Perché gli studenti fanno sempre gli stessi errori?

Il miglioramento dei risultati a volte viene visto come un valore in sé, ma un intervento finalizzato semplicemente o soltanto a tale miglioramento ignora i possibili motivi di una mancata risposta o di un errore, concentrando l’attenzione sull’effetto piuttosto che sulle cause. Questa pratica didattica spesso non è efficace sul lungo periodo. A partire da un’accurata e approfondita riflessione, basata sull’esperienza maturata su un curriculum verticale, si propone di analizzare e discutere le possibili cause degli errori ricorrenti, per poter intervenire in modo consapevole.

Ieri:

Il **problema** come situazione *per risolvere la quale non si conoscono a priori procedure da seguire,* come attività che permette allo studente di mettersi in gioco, di sbagliare e di fare **errori**.

Oggi:

Come reagiamo davanti agli errori dei nostri studenti?

Tutti concordiamo con la valenza positiva dell’errore, ma quali comportamenti mettiamo in atto quando gli alunni sbagliano?

Quante risorse ogni anno investiamo nel recupero?
Recupero in itinere, sportello help, corsi pomeridiani…

Ma il risultato raramente è proporzionato alla sforzo impiegato.
I risultati ottenuti sono molto limitati e, soprattutto, sono spesso raggiunti abbassando il livello delle richieste.
[R. Zan, Anna Baccaglini-Frank, Avere successo in Matematica, Utet 2017]

Alto livello di frustrazione

Sbagliando si impara

Errori di calcolo

Errori di distrazione

Errori lievi

Errori gravi

Errori di concetto

Errori ricorrenti

'evitare errori è un ideale meschino'- Popper

Da parte degli studenti

- Non ho avuto tempo
- Ero in ansia
- Non ho capito niente
- Era difficile
- Non sono portato….
- Non ci riesco, non ci sono mai riuscito
- Ho studiato, ma non mi ricordo….

Da parte degli insegnanti

Ha lacune di base

Non si esercita abbastanza

Non ha metodo di studio

Non studia

Non ha capacità

- Studiare, analizzare la reiterazione di alcuni errori degli studenti ha provocato in noi una sorta di spiazzamento.
- Il lavoro di questi anni con gli insegnanti del primo ciclo e i laboratori con i ragazzi ci hanno aiutato a riflettere e riconsiderare alcune situazioni in una prospettiva diversa.

O giusto o sbagliato

- Spesso l'errore viene trattato in maniera paradossale: se ne parla tutti i momenti, ma non si sa analizzarlo; si dice che è utile e prezioso, ma lo si usa in negativo nelle valutazioni; si esortano gli studenti a esplicitarlo, e nello stesso tempo si nascondono i propri. (Dedò)

- Dell'errore si parla continuamente
- Ogni insegnante ha un proprio elenco che distingue in gravi e lievi
- Tutti dicono che è utile
- Come si usa?

A proposito della parola “errore”, non dobbiamo dimenticarci che non è un caso che “errare” significhi, oltre che “sbagliare”, anche “vagare senza meta”: e si vaga senza meta quando si è sbagliato strada, ma anche, per esempio, quando si arriva in una città che non si conosce e si vuole come prima cosa annusarne l’atmosfera. Si tratta di un’attività molto positiva, divertente, e anche costruttiva, perché, anche se ogni tanto si perde la strada, ne possiamo davvero ricavare un *feeling della città che magari non otterremmo con un tour organizzato.* *(Dedò)*

‘*ecco il giudicio uman come spesso erra!*’ (*Orlando furioso*, I, VII, 2)

Scheda insegnante

- Analizzare, interpretare gli errori

Scheda insegnante

Due studenti risolvono l'equazione di secondo grado $(x-3)(2x+5)=0$ in due modi diversi

il primo procede così: $2x^2+5x-6x-15=0$

$2x^2-x-15=0$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\frac{1\pm 11}{4}$$

$$x_1=3 \quad e \qquad x_2=-\frac{5}{2}$$

il secondo procede così: $(x-3)(2x+5)=0$

$$(2x+5)=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$$

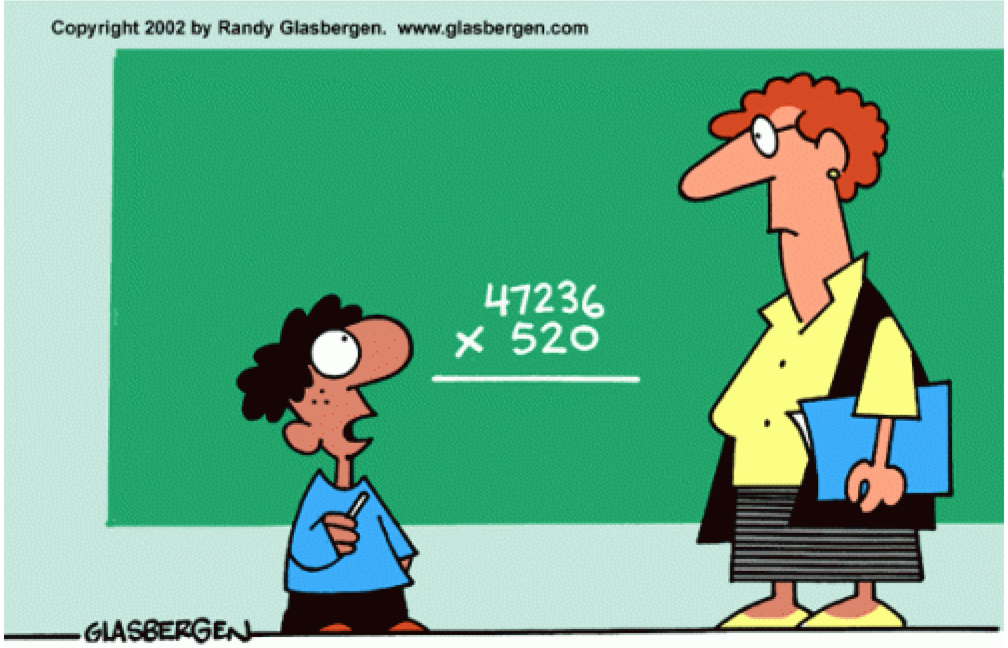
$$(x-3)=0 \rightarrow x=3$$

Quale dei due studenti ha lavoro meglio?

In una verifica scritta che punteggio attribuireste ai due esercizi?

Analizzare, interpretare…

- È un errore grave….
- Siamo tutti d'accordo su ciò che riteniamo grave?



Non ci sono già abbastanza problemi nel mondo?

La prof.ssa Dedò….

- ***Ad una valutazione negativa è necessario arrivare se uno studente, per risolvere l'equazione (x-2)(x+3)=0 comincia a moltiplicare i due fattori per poi applicare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado.***
- O magari, per risolvere l'equazione *(x-2)(x+3)(x-7)=0* moltiplica e conclude poi che non è capace di risolverla perché non conosce una formula risolutiva per l'equazione di terzo grado.
- Ma anche nel primo caso, e ipotizzando che non si infilino nella risoluzione degli errori di conto e che lo studente arrivi alle due radici 2 e -3, cioè che "non faccia errori*", la valutazione deve essere ugualmente pesantemente negativa.*

Due diverse situazioni sono possibili: può essere che lo studente non abbia capito nulla di cosa significhi trovare le radici di un’equazione, ma può essere anche che si sia innescato un automatismo che è esattamente l’atteggiamento che dobbiamo combattere.

Si possono fare centinaia di esempi analoghi. (vedi modello primitivo)

Analizzare, interpretare…

- Spesso l’interpretazione più immediata di un errore commesso da un allievo in un certo contesto rimanda alla mancanza di conoscenze o abilità in quel contesto.
- *Ad esempio, se Maria ha sbagliato a calcolare l’area di una figura geometrica(dalla scuola primaria all’università), l’insegnante tende a concludere che non ha conoscenze sufficienti a riguardo*.
- Un’azione didattica coerente con tale interpretazione tenderà a recuperare tali conoscenze, ad esempio riprendendo gli argomenti in questione, rispiegandoli, proponendo esercizi di rinforzo.

- ogni errore, anche se viene compiuto in contesto matematico, anche se è molto tecnico, si porta dietro tutto un vissuto del quale dobbiamo essere consapevoli.

Riflessioni sul simbolo uguale

- L’uguale viene usato spesso sia nel linguaggio naturale sia in matematica sin dalla scuola primaria.
- Come usano l’uguale gli studenti?
- Come si usa nel linguaggio naturale?

Galleria di errori: il linguaggio

I: So you chose Duncan's for you but Eric's for what you thought would get the best answer. Why did you think Eric would get the best answer?

E: Because I didn't completely understand what he was going on about, lots of *x*s and *y*s.

I: Eric?

E: Yes. And it's what Miss G likes because she likes complicated things and would probably give it the best mark.

I: Right. But this one you chose for yourself because you did understand that one?

E: Yes, because I understood it.

I: That's interesting. In fact, you thought that Eric's was wrong; you said you didn't know if it's got a mistake in it and you thought Arthur's one is right,… but this [Eric's] would get the best mark because it's kind of got *x* and *y* in?

E: Yes. I understood Arthur's one, but Eric's was more, looked more mathematical; it's got more to it.

Galleria di errori: il linguaggio

- Uso delle parentesi

$$x + 1 \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + x + 2$$

L'alunno ha una sua stenografia personale e la *correzione dell'insegnante assumerà solo il sapore di un'inutile e ingiusta pignoleria*

Galleria di errori: il linguaggio

Emerge quindi che la maggior parte degli studenti il linguaggio matematico non è uno strumento che aiuta ad affrontare e risolvere problemi, ma piuttosto una forma in cui tradurre a posteriori il proprio pensiero in modo da soddisfare l'insegnante

G gio

A1. Arthur, Bonnie, Ceri, Duncan, Eric, and Yvonne were trying to prove whether the following statement is true or false:

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

Arthur's answer

a is any whole number
b is any whole number
$2a$ and $2b$ are any two even numbers
$2a + 2b = 2(a + b)$

So Arthur says it's true.

Bonnie's answer

$2 + 2 = 4$	$4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$	$4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$	$4 + 6 = 10$

So Bonnie says it's true.

Ceri's answer

Even numbers are numbers that can be divided by 2. When you add numbers with a common factor, 2 in this case, the answer will have the same common factor.

So Ceri says it's true.

Duncan's answer

Even numbers end in 0, 2, 4, 6, or 8. When you add any two of these, the answer will still end in 0, 2, 4, 6, or 8.

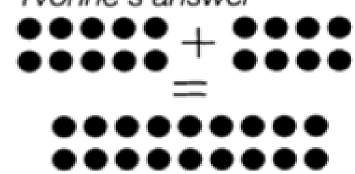
So Duncan says it's true.

Eric's answer

Let x = any whole number,
y = any whole number
$x + y = z$
$z - x = y$
$z - y = x$
$z + z - (x + y) = x + y = 2z$

So Eric says it's true.

Yvonne's answer



So Yvonne says it's true.

From the above answers, choose **one** that would be closest to what you would do if you were asked to answer this question. [ ]

From the above answers, chose the **one** to which your teacher would give the best mark. [ ]

Galleria di errori: il linguaggio

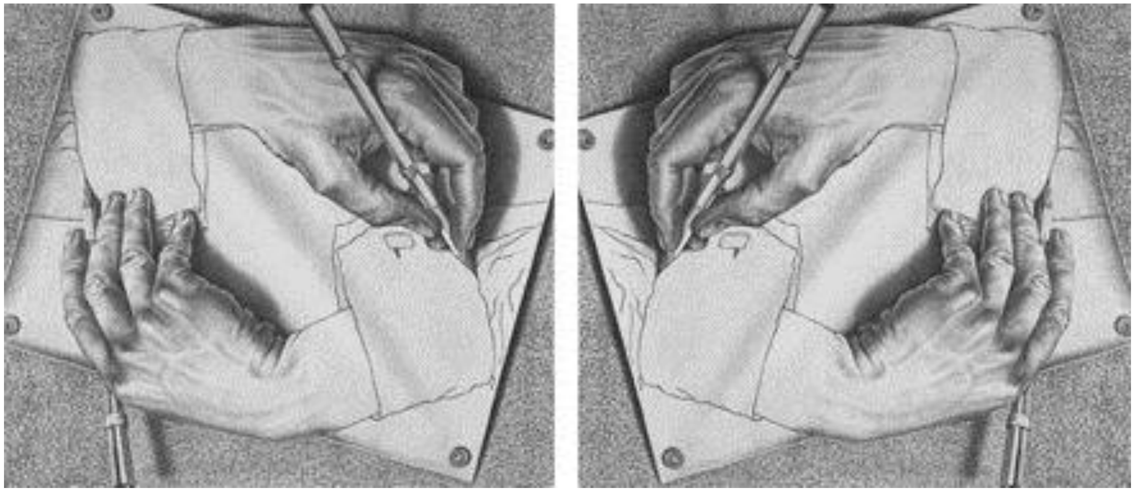
Table 1

Distribution of Students' and Teachers' Choices of Proofs for A1, Familiar Conjecture, and for A6, Unfamiliar Conjecture

Argument	Percentages of students: Own approach	Percentages of students: Best mark	Percentages of teachers: Own approach	Percentages of teachers: Best mark
Argument chosen for A1	$N = 2450$	$N = 2423$	$N = 94$	$N = 94$
Duncan (narrative)	29	7	6	12
Bonnie (empirical)	24	3	3	7
Ceri (narrative)	17	18	10	11
Yvonne (visual)	16	9	—	—
Arthur (algebraic)	12	22	81	62
Eric (algebraic)	2	42	0	9
Argument chosen for A6	$N = 2381$	$N = 2348$	$N = 94$	$N = 94$
Kate (narrative)	41	19	70	48
Leon (empirical)	39	2	4	7
Nisha (algebraic)	7	55	22	38
Maria (algebraic)	13	24	3	6

Note. Yvonne's response was not given to the teachers.

- Cosa significa il simbolo “=“?
- Facciamo degli esempi in cui questo simbolo viene usato



- Alla domanda: "Cosa significa per te il segno «=»?", seguita quindi dalla richiesta di un esempio nella maggior parte degli esempi prodotti dagli studenti il segno «=» collega un'operazione (a sinistra) con il suo risultato (a destra).

L'interpretazione dell'errore

$$2 = x$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

per l'insegnante "=" serve ad esprimere una relazione, molto spesso per gli allievi è un "simbolo per fare qualcosa" un segno direzionale (procedurale) che ha a sinistra gli operandi e a destra il risultato.

Lo studente interpreta il segno '=' come comando ad eseguire operazioni.

D11. Osserva il riquadro:

$$\boxed{17 + 46 = 60 + 3}$$

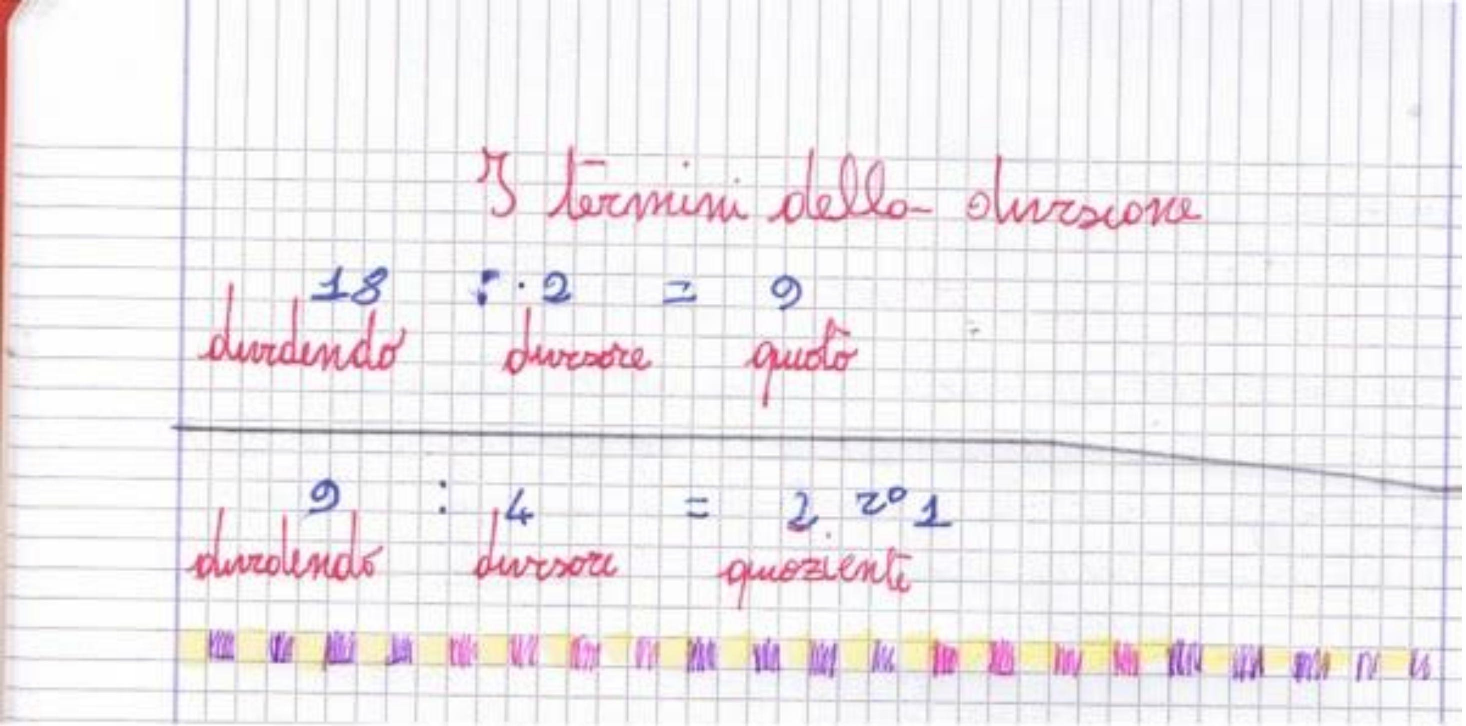
Perché quello che è scritto nel riquadro è corretto?

☐ A. Perché ci sono due numeri a destra e due a sinistra del segno di uguale

☐ B. Perché il risultato della prima addizione è uguale al risultato della seconda addizione

☐ C. Perché 60 è il risultato di 17 + 46

Risposte corrette 26,8%


I termini della divisione
18 : 2 = 9
dividendo divisore quoto
9 : 4 = 2 r° 1
dividendo divisore quoziente


No, non capisci...
Zero vuol dire niente,
ma vuol dire tanto!!!

Icompom

74 cm^2 = 4 u cm^2, 7 de cm^2

0,4 dm^2 = 0 u dm^2, 4 de cm^2

2,04 cm^2 = 2 u cm^2, 0 de mm^2, 4 u mm^2

3,8 m^2 = 3 u m^2, 8 de dm^2

36 mm^2 = 6 u mm^2, 3 de mm^2

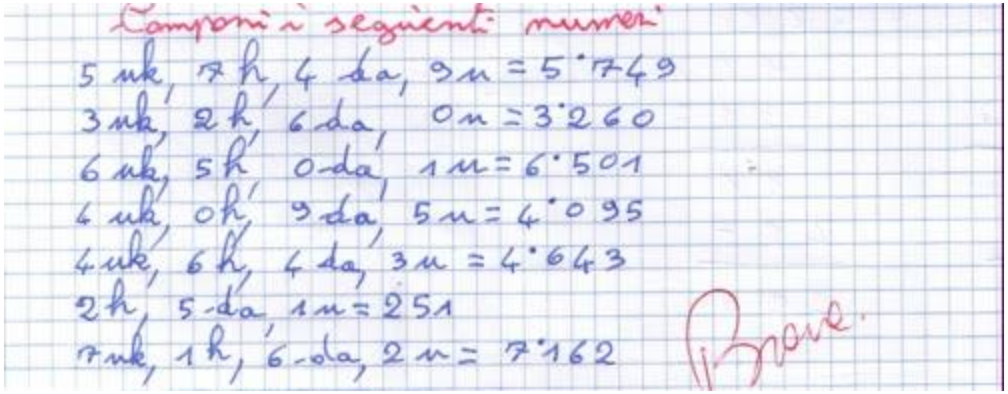
13,9 dam^2 = 3 u dam^2, 1 de dam^2, 9 de m^2

12,75 Km^2 = 2 u Km^2, 1 de Km^2, 7 de hm^2, 5 u hm^2.

196 dm^2 = 6 u dm^2, 9 de dm^2, 1 u m^2

2,345 dam^2 = 2 u dam^2, 3 de m^2, 4 u m^2, 5 de dm^2

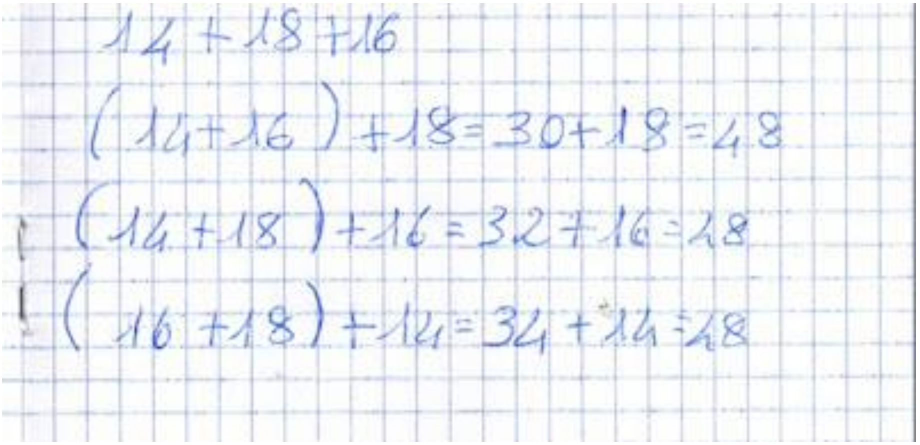
alla primaria



Componi i seguenti numeri

5 uk, 7 h, 4 da, 9 u = 5.749
3 uk, 2 h, 6 da, 0 u = 3.260
6 uk, 5 h, 0 da, 1 u = 6.501
4 uk, 0 h, 9 da, 5 u = 4.095
4 uk, 6 h, 4 da, 3 u = 4.643
2 h, 5 da, 1 u = 251
7 uk, 1 h, 6 da, 2 u = 7.162

Brava.



14 + 18 + 16
(14 + 16) + 18 = 30 + 18 = 48
(14 + 18) + 16 = 32 + 16 = 48
(16 + 18) + 14 = 34 + 14 = 48

118 : 2 = 59 + RESTO 0
59 : 2 = 29 + RESTO 1
29 : 2 = 14 + RESTO 1
14 : 2 = 7 + RESTO 0
7 : 2 = 3 + RESTO 1
3 : 2 = 1 + RESTO 1
1 : 2 = 0 + RESTO 1.

Dalle prove invalsi

21. Qual è il numero nascosto dalla macchia che rende vera la seguente uguaglianza?

$$(1 \times 10) = 0{,}5 \times ✹$$

- ☐ A. 20.
- ☐ B. 2.
- ☐ C. 5.
- ☐ D. 0,2.

Livello 5 r. c. 34%

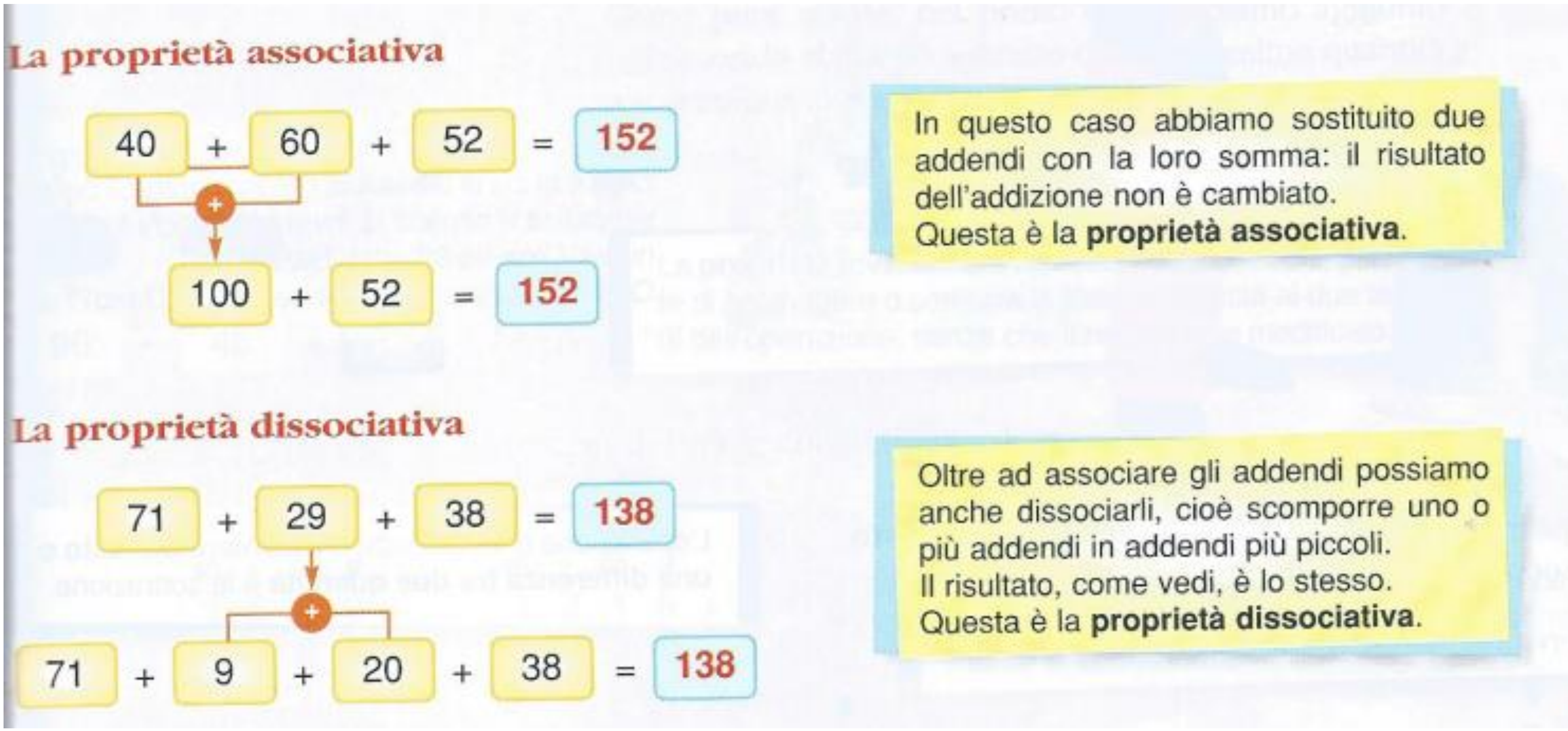
LE PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI

LE 4 OPERAZIONI HANNO ALCUNE **PROPRIETA'** CHE SONO UTILI PER FARE I CALCOLI PIU' VELOCEMENTE.

NOME DELLA PROPRIETA'	"POTERE" DELLA PROPRIETA'	ADDIZIONE	SOTTRAZIONE	MOLTIPLICAZIONE	DIVISIONE
COMMUTATIVA	Cambiando l'ordine dei termini dell'operazione, il risultato non cambia.	8 + 5 = 13 5 + 8 = 13	NO	6 x 3 = 18 3 x 6 = 18	NO
ASSOCIATIVA	Il prodotto (il risultato) di 2 o più termini non cambia se a 2 di essi si sostituisce il loro prodotto.	19 + 23 + 21 = 63 40 + 23 = 63	NO	5 x 6 x 2 = 60 10 x 6 = 60	NO
DISSOCIATIVA	Il prodotto non cambia se un termine viene sostituito con altri il cui prodotto sia uguale al fattore sostituito.	9 + 5 = 5 + 4 + 5 =	NO	35 x 4 = (30 + 5) x 4 = (30 x 4) + (5 x 4) = 120 + 20 =	NO
DISTRIBUTIVA	Scomponendo il moltiplicatore in addendi o il moltiplicando in addendi il prodotto non cambia.		NO	(25+8) x 7 = (25 x 7) + (8 x 7) = (65 - 7) x 4 = (65 x 4) - (7 x 4) =	
ALTRE PROPRIETA' "SPECIALI"					
INVARIANTIVA			Sommando o sottraendo lo stesso numero ai due termini della sottrazione, il risultato non cambia.		Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero il dividendo e il divisore, il risultato non cambia.

70 - 30 =   70 - 30 =   40 : 8 =   40 : 8 =

La proprietà "dissociativa" nei libri di testo del primo ciclo



La proprietà associativa

40 + 60 + 52 = 152

100 + 52 = 152

In questo caso abbiamo sostituito due addendi con la loro somma: il risultato dell'addizione non è cambiato.
Questa è la **proprietà associativa**.

La proprietà dissociativa

71 + 29 + 38 = 138

71 + 9 + 20 + 38 = 138

Oltre ad associare gli addendi possiamo anche dissociarli, cioè scomporre uno o più addendi in addendi più piccoli.
Il risultato, come vedi, è lo stesso.
Questa è la **proprietà dissociativa**.

Imperia, 9/10/12

La proprietà dissociativa

Il maestro vuol fare 28 fotocopie di una scheda e 17 di un'altra scheda.

Quante fotocopie dovrà fare?

$28+17=45$

Possiamo dissociare solo un addendo

$28 + 17$

$28 + 10 + 7 = 45$

Possiamo dissociare due o più addendi

$28+17=$

$20 + 8 + 10 + 7 =$

$30 + 15 = 45$

- Formule inverse?

- Scomposizione di polinomi

- Proprietà distributiva inversa?!

Da un sito internet

- **Proprietà distributiva**
  Per moltiplicare la somma di più numeri per uno stesso fattore, basta moltiplicare ciascun addendo della somma per il fattore moltiplicativo e poi sommare ciascun prodotto.
- **Raccoglimento a fattore comune**
  Per sommare valori che siano tutti multipli di uno stesso fattore, basta raccogliere il fattore moltiplicativo e sommare i quozienti ottenuti dopo il raccoglimento. É la proprietà inversa della proprietà distributiva.

L’interpretazione procedurale del simbolo uguale è un ostacolo didattico.

- Un’uguaglianza del tipo 12 – 8 = 4, viene interpretata come se a sinistra vi fosse una domanda, mentre a destra la risposta .
- I bambini di scuola primaria hanno difficoltà ad accettare uguaglianze del tipo … = 2 + 5, tendono a modificarle in

  2 + 5 = …, perché sono abituati a vederle scritte con l’uguale a destra.
- Anche uguaglianze del tipo 5 = 5 vengono rifiutate e modificate in 5 + 5 = 10 oppure in 5 – 5 = 0, poiché i bambini non accettano le uguaglianze in cui non vi sono *azioni*

- Particolare è anche la scoperta fatta da Camici et al. (2002), dove alla richiesta di completare l'uguaglianza 11 – 6 = [ ] – 11 ben il 23,5% di allievi che frequentavano la prima superiore ha fornito come risposta 6 (risposta *simmetrica).*
- Come affermato da Camici et al. (2002), le misconcezioni legate al simbolo di uguaglianza non sono presenti solo in bambini che frequentano la scuola primaria; anche studenti universitari oscillano tra le due interpretazioni (procedurale e relazionale).

- MacGregor e Stacey (1999) sottolineano come solitamente “il linguaggio dell’aritmetica è centrato sulle risposte”, mentre “quello dell’algebra è centrato sulle relazioni”.
- **Ad esempio, quando i ragazzi vedono 6 + 3 =, pensano automaticamente di dover scrivere 9 a destra dell’uguale (secondo la loro visione dell’uguale come simbolo che precede la risposta), quando potrebbero invece completare in altrettanti infiniti modi.**

All'università
I anno

professore: la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ non ha zeri

studente: non capisco perchè

il professore tenta di spiegare :...... moltiplico entrambi membri dell'equazione ......

lo studente perplesso dice : io so risolvere equazioni molto complicate, ma questa boh!

- se gli allievi non comprendono il concetto di uguaglianza, è difficile che capiscano perché una volta aggiunto un certo valore da una parte dell’equazione, bisogna aggiungerlo anche dall’altra parte (Cumali, 2007).
- L’unica alternativa che rimane loro è quella di “memorizzare una serie di regole per risolvere le equazioni” (Falkner et al., 1999), con il rischio di dimenticarsele o di non saperle applicare correttamente

In prima media

D23. Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?

A. ☐ $10 \times 0,5$

B. ☐ $10 \times 0,1$

C. ☐ $10 : 0,5$

D. ☐ $10 : 0,1$

Risposte corrette 10,8%

In seconda superiore....

D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?

- ☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$
- ☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$
- ☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$
- ☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

Livello 10 r. c. 12,1%

D15. Dividere un numero per 0,2 è lo stesso che moltiplicarlo per

- ☐ A. $\frac{1}{5}$
- ☐ B. $\frac{1}{2}$
- ☐ C. 2
- ☐ D. 5

Livello 10 risposte corrette 24,4

D19. **Giovanni afferma che $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$ è maggiore di $\left(\frac{3}{40}\right)^{81}$. Ha ragione?**

A. ☐ Giovanni ha ragione perché quando si eleva a potenza una qualsiasi frazione il risultato diminuisce all'aumentare dell'esponente.

B. ☐ Giovanni non ha ragione perché l'esponente della seconda frazione è maggiore dell'esponente della prima.

C. ☐ Giovanni ha ragione perché moltiplicando $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$ per $\frac{3}{40}$, che è minore di 1, si ottiene un numero minore di $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$.

D. ☐ Giovanni non ha ragione perché calcolando $\left(\frac{3}{40}\right)^{81}$ si ottiene una frazione con un numeratore maggiore di quello di $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$.

Livello 10 risposte corrette 25,9%

D8. **Il risultato di $16^{100} : 2$ è uguale a**

A. ☐ 8^{99}

B. ☐ 8^{100}

C. ☐ 16^{50}

D. ☐ 2^{399}

Livello 10 risposte corrette 17%

Misconcetti
La moltiplicazione accresce….

- esempi di misconcezioni, riportati in Zan (1998), sono i seguenti:
- “Se moltiplico due numeri il risultato è maggiore di entrambi.”
- Questa, e la convinzione “simmetrica” sul risultato di una divisione (che deve essere più piccolo del dividendo), produce gravi conseguenze in molti contesti. Tipico il caso dei problemi di proporzionalità, nei quali la presenza di numeri decimali minori di 1 “blocca” strategie utilizzate in modo naturale con numeri interi.

L’immagine concettuale che viene proposta per l’ordinaria moltiplicazione in N si fonda su due specifici riferimenti espliciti:

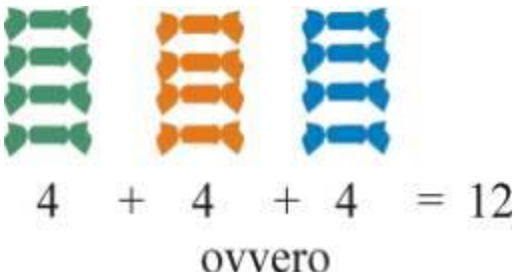
- formale: la moltiplicazione è definita come un’addizione ripetuta (cioè 5x3 è 5+5+5)
- grafica: la moltiplicazione è rappresentata graficamente da un rettangolo di punti-unità (per esempio 5x3 è rappresentata da 3 file di 5 punti-unità).

La misconcezione più diffusa, la moltiplicazione accresce sempre, in N è una concezione vera:

- In N, il prodotto è sempre maggiore dei fattori (a parte il caso in cui siano coinvolti numeri assai speciali come 0 ed 1).

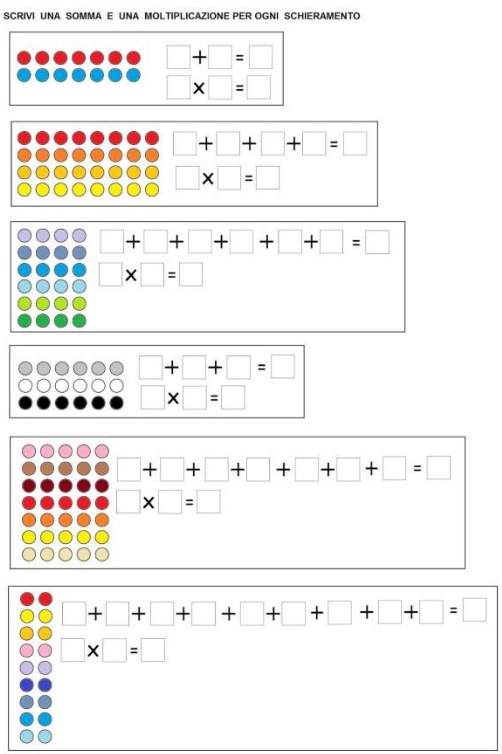
Sia la “giustificazione formale”, sia quella “grafica” perdono di senso quando uno dei due fattori è un numero del tipo 0.2: che senso ha giustificare l’operazione 5x 0.2 considerando l’addizione di 5 a sé stesso per 0.2 volte?

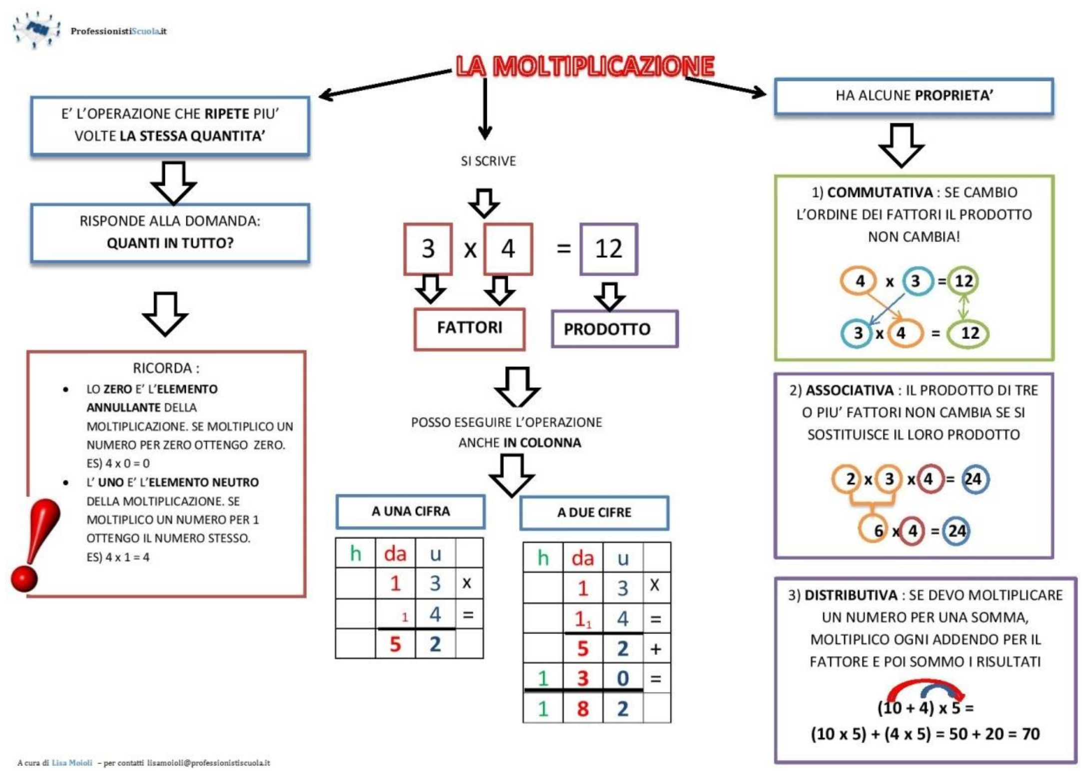
Che senso ha giustificare la stessa operazione 5x 0.2 considerando 0.2 file di 5 unità?



Modello parassita

- Moltiplicazione come addizione ripetuta….

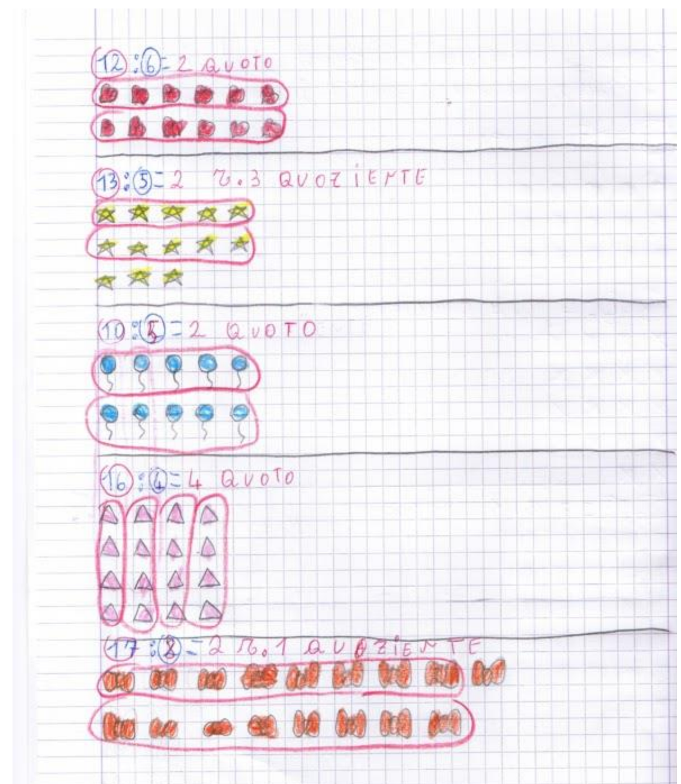




Analizzare…

Se un’idea, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, allora si tenta di applicarla ad un problema nuovo anche quando si rivela fallimentare.

Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l’idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di conservarla; ma questo fatto finisce con l’essere una barriera verso successivi apprendimenti l’origine dei misconcetti mette in luce che in alcuni casi lo studente fa riferimento ad un *modello primitivo tacito del fenomeno o del concetto in questione, cioè* ad un’interpretazione significativa di quella nozione matematica, che si sviluppa ad uno stadio iniziale del processo d’apprendimento (spesso suggerita in modo esplicito dall’insegnante) e che continua ad “influenzare, tacitamente, le interpretazioni e le decisioni risolutive dell’allievo. Il termine *tacito significa semplicemente che l’individuo non è consapevole di* questa influenza, oppure, per lo meno, della sua estensione” (Fischbein).



a proposito di modelli primitivi

- Alla domanda 1,3 è pari o dispari la maggioranza degli studenti (e di alcuni insegnanti) di ogni ordine e grado risponde senza esitazione: dispari!
- Alla domanda qual è il successivo di 7,5 molti rispondono 7,6!
- Da dove vengono questi errori e dove portano?

Errori frequenti di Analisi Matematica

a è un numero positivo $-a$ è un numero negativo

La radice quadrata di x^2 è x

Il valore assoluto di x è $-x$

I numeri razionali hanno una rappresentazione decimale limitata.

Un numero reale può avere una rappresentazione periodica in una certa base e una rappresentazione non periodica in un'altra base.

Quali sono i modelli parassiti che portano a questi errori?

All’università:
I numeri razionali hanno una rappresentazione decimale limitata!

Da un sito internet:
la conversazione tra due insegnanti su …

E' imbarazzante segnalare errori, ma come tutti sanno o dovrebbero sapere, è impossibile definire il precedente e il successivo di un numero decimale come richiesto nel test d'ingresso per la classe quinta. Questo è a mio avviso l'errore più importante, ma ci sono altre imprecisioni nei test di terza e quarta.
Ringrazio comunque per il prezioso aiuto che questo sito offre a noi insegnanti.
Saluti
Clara C.

- Cara collega, grazie per il suo arguto commento ma mi permetto di dissentire sulla sua affermazione circa l’impossibilità di definire il precedente e il successivo di un numero decimale, così come richiesto nelle prove d’ingresso da me elaborate. E’ indubbio che chiedere di indicare il successivo di 0,1 potrebbe generare delle perplessità poiché, desumo che le risposte 0,11 considerando i centesimi o anche 0,101 considerando i millesimi, potrebbero essere altrettanto valide di 0,2. L’esercizio però richiede di indicare il successivo di un decimo, perché dalla scrittura del numero si deduce che 0,1 è un decimo, non c’è scritto 0,10 (dieci centesimi) o 0,100 (100 millesimi) che ovviamente hanno lo stesso valore di un decimo, quindi…. Nella fase di lettura o di scrittura sulla linea dei numeri io dico ai bambini chiaramente come leggere e scrivere i numeri decimali dicendo di contare quante sono le cifre dopo la virgola… 2,5 si legge due unità e 5 decimi….. 2, 05 si legge due unità e 5 centesimi….. 2,005 è 2 unità e 5 millesimi…… 0,1 è un decimo perché è scritta una sola cifra decimale dopo la parte intera perciò io chiedo loro di indicare 0,2 come successivo.

- Allo stesso modo il successivo di 0,09 - che i miei alunni leggono come 9 centesimi - è 0,10 (dieci centesimi cioè un decimo) .... Infine il successivo di 8,999 è 9 Anche qui avrà da obiettare ma siccome sulla linea dei numeri nella rappresentazione dei millesimi il successivo a 0,999 è l’unità successiva alla parte intera ai miei alunni chiedo di indicarmi l’unità corrispondente. Io credo che fatte le opportune precisazioni nel momento della spiegazione su come si leggano e si scrivono i numeri decimali e della loro rappresentazione sulla linea dei numeri, non dovrebbero insorgere nelle testoline dei bimbi difficoltà o dubbi, fermo restando le sue giuste osservazioni. Se non fosse così allora non sarebbe neanche corretto far rappresentare i decimali sulla linea dei numeri…del resto questo genere di esercizi sono presenti su tanti testi in uso nella scuola primaria….

- Se lei non fosse d’accordo sulle mie precisazioni gradirei sapere quali sono le basi teoriche su cui fonda le sue osservazioni in modo da chiarire a me stesso l’infondatezza di quanto fin qui proposto in modo da non sbagliare io e ovviamente di non dare delle spiegazioni errate ai miei alunni. Gradirei inoltre sapere quali sono le imprecisazioni che lei ha colto nei test di terza e di quarta in modo da correggerle…. Nessuno è infallibile e le critiche, senza alcun imbarazzo se costruttive, servono solo a migliorare.

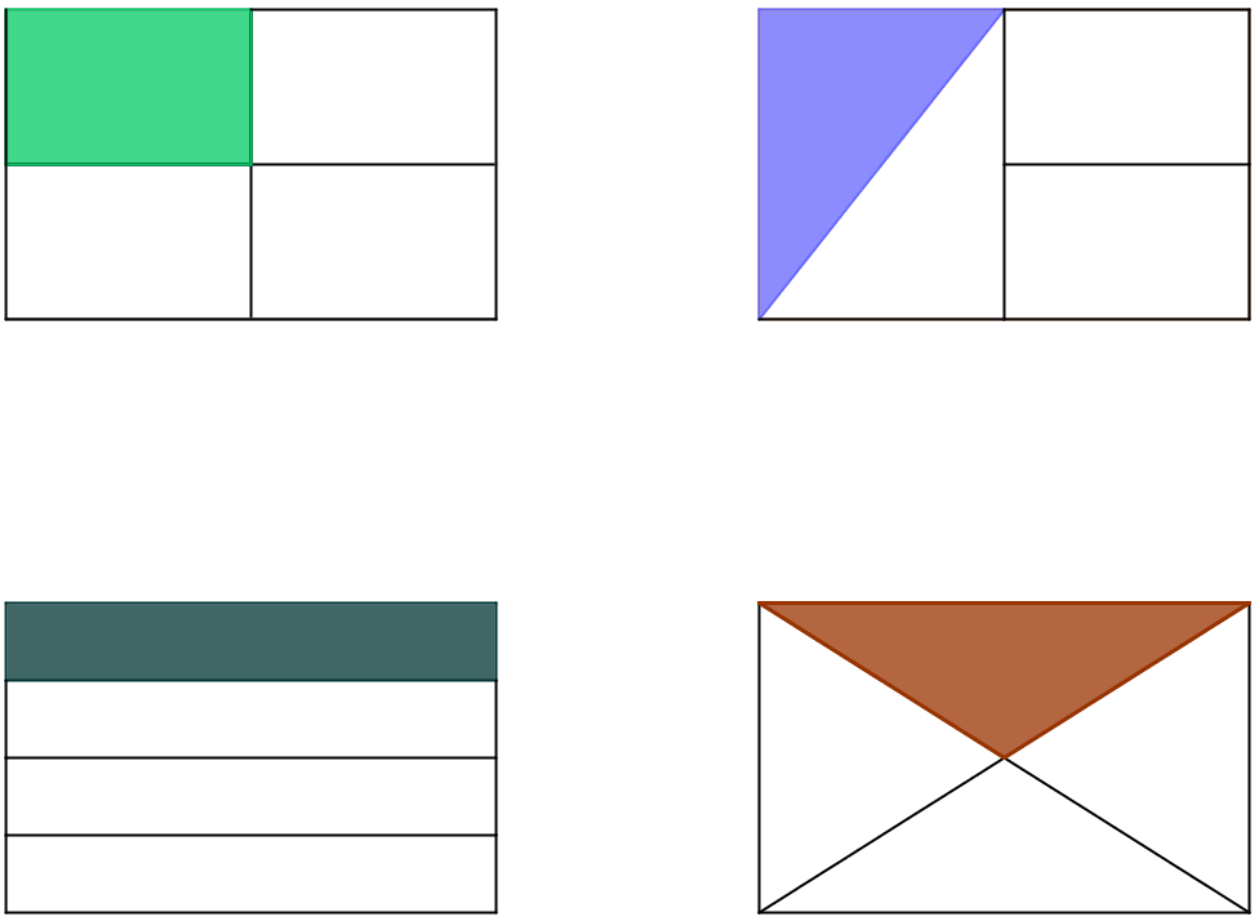
Al primo ciclo

- Un agguato sta nel tentativo di trascinare in Q (o nel mondo delle frazioni) quel che si è appreso in N.
- Per esempio l’idea di successivo o di numero pari.

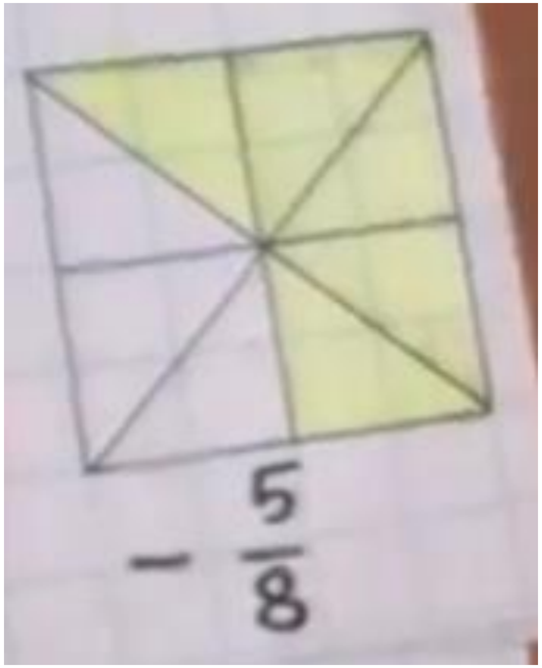
- In N, ogni numero ha un successivo, questo non è più vero né tra le frazioni né tra i razionali;
- Il concetto di multiplo e divisore di un numero non si trascina in Q

La conoscenza acquisita in un campo si tenta ostinatamente di “trascinarla” in un suo ampliamento

In tutte le figure la parte evidenziata è un quarto?



Su internet



?

Errori frequenti di Analisi Matematica

Il minimo dell’insieme dei numeri reali *> 0 è un numero piccolo a piacere.*
Il massimo dell’insieme N dei numeri naturali `e +∞.

I due aggettivi “infinito” e “illimitato” hanno lo stesso significato?

Assolutamente no, anche se si usano come tali, spesso, a scuola.

- L’insieme N dei numeri naturali è illimitato perché non ha un limite; se infatti m fosse un numero naturale limite, potrei sempre scrivere m+1; e dunque m non può essere un limite. Però N è anche infinito perché contiene infiniti elementi.
- La retta è illimitata perché, dato un qualsiasi punto P su di essa e un verso, posso sempre procedere oltre.
- L’insieme di punti della retta è infinito; dunque la retta è illimitata e infinita.
- Il segmento AB su una retta è limitato, perché ci sono i due punti A e B che lo limitano.
- Ma se considero l’insieme dei punti del segmento AB, allora questo è infinito.
- Dunque ci sono insiemi che sono limitati ma infiniti.

All'università
Errori frequenti in Analisi Matematica

Un esempio di funzione continua ma priva di derivata è fornito da una funzione costante; infatti la derivata di una costante è 0.

La derivata della funzione *f(x) = x2 + x + 1, calcolata per x = 0 vale 0; infatti f(0) = 1,*

che è una costante e la derivata di una costante è 0.

Una funzione *f : A → B è iniettiva se ad ogni valore di A essa associa un solo valore di B.*

- Il prodotto di due funzioni da R a R, entrambe dispari, è una funzione dispari.
- Se una funzione da R a R non è pari, allora essa è dispari.
- Se un polinomio *p(x) èdi grado pari, la corrispondente funzione x → p(x) è pari.*
- L'inversa della funzione *f(x) =*e^x *è la funzione* $x \to \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

Sempre al primo anno: analisi matematica

- Si ha $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- Commento. Questa è giusto una delle possibili incarnazioni della formula $f(x + y) = f(x) + f(y)$, egregiamente rappresentata anche dalle sue sorelle $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$, $\log(x + y) = \log x + \log y$, *ecc.*
- *La formula è corretta soltanto per le funzioni lineari, cioè quelle del tipo*
- $f(x) = mx$, *con* $m \in R$. *Soltanto tali funzioni trasformano le somme in somme. Osserviamo che* le funzioni esponenziali trasformano le somme in prodotti

Al primo anno di matematica….

- **Professore**: parliamo del significato geometrico della derivata.
- **Studente**: è la retta tangente…. **Professore**: la derivata è un numero e la tangente è una retta: impossibile che siano la stessa cosa! **Studente**: è la pendenza della tangente. Professore: giusto, ma in quale punto? **Studente**: nel punto $f(x_0)$ **Professore**: chi sono f e x_0 ? **Studente**: la funzione e il punto in cui calcoliamo la derivata. **Professore**: va bene; immaginiamo di aver detto per bene, cosa che non hai fatto, che f è una funzione da un intervallo I a valori reali e che x_0 e un punto di I ; allora $f(x_0)$ è un numero reale e non ha senso la tangente in $f(x_0)$ (candidato titubante).

Varie imprecisioni sono evidenti nel ping pong che si è instaurato; l'ultima riguarda la confusione fra il valore $f(x_0)$ e il punto del grafico $(x_0; f(x_0))$.

Giusto o sbagliato
Qualche considerazione finale

- lavorare sugli errori, saperli riconoscere, interpretare, trasformare non è una abilità naturale, ma una capacità che va scoperta, coltivata, allenata.
- Una prima pratica che può essere utile è quella di dare l’esempio. Dato che a tutti capita di sbagliare, cerchiamo di approfittare dei NOSTRI errori per ragionarci sopra, pubblicamente, insieme ai nostri studenti, cercando di analizzare qual è stato il procedimento mentale che ci ha portato a dire una cosa invece di un’altra.
- Non dobbiamo aver paura che la nostra autorevolezza venga meno per il fatto di riconoscere un errore. Anzi!

- Individuare la genesi di un errore può essere utile per lo studente, ma può anche essere illuminante per gli insegnanti e può provocare uno spiazzamento del punto di vista, ad esempio costringendoci a rivedere e a volte a ribaltare la nostra classificazione degli errori in gravi o meno gravi.
- E così si può scoprire che quelli che a noi potrebbero sembrare errori gravi (pensiamo ad esempio a un errore di manipolazione algebrica come dedurre $x \geq 0$ dalla disequazione $x2 \geq 0$) in realtà non indicano necessariamente una non comprensione della disequazione in questione, ma piuttosto un modo di procedere meccanico che, questo sì, va riconosciuto come un comportamento errato, e soprattutto va modificato.

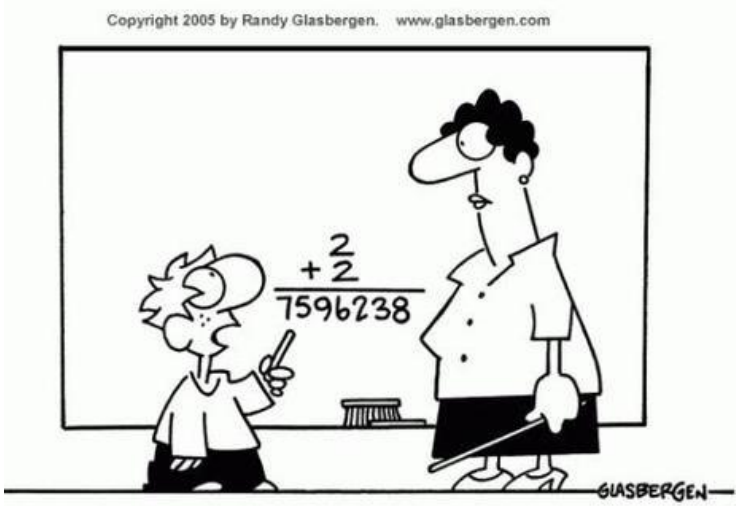
GIUSTO O SBAGLIATO? QUESTO È IL PROBLEMA
M. Dedò, L. Sferch

- sta avvenendo una rivoluzione, di cui ancora non ci rendiamo conto fino in fondo. Qualcuno l'ha definita "la terza fase", una nuova forma del sapere, ovvero il passaggio da un modo di conoscere "verticale" (il nostro, fatto di approfondimenti, di capacità di analisi, di concentrazione...) a uno "orizzontale" (quello dei nostri studenti, che è in relazione ovviamente con l'uso massiccio delle nuove tecnologie, con la capacità/modalità di essere contemporaneamente in chat, studiare, mandare sms, passare da un sito all'altro, navigare...).
- Come tutto ciò influenza il modo di strutturare il ragionamento dei nostri studenti?
- Possiamo liquidarlo superficialmente con "gli studenti di una volta erano migliori "?

GIUSTO O SBAGLIATO? QUESTO È IL PROBLEMA

M. Dedò, L. Sferch

- ….., l’unica risposta che ci sembra ragionevole è quella di saper ascoltare, e ricercare così con pazienza le cause profonde degli errori, partendo dagli errori degli studenti (e dai nostri), dalle nostre categorie di pensiero e di apprendimento, **da quella verticalità che è sinonimo di profondità**, spetta a noi inventare una didattica che tenga conto del loro modo orizzontale, senza demonizzarlo, ma costruendo una sintesi. Questo è ciò che spetta a noi fare, perché è nostra la memoria del vecchio sapere e perché siamo in questo **“generazione ponte”** in grado di passare il testimone alle nuove generazioni.



In un mondo sempre più complesso, a volte le vecchie domande hanno bisogno di nuove risposte!

Una possibilità di intervento

- Da parte dello studente: assumersi la responsabilità del proprio apprendimento
- Da parte dell’insegnante: analizzare, interpretare, non dare per scontato…, cambiare punto di vista ecc.

Non ho potuto fare i compiti perché il mio computer ha un virus, che ha trasmesso a tutte le mie matite e penne.

Una possibilità di intervento Rosetta Zan

SCHEDA – FACCIAMO IL PUNTO

Nome e cognome ____

Se con x e y indichiamo un generico numero naturale:

a. Perché $x^2 + y^2 \neq (x + y)^2$?
b. Perché $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x + y}$?

Secondo te esiste una relazione tra i due quesiti ?

1. Come ti sembra di aver fatto?

☐non lo so ☐molto male ☐così così ☐abbastanza bene ☐bene

Su che cosa basi questa valutazione?

____

2. Nella tabella che segue i numeri della prima colonna indicano il numero progressivo delle domande che erano nel compito. Per ogni domanda rifletti se secondo te l'hai risolta correttamente, oppure pensi di aver fatto errori, oppure sapevi come farla ma non sei riuscito a completarla, oppure non hai proprio risposto e metti quindi una crocetta nella colonna corrispondente.
Inoltre, per l'ultima colonna scrivi, per ogni domanda cui non hai risposto o in cui pensi di aver fatto errori, quali sono le tue difficoltà o dubbi.

	Ho risolto l'esercizio per intero e correttamente	Penso di aver fatto degli errori	Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte	Non ho risposto	Le mie difficoltà e dubbi riguardano:
1					
2					
3					

Consegna la scheda compilata insieme al compito. Quando il tuo insegnante ti restituisce la scheda Corretta, completa la scheda rispondendo alla seguente domanda:

3. A questo punto dovresti essere in grado di valutare quali sono le tue (eventuali) carenze. Scrivile qui di seguito:

____