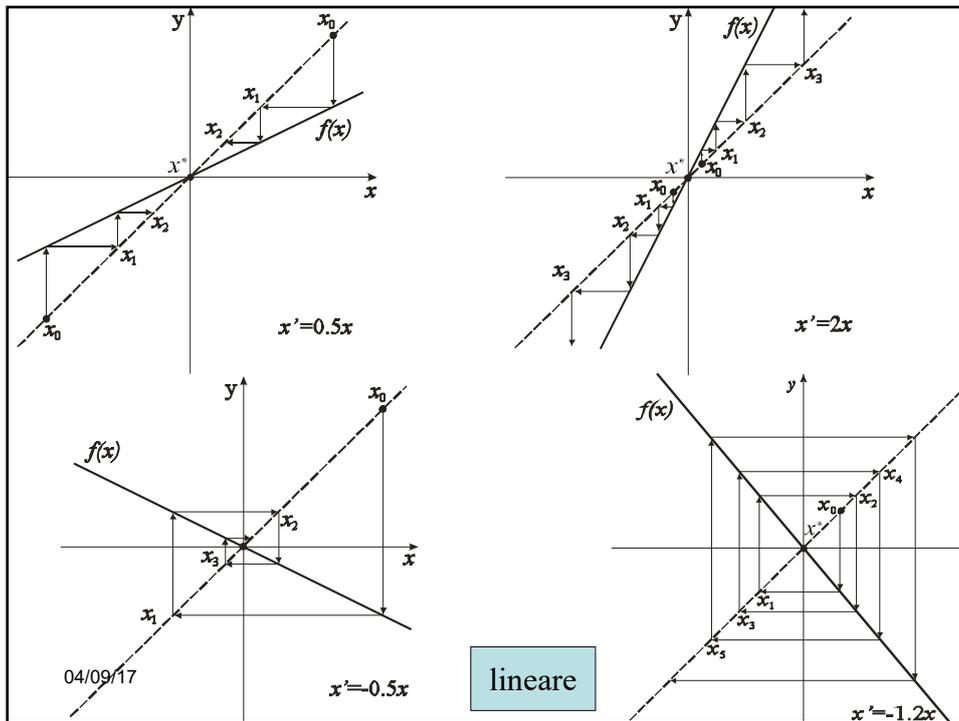
$$C(3) = (1+r)C(2) - bC(2)^2 = \dots \quad \text{grado } 2^3 = 8$$

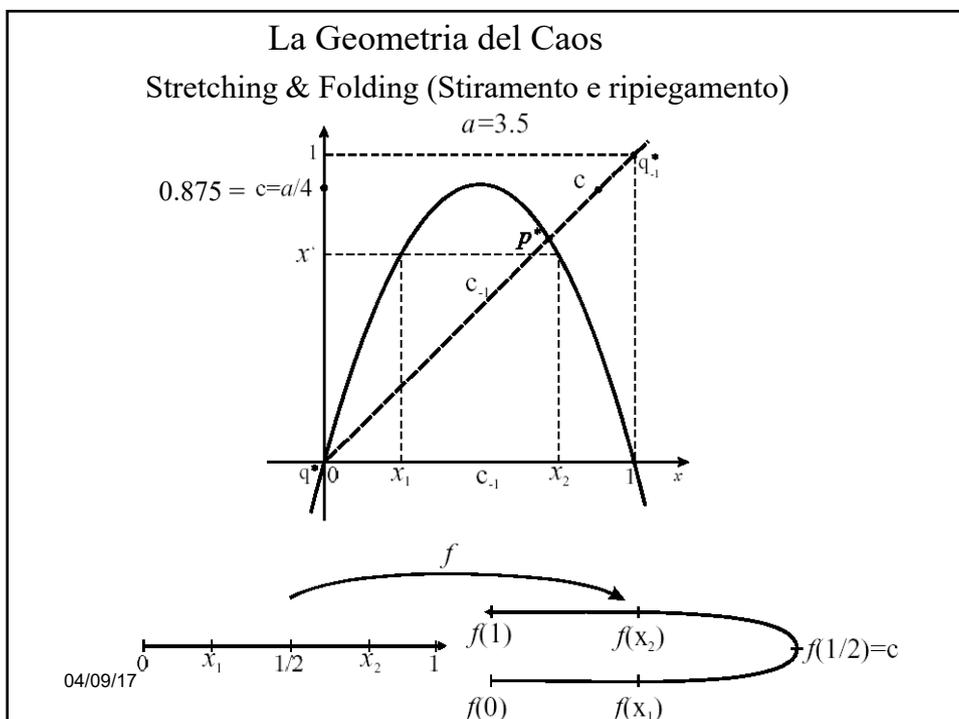
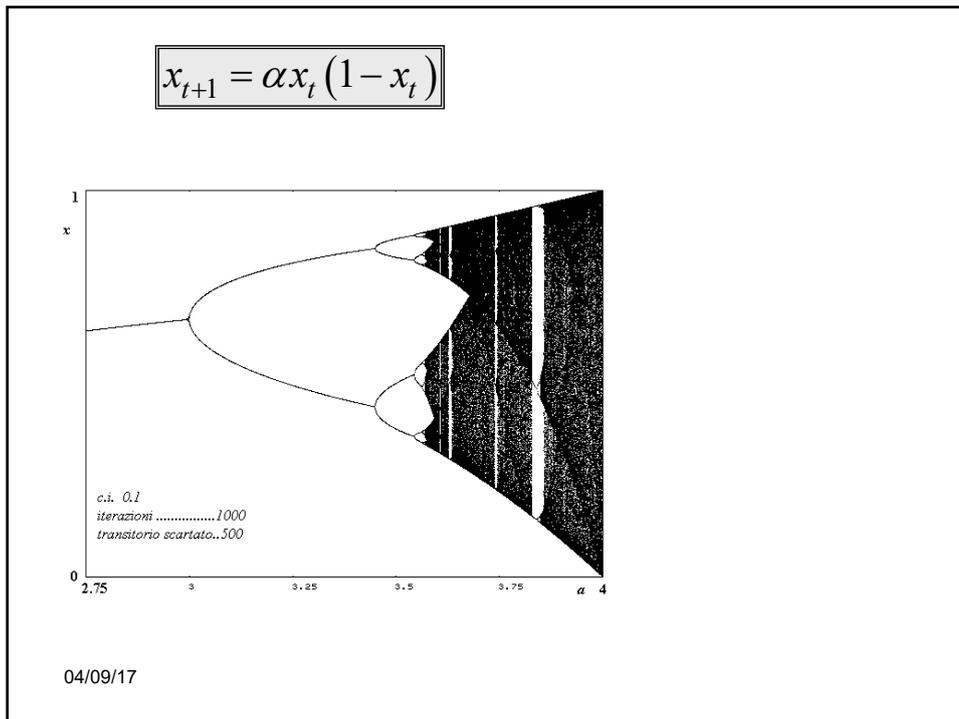
:

$$C_{10} = \dots \quad \text{grado } 2^{10} = 1024 \quad \text{!!!!}$$

04/09/17







Kneading of the dough (impastare)

0 c_1 1

f f^2

c_1 c c

04/09/17

Matematica e dintorni

Cian Iralo Bischi, Rosa Carini,
Laura Gardini, Paolo Tenti

Sulle orme del caos
Comportamenti complessi
in modelli matematici semplici

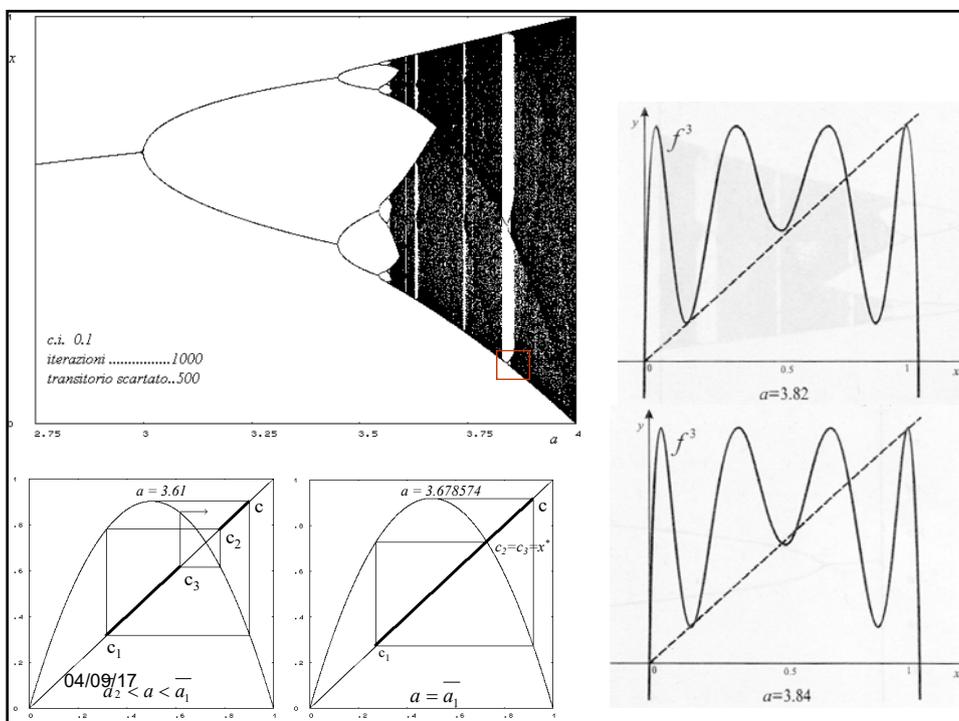
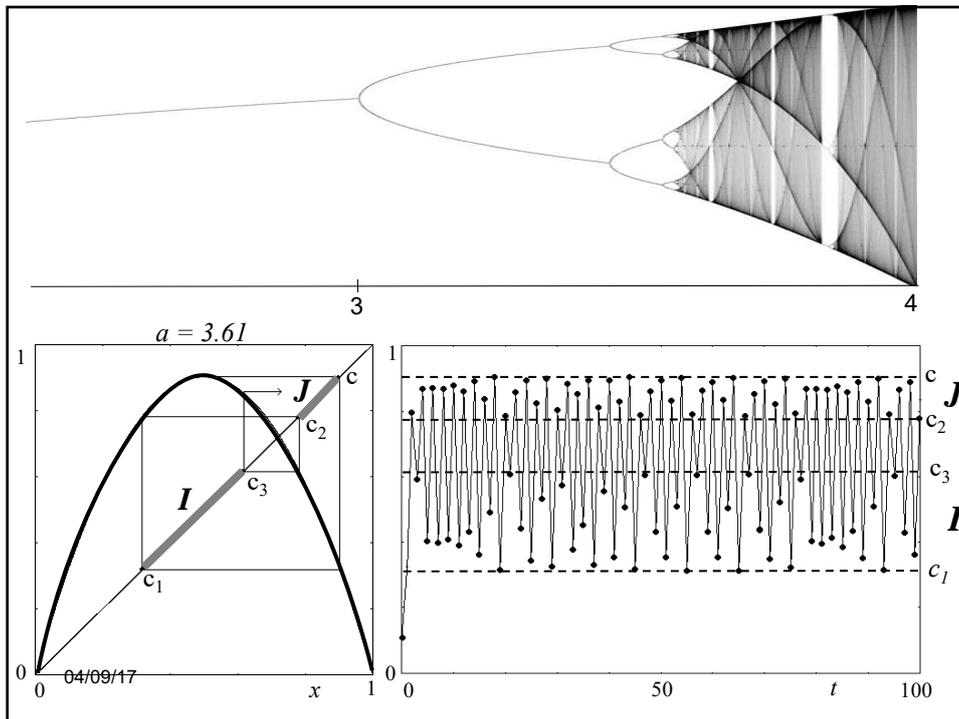
Bruno Mondadori

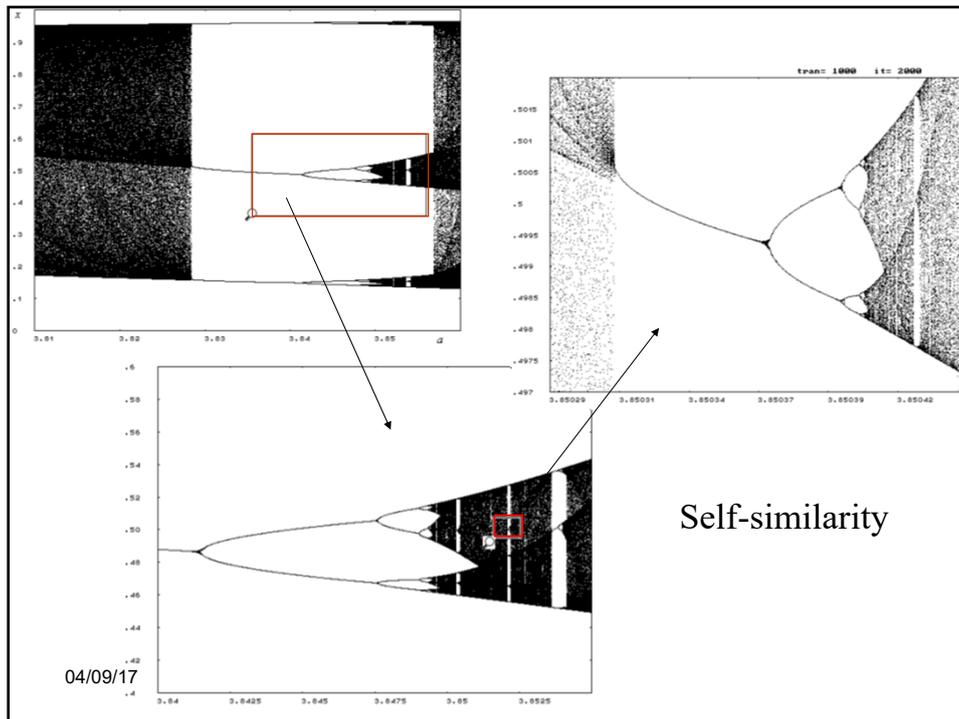
Mixing

$x(0)$ $c_1 = f(c)$ c

t

04/09/17





Dal romanzo: *Jurassic Park*,
di **Michael Crichton** (1942, 2008)

Un passo tratto dalla Seconda Iterazione

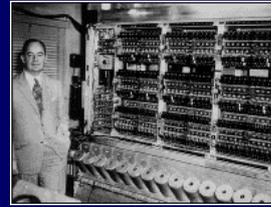
[...] *Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i “meccanismi del mondo reale”. Questi studiosi, sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione di isolamento dei matematici.*

Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio. Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos.

Terza cosa, sembravano voler fare di tutto il possibile affinché i loro sistemi matematici descrivessero qualcosa che di fatto esisteva nel mondo reale.

Ancora Ian Malcom, da *Jurassic Park*, terza iterazione.

“I computer vennero costruiti verso la fine degli anni 40, perché matematici come John Von Neumann, il massimo matematico della sua generazione, pensavano che avendo a disposizione una macchina capace di gestire contemporaneamente molte variabili, si sarebbe stati in grado di fare previsioni meteorologiche a lungo termine. [...] La teoria del caos manda all'aria tutto questo, non si può prevedere il tempo se non per pochi giorni. [...] Tutto il denaro speso per previsioni meteorologiche lungo termine - circa mezzo miliardo di dollari negli ultimi decenni - è buttato via. È un'impresa vana quanto cercare di trasformare il piombo in oro. Oggi gli sforzi degli alchimisti ci fanno ridere, ma generazioni future guarderanno noi e rideranno nello stesso modo”.



04/09/17



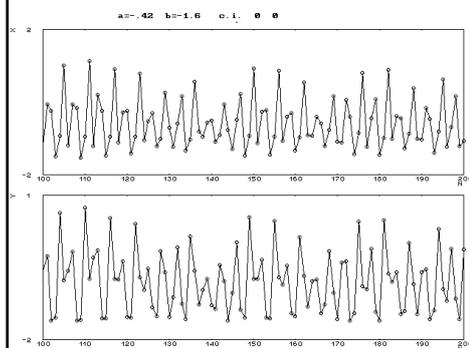
04/09/17



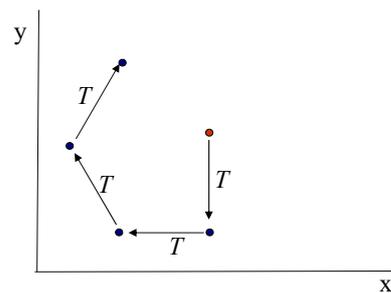
04/09/17

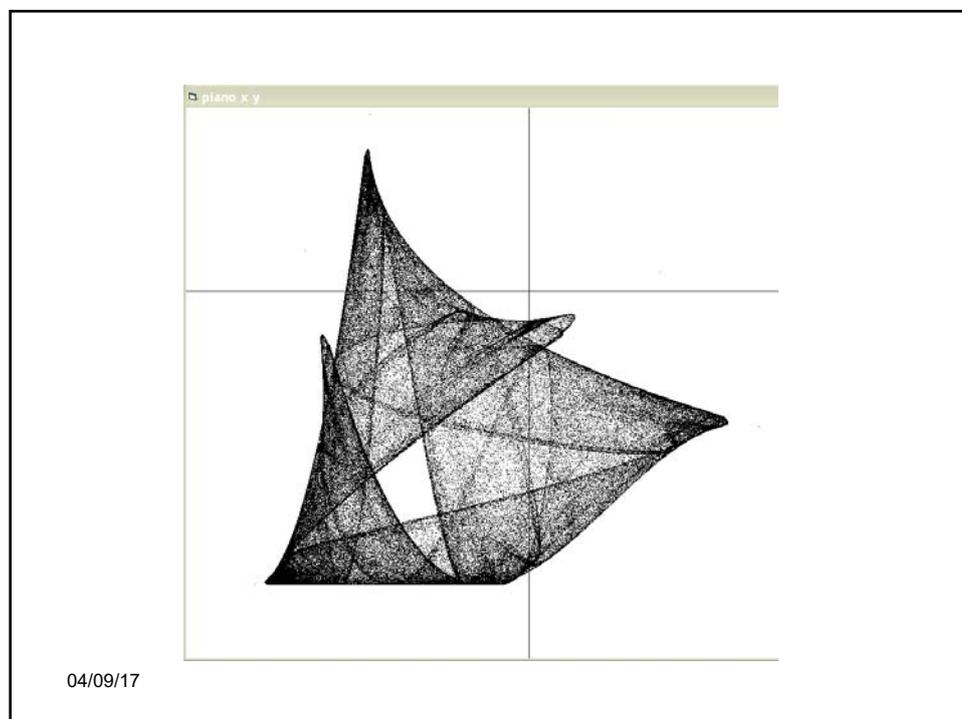
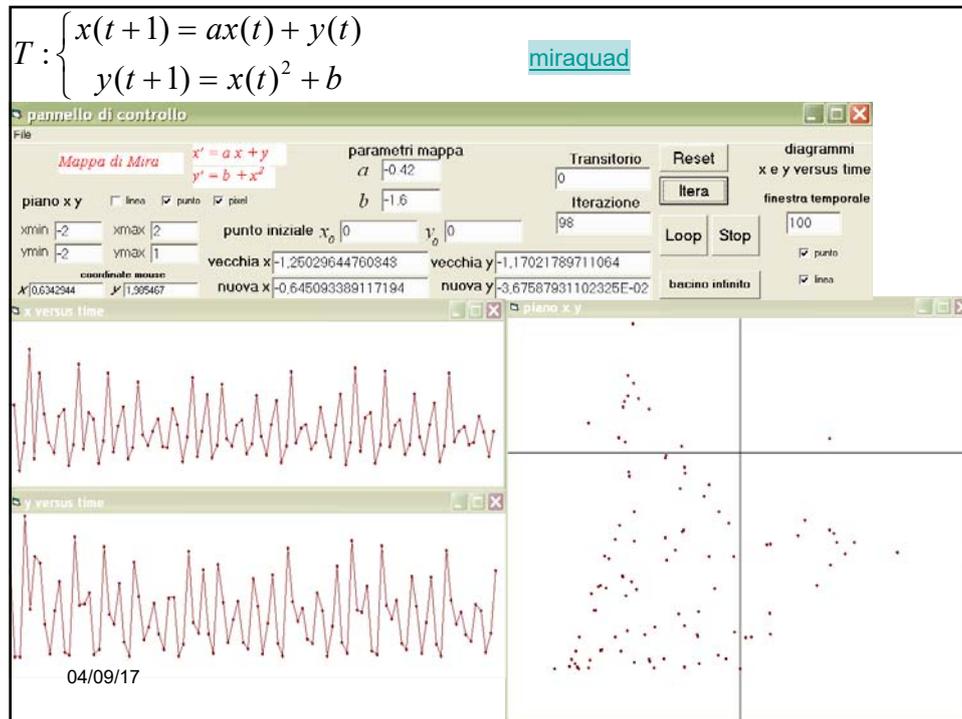
Mappe iterate del piano

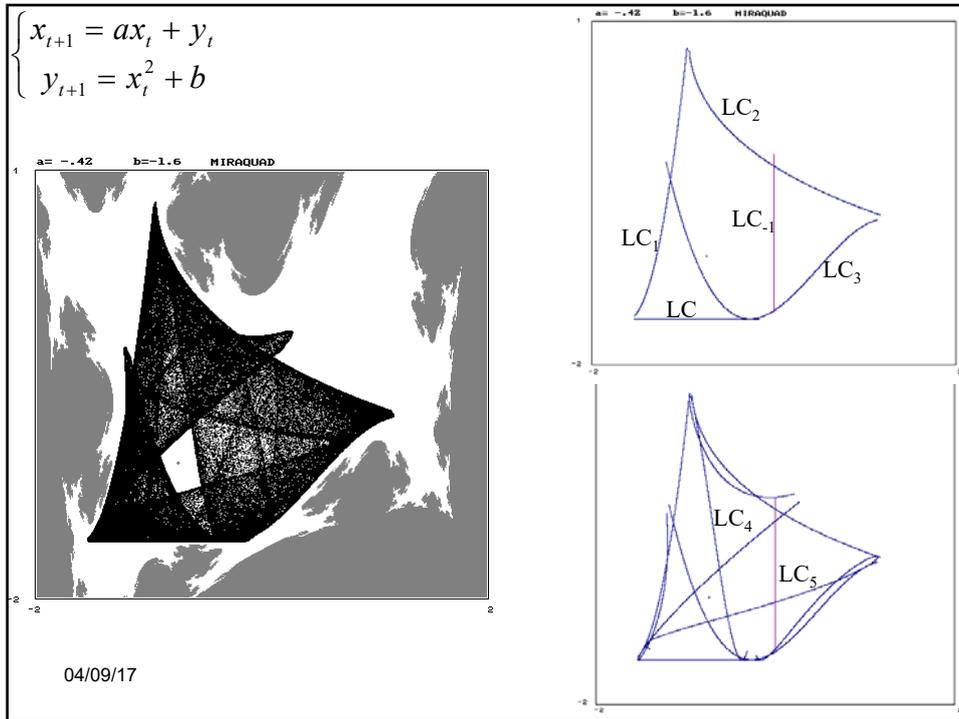
$$T : \begin{cases} x(t+1) = ax(t) + y(t) \\ y(t+1) = x(t)^2 + b \end{cases}$$



04/09/17







2-dim. affine maps: contractions, expansions, rotations etc.

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f \end{aligned}$$

2dim-linear

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

area (F') = |det A| area (F)
|det A| < 1 (>1) contraction (expansion)

Meaning of the sign of |det A|

T is orientation preserving if det A > 0

T is orientation reversing if det A < 0

04/09/17

Noninvertible (Many-to-One) map: Distinct points are mapped into the same point

$\det DT < 0$ (orientation reversing) $\det DT > 0$ (orientation preserving)

LC_1

$LC = T(LC_1)$

$T(R_1)$

$T(R_2)$

$p_1 \xrightarrow{T} p'$

$p_2 \xrightarrow{T} p'$

Folding action of T

Equivalently, we say that p' has several rank-1 preimages

$p_1 \xleftarrow{T_1^{-1}} p'$

$p_2 \xleftarrow{T_2^{-1}} p'$

Unfolding action of T

04/09/17

Noninvertible maps: many to one

$$T: \begin{cases} x(t+1) = ax(t) + y(t) \\ y(t+1) = x(t)^2 + b \end{cases}$$

$P = T(P_1) = T(P_2)$

2 inverses

$$T_1^{-1}: \begin{cases} x = -\sqrt{y'-b} \\ y = x'+\sqrt{y'-b} \end{cases} \quad T_2^{-1}: \begin{cases} x = \sqrt{y'-b} \\ y = x'-\sqrt{y'-b} \end{cases}$$

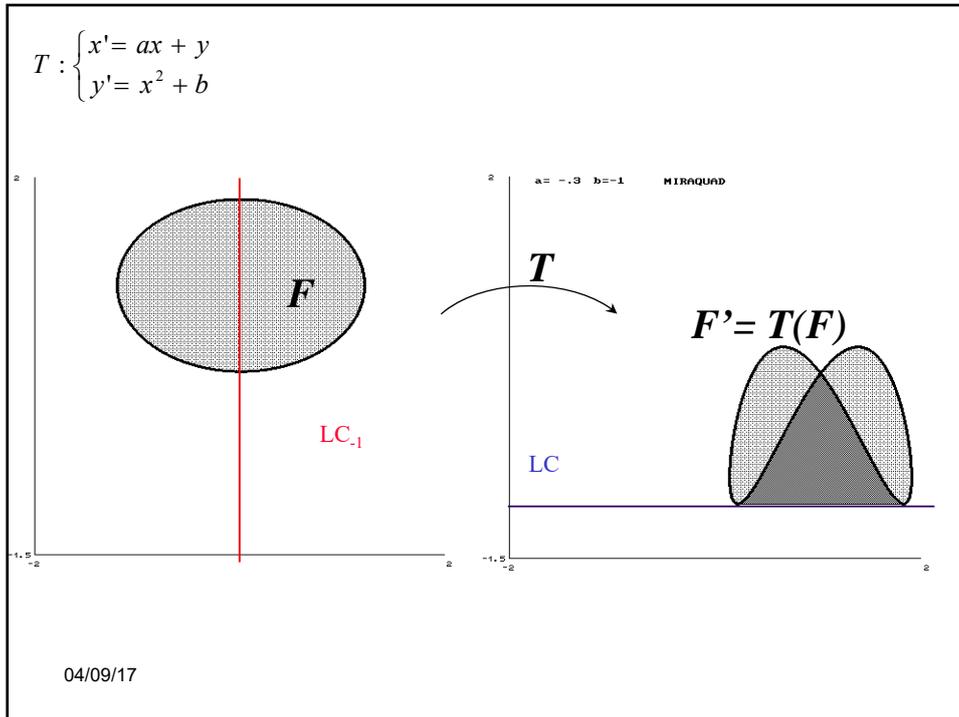
$$DT = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \quad \det DT = -2x = 0 \quad \text{for } x=0$$

$T(\{x=0\}) \rightarrow \{y=b\}$

$LC = \{(x,y) \mid y = b\}$

$LC_1 = \{(x,y) \mid x = 0\}$

04/09/17



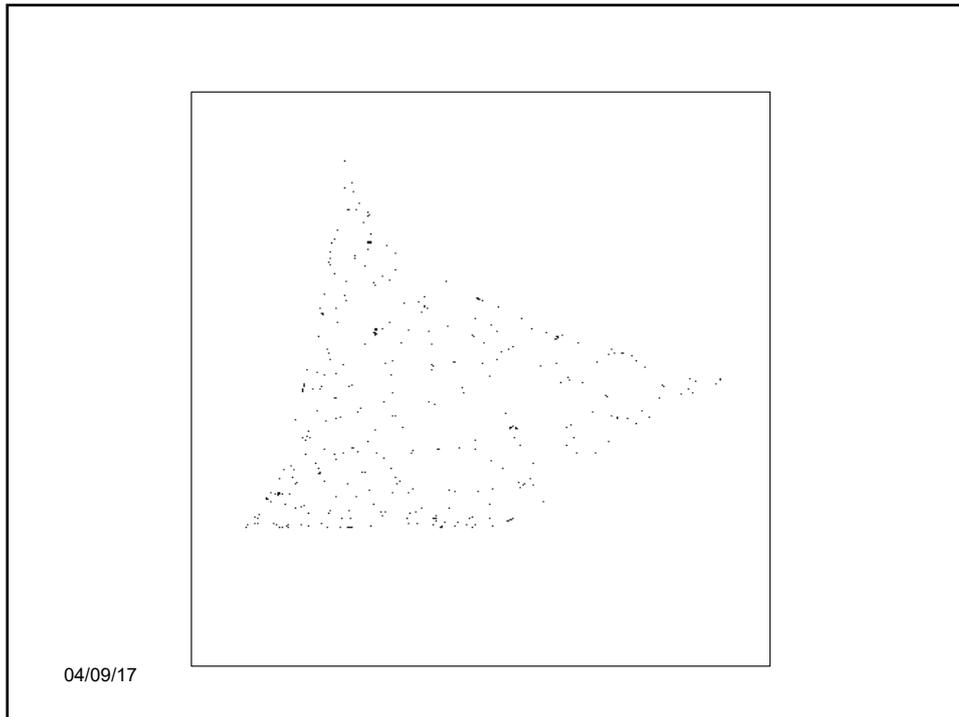
$a = -0.3 \quad b = -1.5$

$a = -1.2 \quad b = -1.475$

I parametri come “manopole” per sintonizzare diversi attrattori

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + y_t \\ y_{t+1} = x_t^2 + b \end{cases}$$

04/09/17



$$\begin{cases} x_{n+1} = a(x_n \sqrt{3}/2 - y_n/2) + x_n y_n \\ y_{n+1} = a(x_n/2 + y_n \sqrt{3}/2) + a^2 + y_n^2 \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf. [G 36])

© CEPAD 1990 I.S.B.N. 2 85428 055 5

Toute reproduction, même partielle de cet ouvrage, est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit est formellement interdite.

Dépôt légal : 1^{er} trimestre 1990 N° Editeur : 70

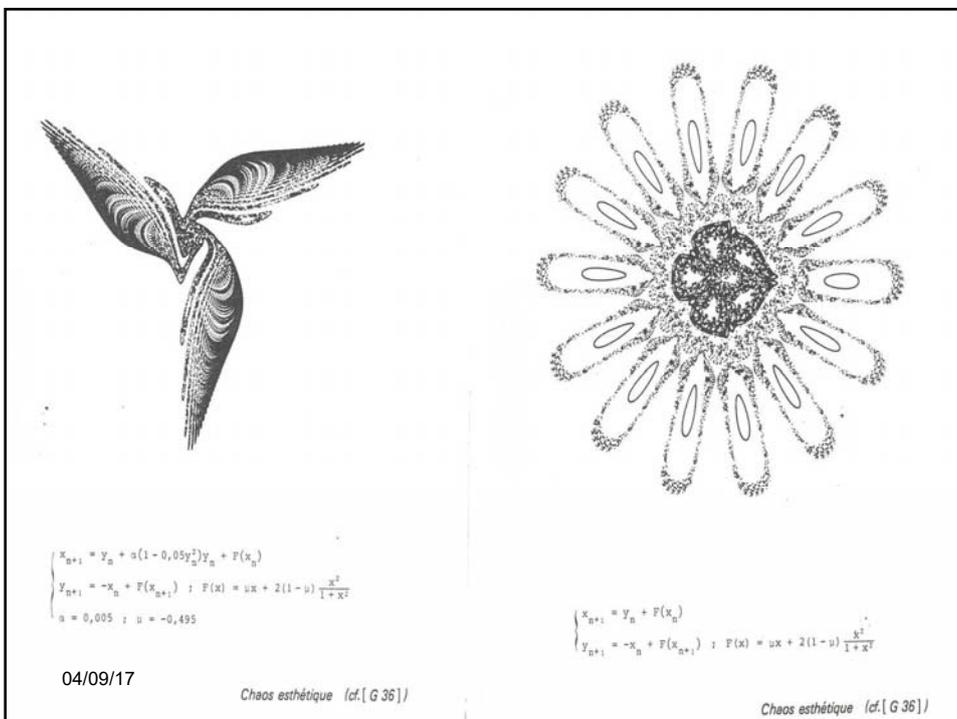
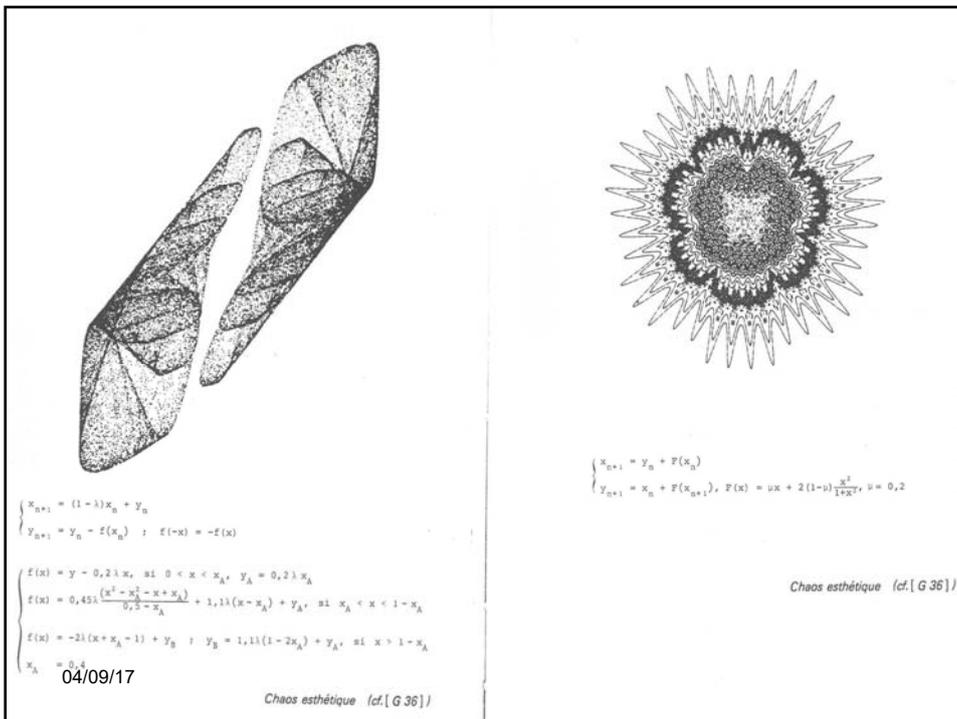
DYNAMIQUE CHAOTIQUE

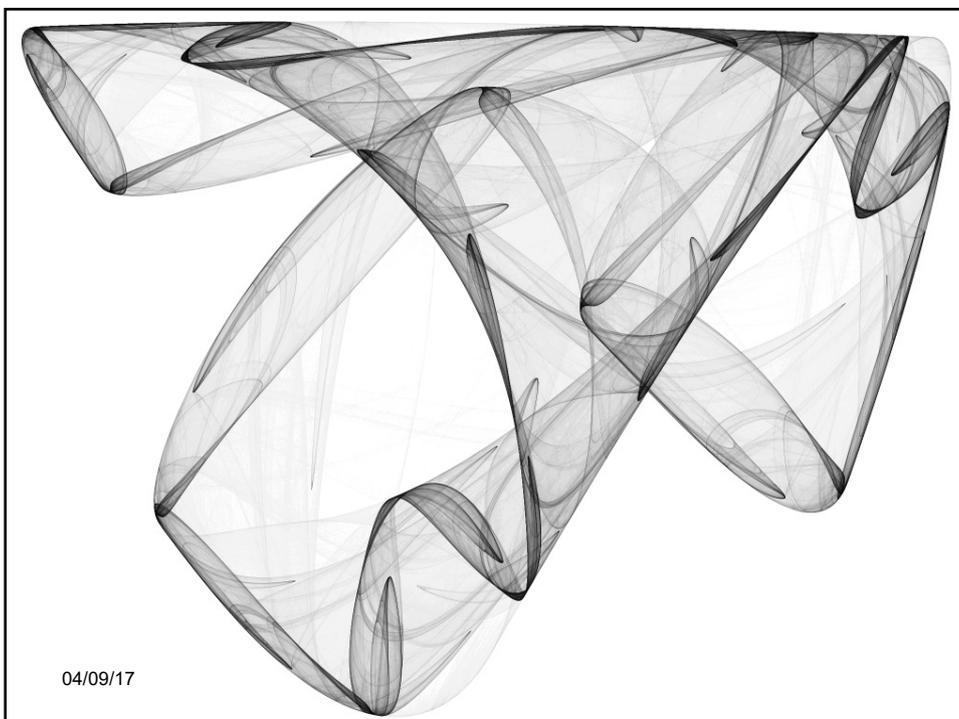
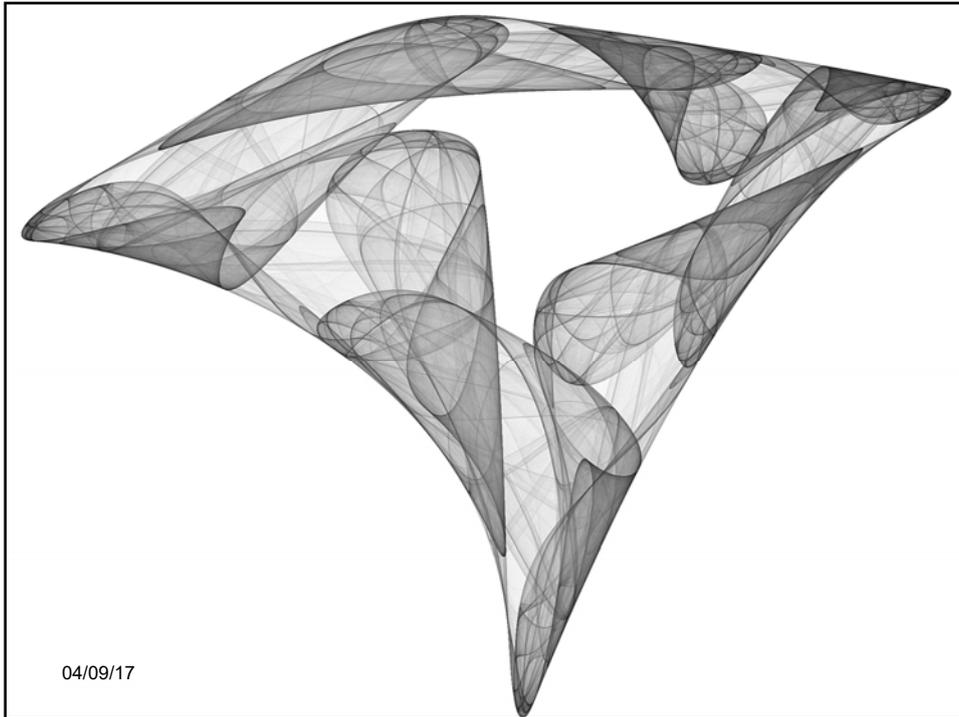
Transformations ponctuelles Transition Ordre - Désordre

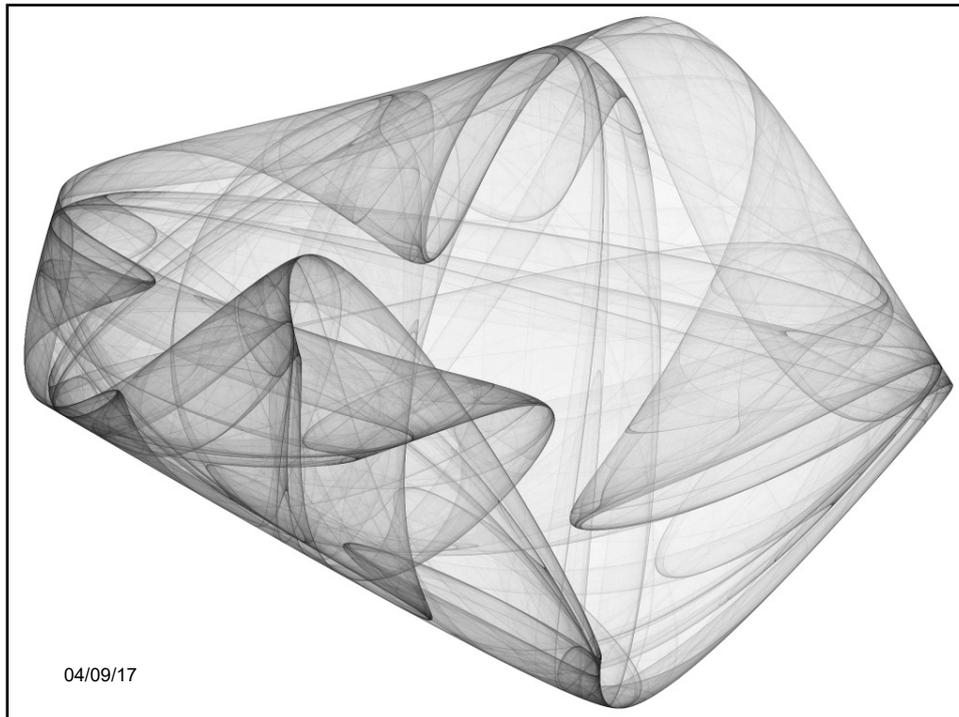
I. GUMOWSKI * C. MIRA **

Groupe « Systèmes Dynamiques non Linéaires et Applications »
 (*) U.E.R. de Mathématiques,
 Université Paul Sabatier Toulouse
 (**) Département de Génie Electrique
 Institut National des Sciences Appliquées Toulouse

CEPADUES EDITIONS







<http://paulbourke.net/fractals/>
Fractals, Chaos

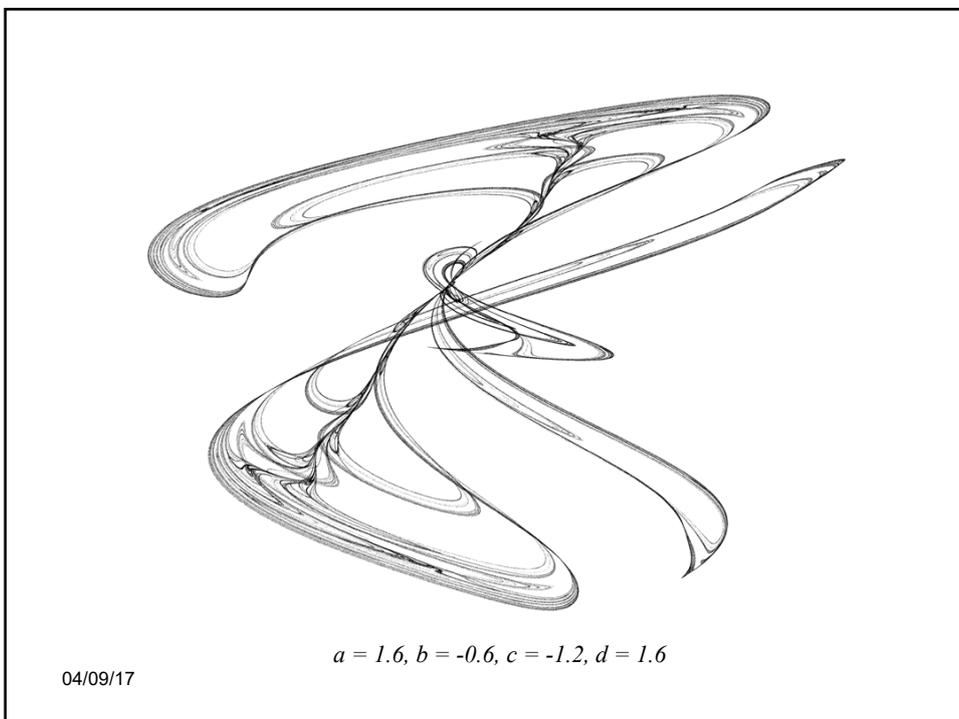
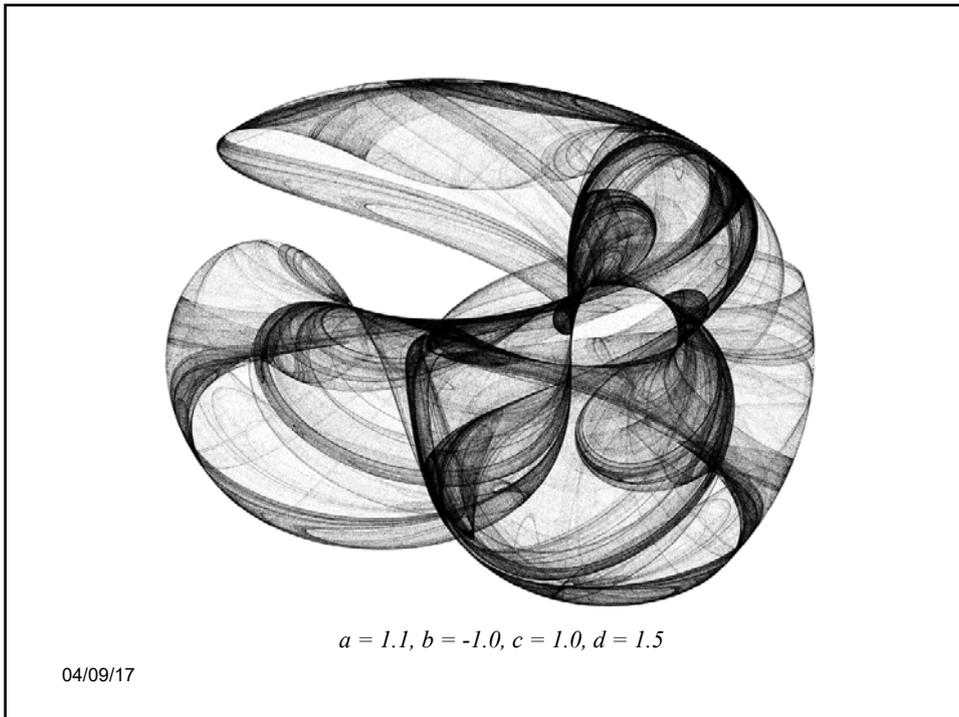
<http://paulbourke.net/fractals/clifford/>
Clifford Attractors

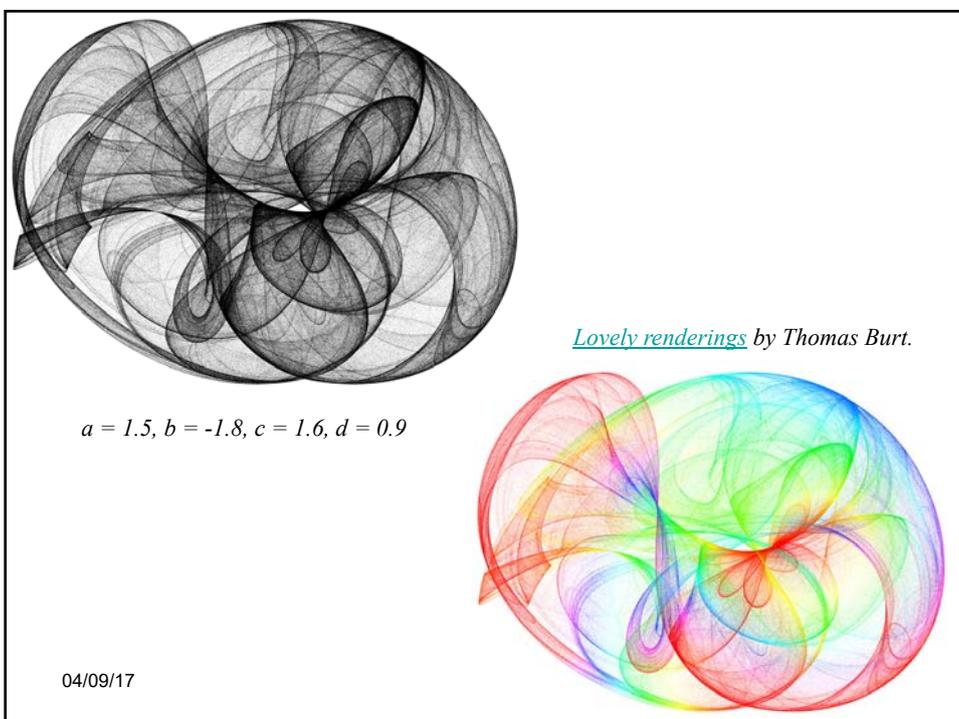
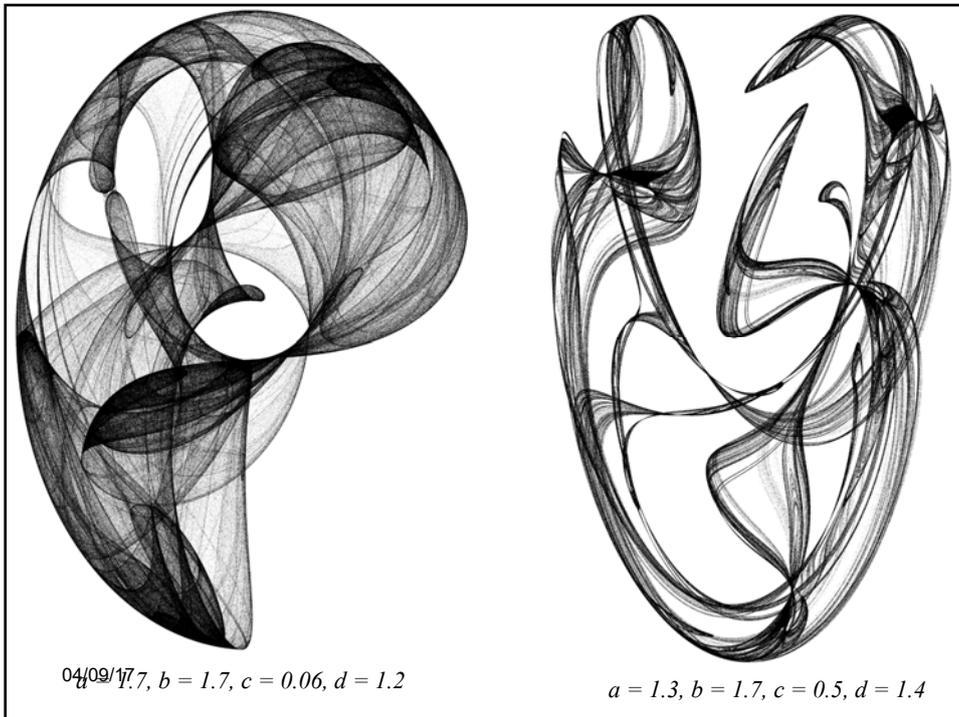
Definition
 $x_{n+1} = \sin(a y_n) + c \cos(a x_n)$
 $y_{n+1} = \sin(b x_n) + d \cos(b y_n)$

where a, b, c, d
 Are parameters that
 define each attractor.

04/09/17

$a = -1.4, b = 1.6, c = 1.0, d = 0.7$





Let us choose a polynomial of the form:

$$f(x,y) = a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f$$

where a, b, c, d, e, f are constants discussed later and x, y are the usual coordinates in 2-space. The simplest way to turn this polynomial into a map is known as *coordinate rotation* :

$$y_{new} = f(x_{old}, y_{old})$$

$$x_{new} = y_{old}$$

OK, say you, what about those 6 constants? A willy-nilly choice of those will not give you a strange attractor. There may be (probably is) some way to telling if a particular set of constants produces an attractor but, I am not a mathematician, which means I don't really care -- I basically write a program to pick them at random and see what comes out. Most sets diverge, some converge to a point, some converge to a boring loop, and only few produce good-looking pictures. These things are called attractors, not because they're attractive, but because they attract reasonable points

[Here](#) is a short C/C++ program I wrote.

What is a strange attractor?

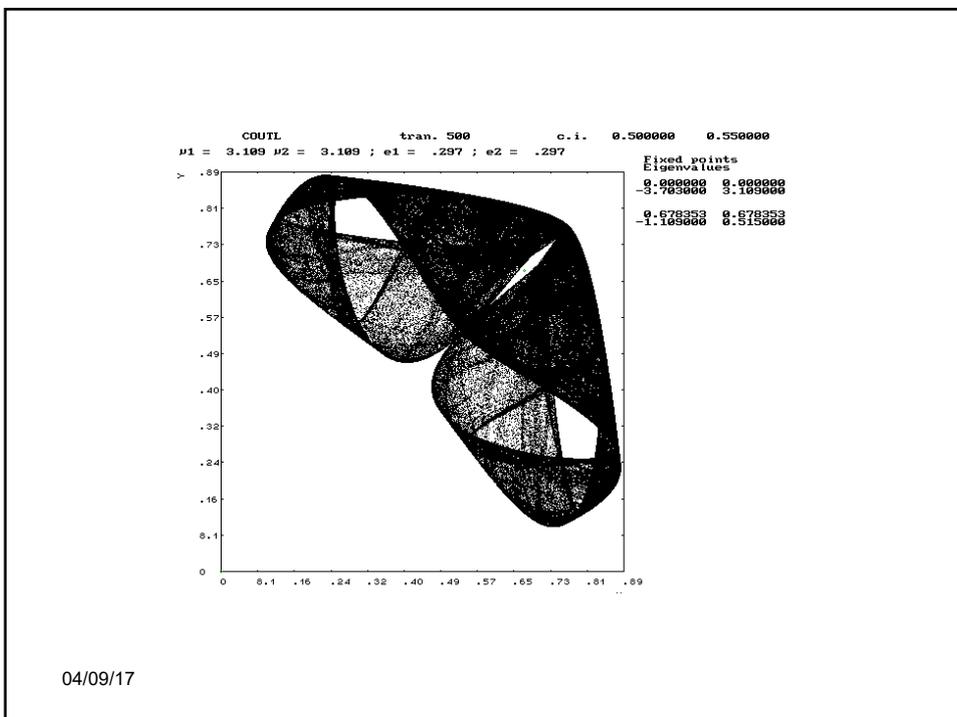
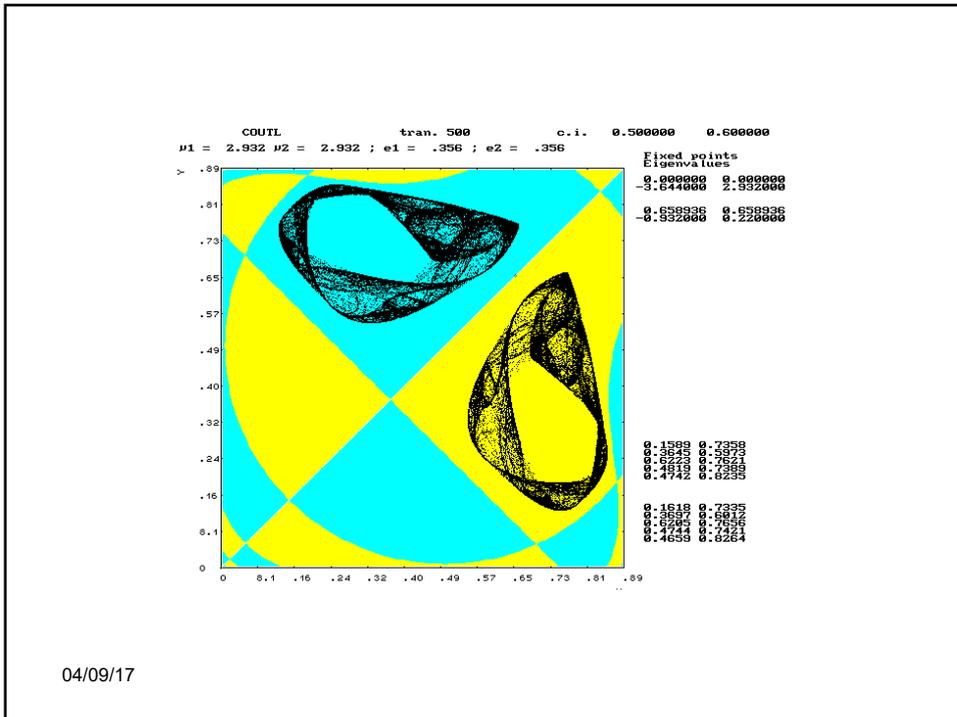
I, of course, do not know the formal, mathematical, definition of Chaotic Attractors, but I will do my best to correctly guess it. Strange Attractor is a collection of points such that each point is a function of another point. What kind of function? Everything from polynomials to transcendentals. Like a randomly-appearing mosaic - instead of individual features appearing one after the other, dots light up and eventually compose distinct shapes.

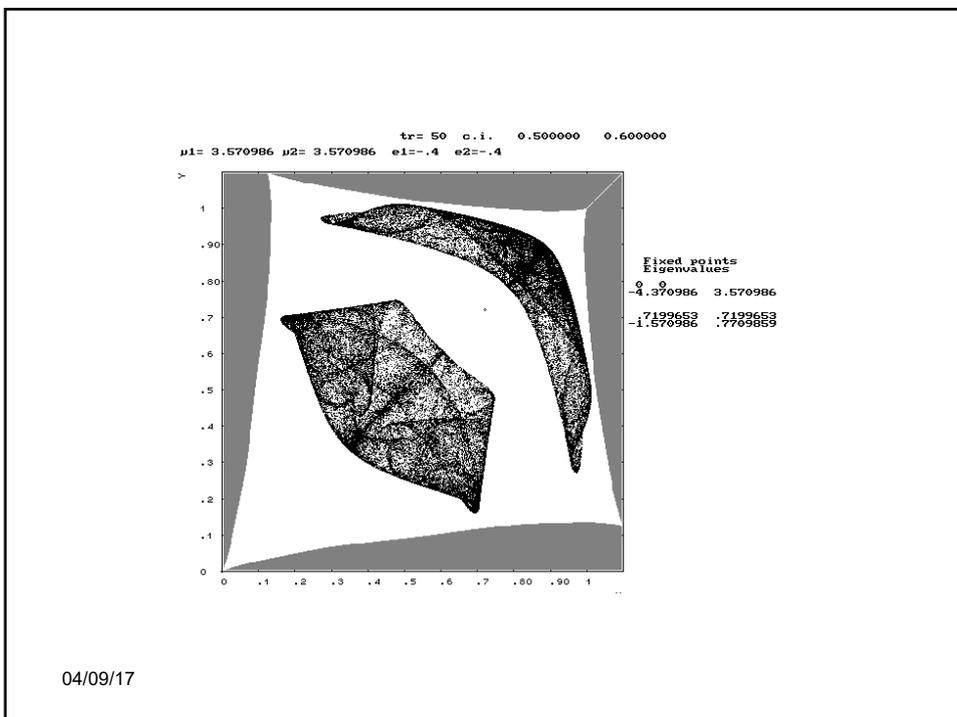
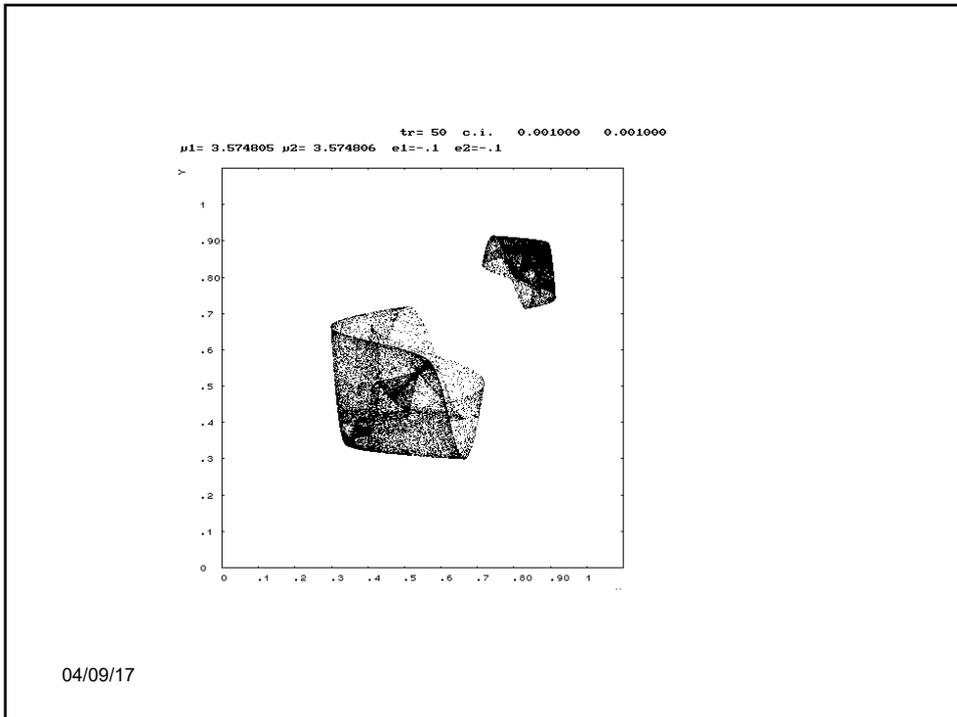
Chaos and symmetry

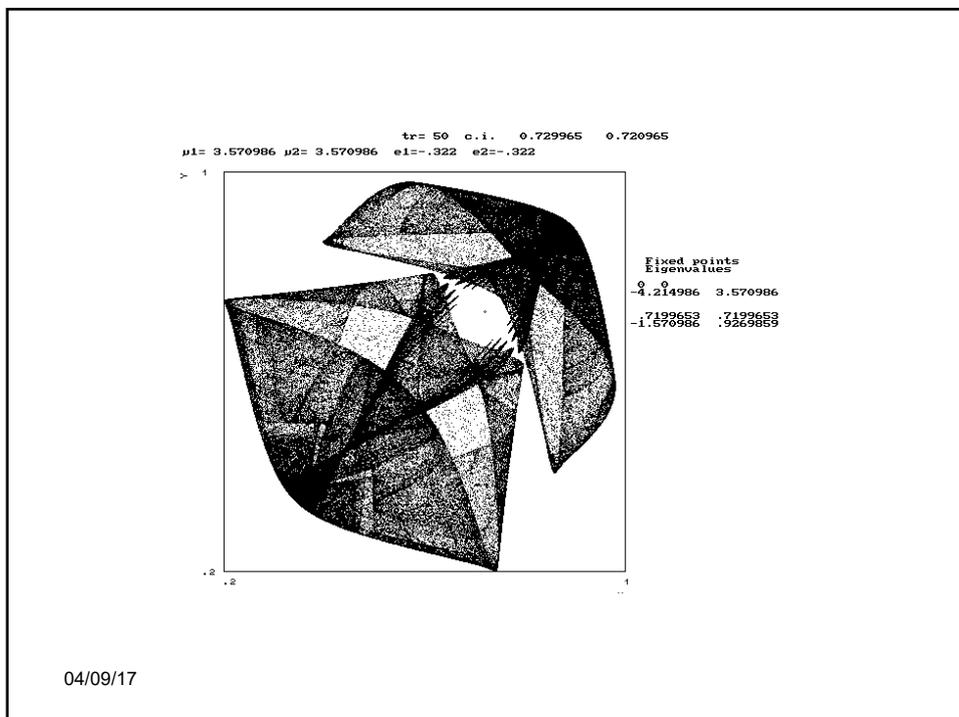
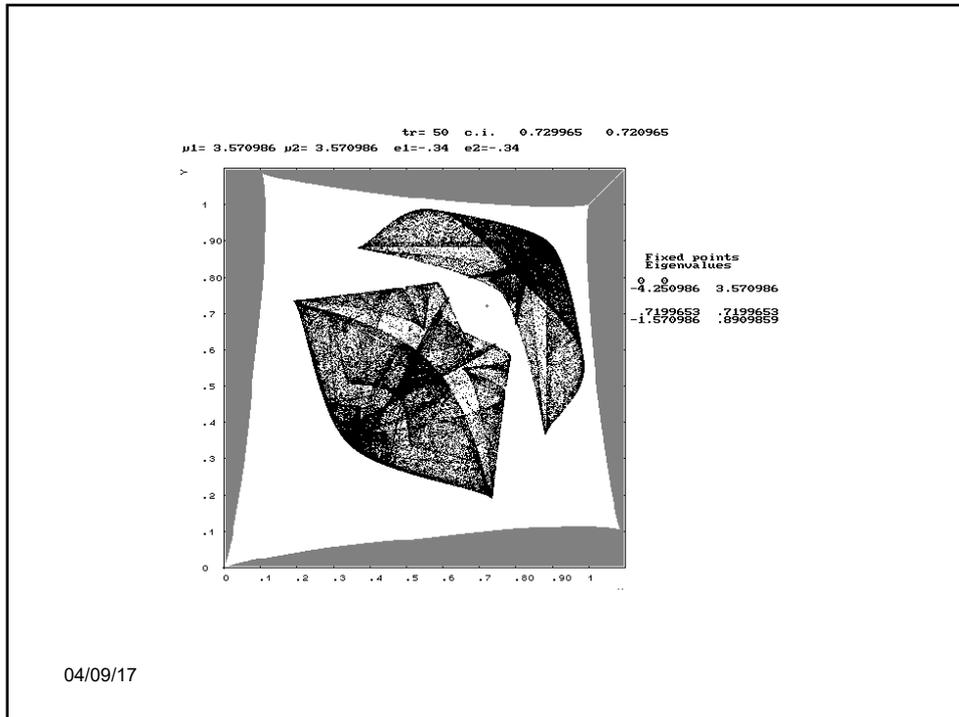
Coupled Twisted Logistic: four parameter algebraic map of 4th degree

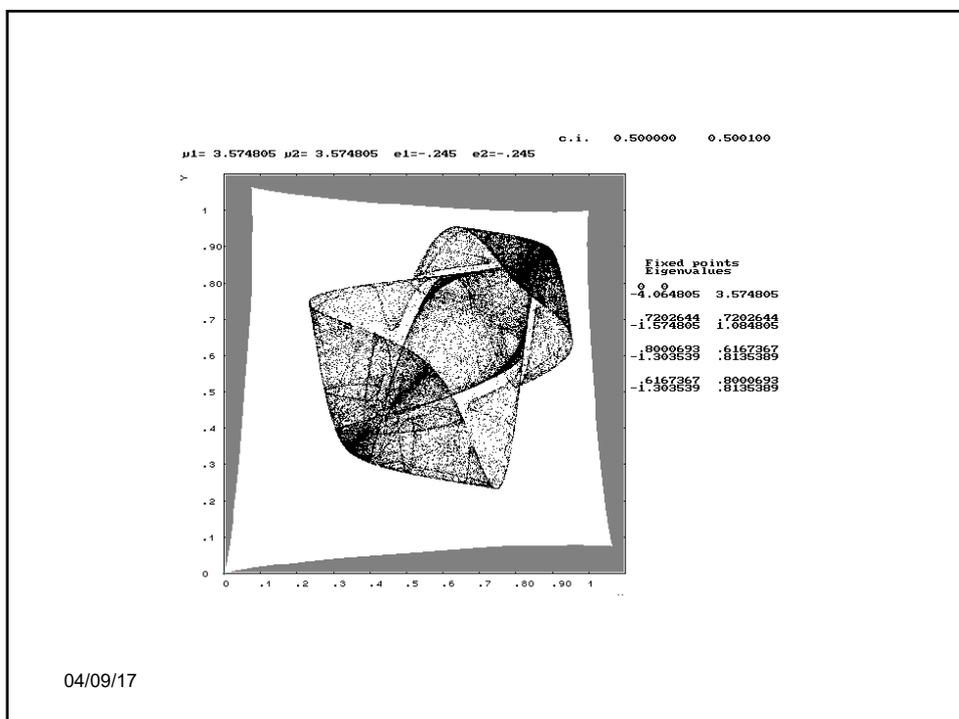
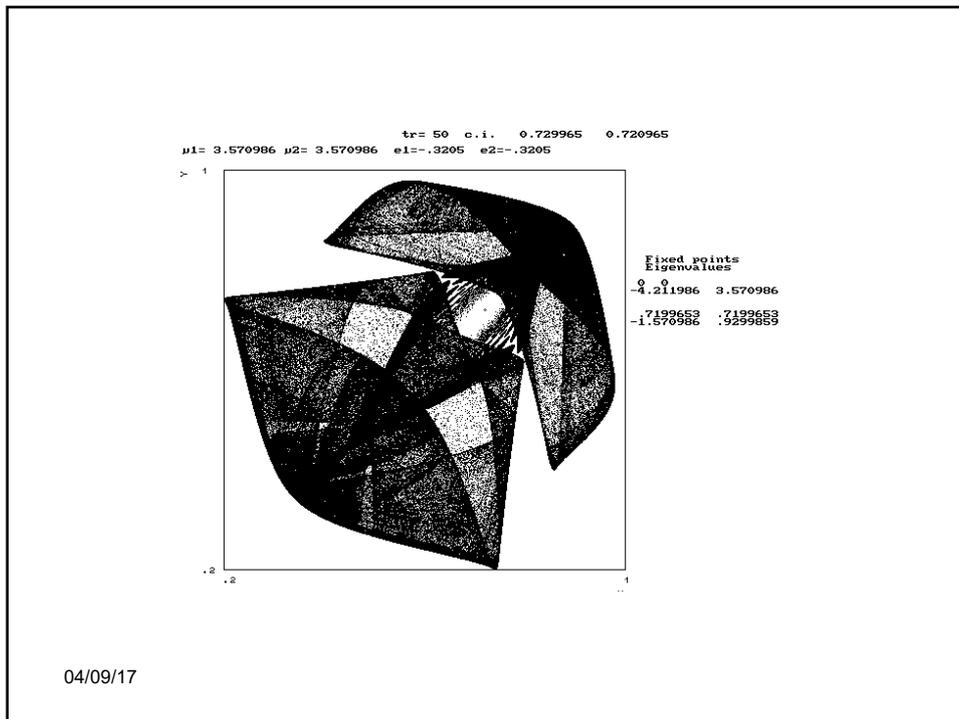
$$T : \begin{cases} x' = \mu_1 y(1 - y) + \varepsilon_1 (x - y) \\ y' = \mu_2 x(1 - x) + \varepsilon_2 (y - x) \end{cases}$$

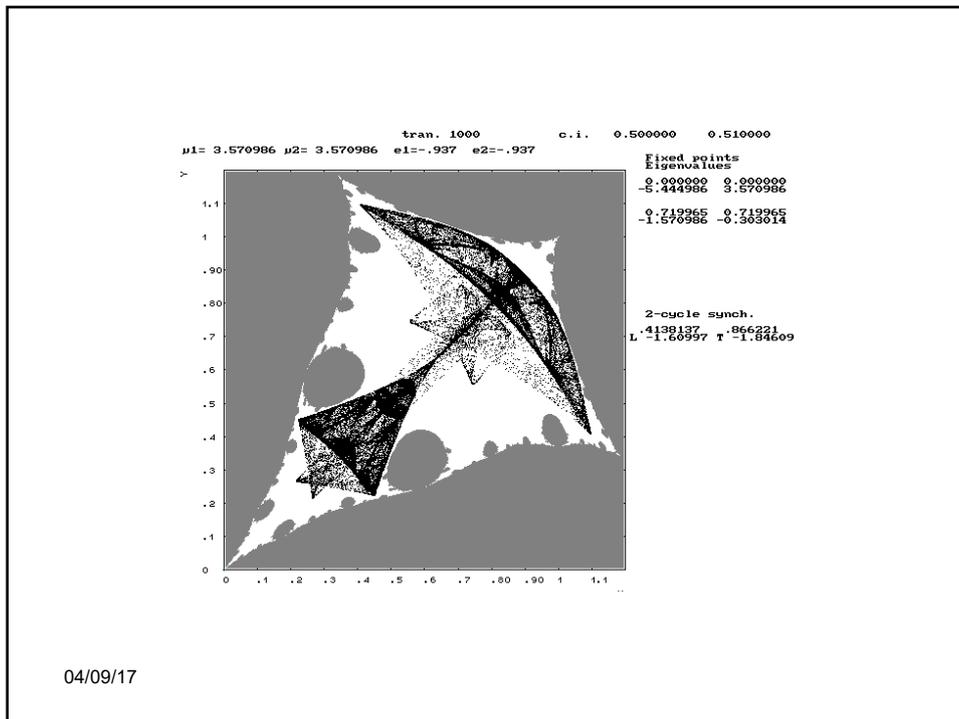
04/09/17





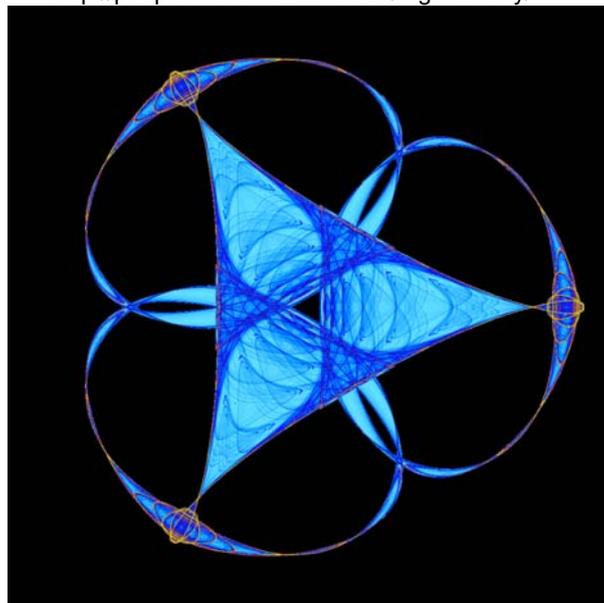






Chaos and Symmetry. Mike Field , Martin Golubitsky,

<http://people.mbi.ohio-state.edu/mgolubitsky/>

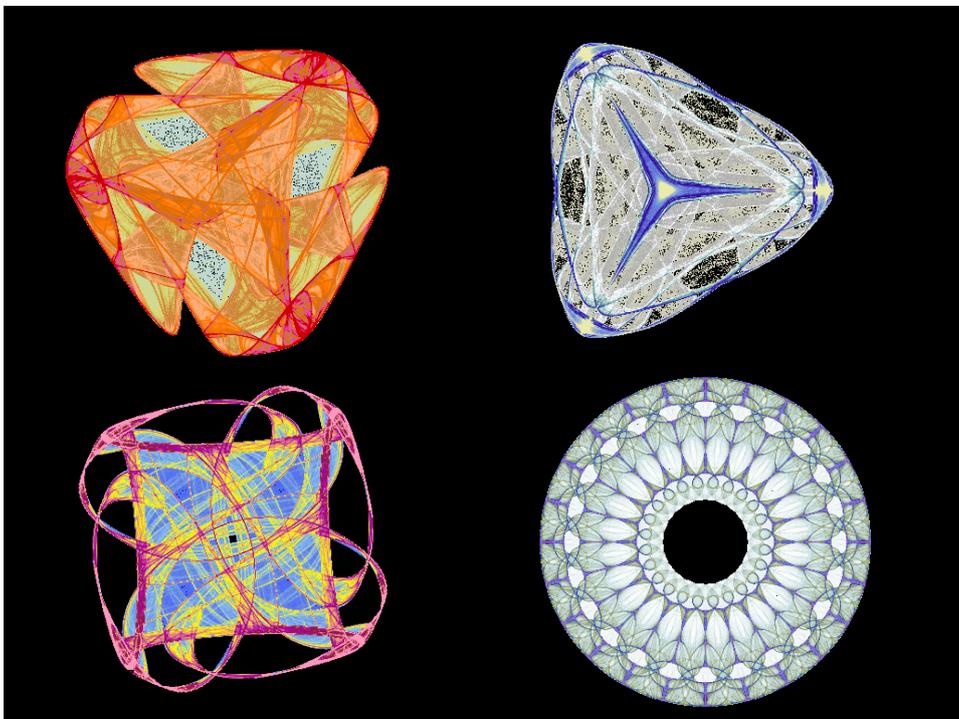


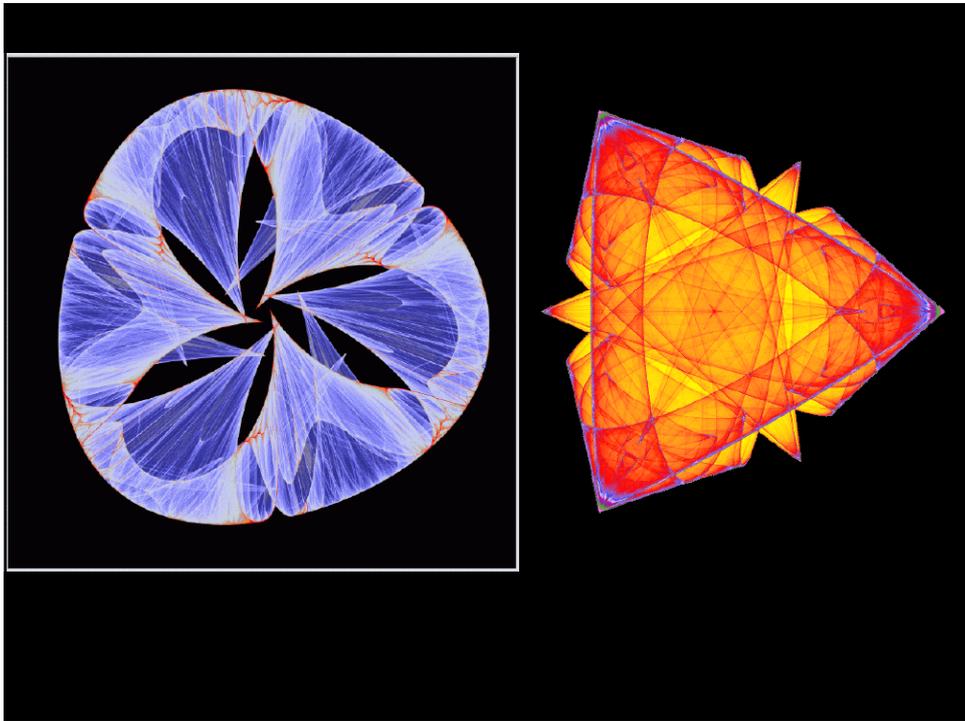
04/09/17

```

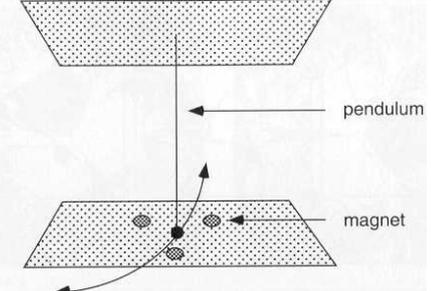
Symmetric Icons Program
DEFDBL I, P-Q, X-Z
ON ERROR GOTO errortrap
  DEF fnxpix (x) = nstartx + scalex * (x + scale)
  DEF fnypix (y) = npixely - scaley * (y + scale)
  GOSUB initialize
  GOSUB menu
loops:
  GOSUB iterate
  x = xnew: y = ynew
  PSET (fnxpix(x), fnypix(y))
  a$ = INKEY$
  IF a$ = "c" THEN iterates = 1: CLS : GOSUB parameters
  IF a$ = "i" THEN GOSUB parameters
restart:
  IF a$ = "m" THEN GOSUB menu
  iterates = iterates + 1
  GOTO loops
iterate:
  zzbar = x * x + y * y
  p = alpha * zzbar + lambda
  zreal = x: zimag = y
  FOR i = 1 TO n - 2
    za = zreal * x - zimag * y
    zb = zimag * x + zreal * y
    zreal = za: zimag = zb
  NEXT i
  zn = x * zreal - y * zimag
  p = p + beta * zn
  xnew = p * x + gamma * zreal - omega * y
  ynew = p * y - gamma * zimag + omega * x
  RETURN
menu:
  GOSUB parameters
  PRINT USING "(X,y) = ##.#### ##.####": x; y
  PRINT "Scale =", scale
  PRINT "ESC to exit program"
  PRINT "R for RETURN"
CLS
  GOTO menu
initialize:
  CLS
  scale = 1!
  nscreen = 12: npixelx = 640: npixely = 480
  nstartx = 160
  SCREEN nscreen
  GOSUB setscreen
  x = .01: y = .003: n = 4: iterates = 1
  lambda = -1.8: alpha = 2: beta = 0: gamma = 1!: omega = 0
  RETURN
initialpoint:
  CLS
  PRINT "Enter r to reset coordinates automatically"
  PRINT "Enter x to INPUT coordinates"
setscreen:
  CLS
  scaley = npixely / (2 * scale)
  scalex = (npixelx - nstartx) / (2 * scale)
  RETURN

```



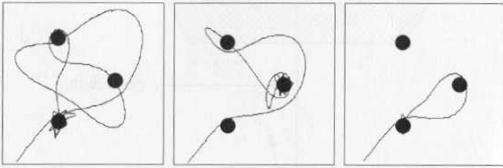


strutture complesse dei bacini di attrazione nel caso di più attrattori coesistenti



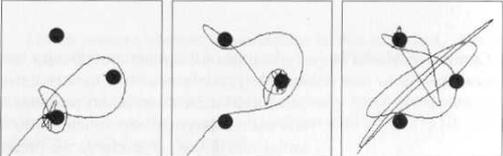
Trajectories and Friction

Top view of the paths of the pendulum. Same initial point in the lower left, but different friction parameters (low friction on the left and high friction on the right). Note that the final rest point of the pendulum is not the same in the three experiments.

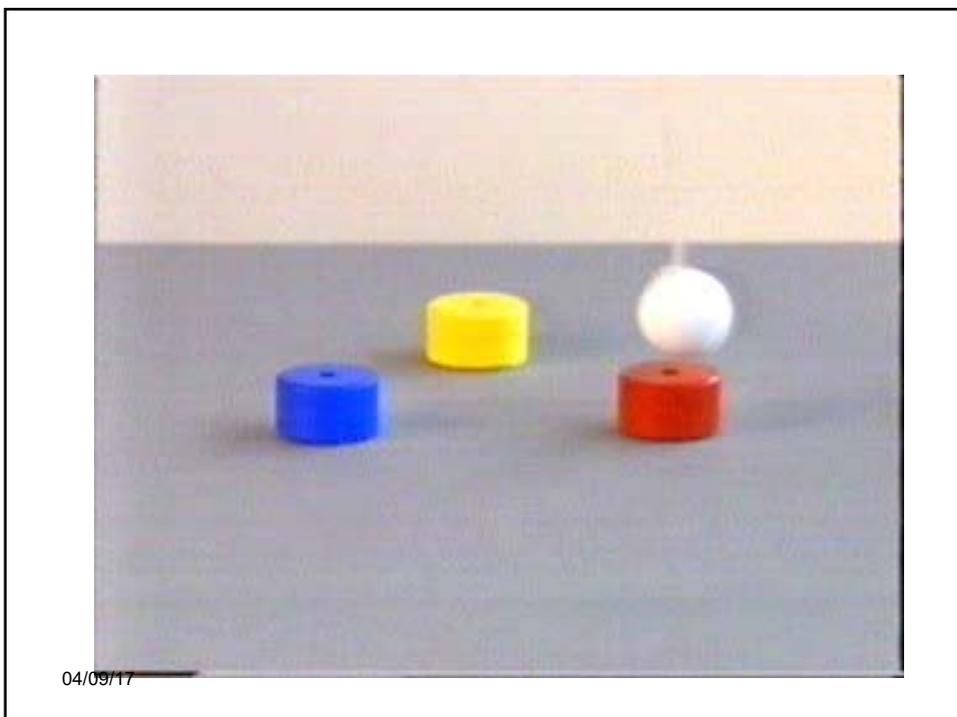


Trajectories and Gravitational Force

Top view of the paths of the pendulum. Same initial point and different force parameters with low force pulling the pendulum to its most stable position (left), and strong force (right).



04/09/17



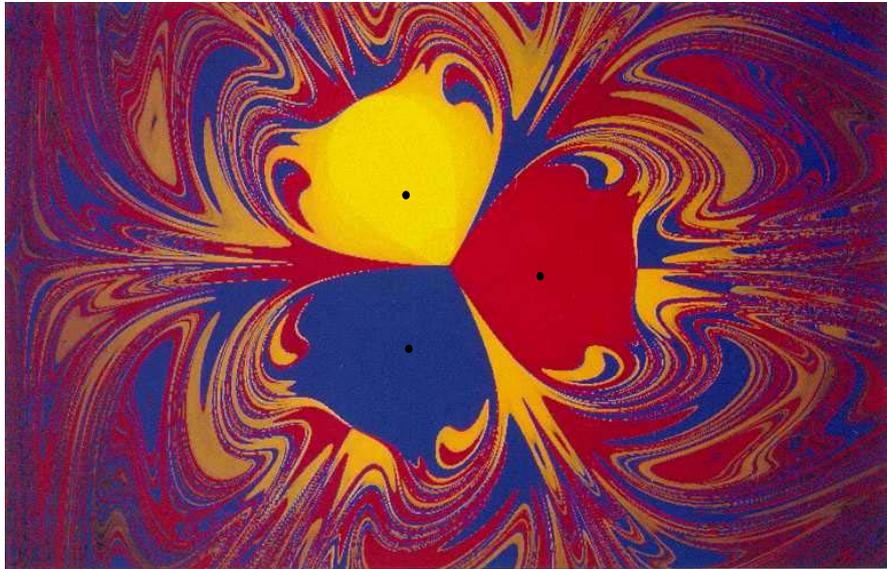


Plate 27: The pendulum experiment from section 12.8. The basins of attraction of the three magnets are colored red, blue, and yellow.
04/09/17

Bibliografia minima

Abraham R. Gardini L., Mira C.

"Chaos in Discrete Dynamical Systems. A Visual Introduction in 2 Dimensions", Springer-Verlag, 1997.

Bischi G.I., Carini R., Gardini L., Tenti P.

"Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici". Bruno Mondadori, 2004.

Peitgen H.O., Richter P.H.

"La bellezza dei frattali", Bollati Boringhieri, 1987.

Pickover C.A.

"Chaos in wonderland", St. Martin's Press, 1995

Stewart I.; Golubitsky M.

"Terribili simmetrie. Dio è un geometra?" Bollati Boringhieri, 1995.

04/09/17