INFORMATICA PER LA COMUNICAZIONE

Reti e grafi

Propagazione su una rete

- Le reti sono strumenti per la propagazione di
  - Virus, epidemie
  - Mode, tendenze, innovazioni
- Quali fattori di una rete influenzano sulla propagazione?

Propagazione: invarianza di scala

- L'affermazione di un prodotto procede:
  - Come prima cosa sono adottati da esperti (**innovatori**)
  - Si propagano (se riescono) dagli innovatori agli **hub**
  - Da questi utenti, poi al resto della rete

Modello a soglia

- Il **modello a soglia** si basa sulla definizione di un valore (**soglia**) individuale
- Soglia: probabilità di **accettare un'innovazione**
- **Tasso di diffusione**: probabilità di propagazione sulla rete
- **Soglia critica**: valore che determina la propagazione

Propagazione e modelli di rete

Rete piccolo mondo

- **Soglia critica**
  - Al di sotto propagazione non si espande
  - Al di sopra si espande senza controllo

Rete a invarianza di scala

- Non esiste soglia critica
- Propagazione **legata al raggiungimento degli hub**

Social Network Analysis

Reti Sociali e grafi

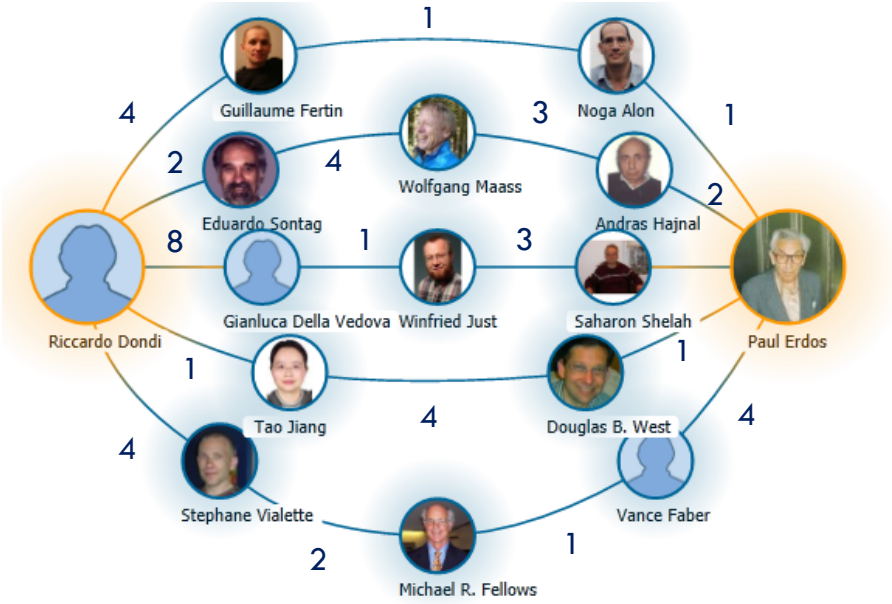
Reti sociali

Analisi delle rete sociali

- Studio delle **relazioni sociali** tra individui, gruppi
  - Caratteristiche delle relazioni
  - Flusso di informazioni
  - Ruolo degli individui
- **Prospettiva** di rete, non individuale

Reti sociali

- Reti sociali → modellate come **grafi**
  - **Nodi** → individui
  - **Archi** → relazioni
  - **Pesi** → valore della relazione



Reti sociali

Indici che permettono di individuare le caratteristiche delle reti sociali

- **Importanza di un nodo** all'interno di una rete
- **Caratteristiche strutturali** della rete
- **Indici di flusso:** caratteristiche del fluire dell'informazione attraverso la rete

Reti sociali – Indici centralità

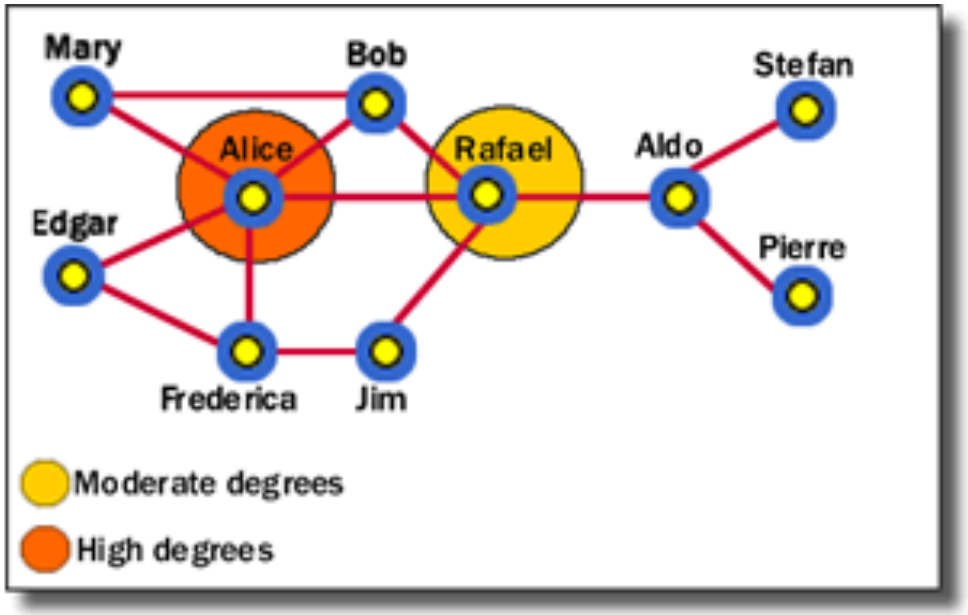
- **Indici di centralità: importanza di un nodo** in una rete
- Dipende dal contesto di analisi
- Possibili indici:
  - ***Degree centrality***
  - ***Closeness centrality***
  - ***Betweenness centrality***
  - ***Eigenvector centrality***

Reti sociali – *Degree centrality*

- ***Degree centrality***: capacità di connessione con i vicini
- **Valore per uno specifico nodo** → **grado** del nodo
- Esempio:
  - Grafo delle collaborazioni fra studiosi
  - Grado → capacità relazionale

Reti sociali – *Degree centrality*

Esempio

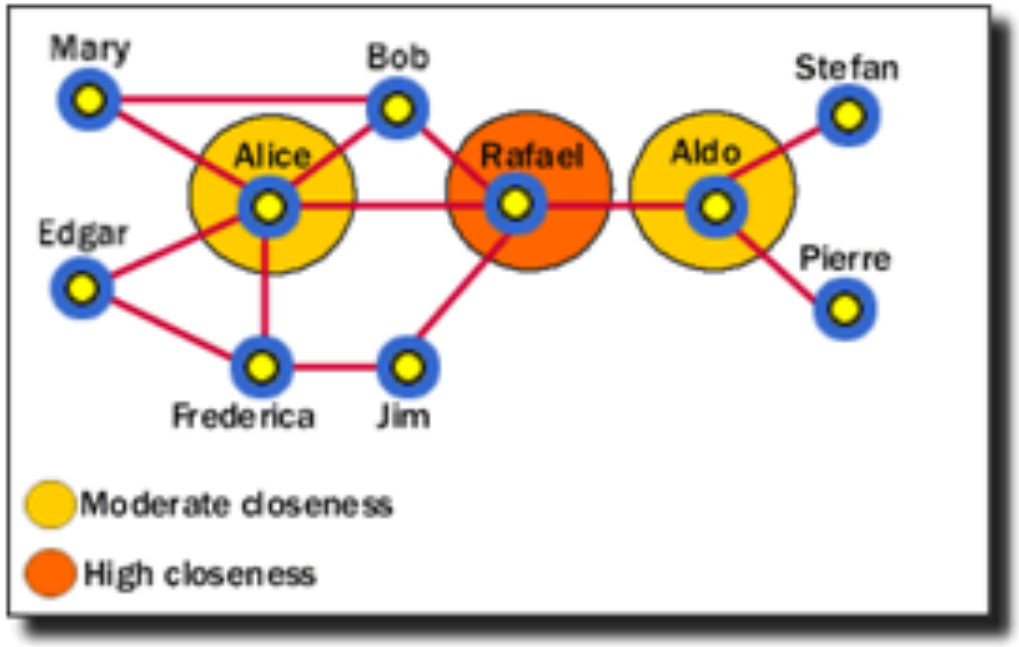


Reti sociali – *Closeness*

- ***Closeness***: somma della **distanza** di un nodo rispetto a tutti gli altri nodi
- **Nodi centrali** → indice di valore **minore**
- Applicazioni:
  - Raggiungibilità dai nodi della rete

Reti sociali – *Closeness*

Esempio

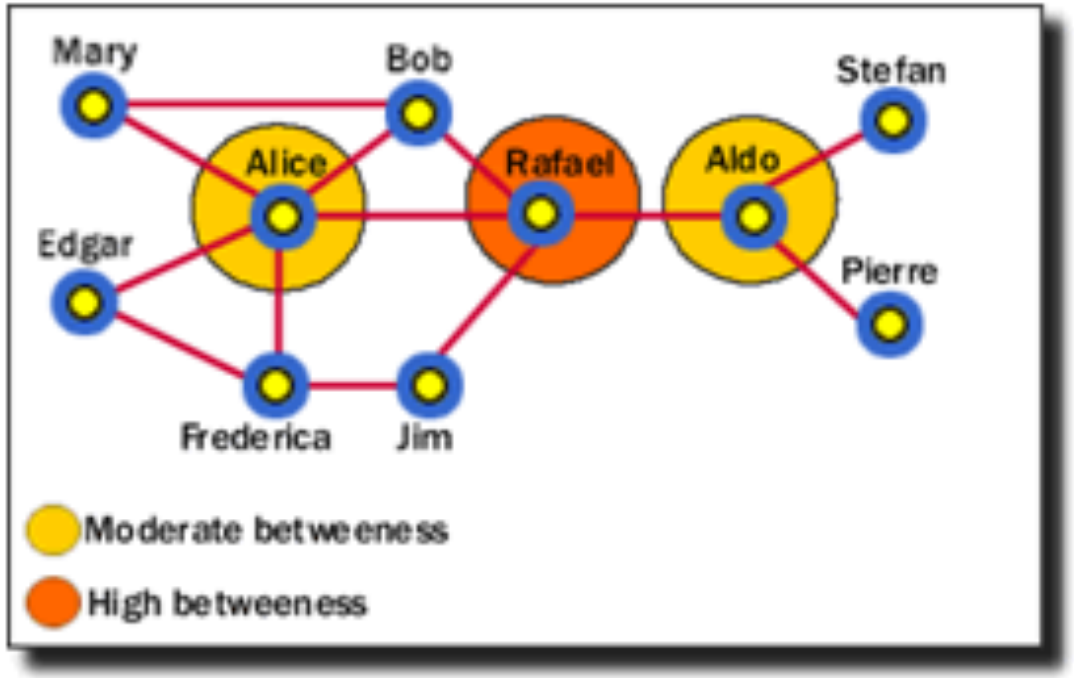


Reti sociali – *Betweenness*

- ***Betweenness*** di un nodo *v*: numero dei **cammini minimi** passanti per *v*
- Importanza nel
  - **Controllo** del flusso della rete
  - **Influenza** sulla rete

Reti sociali – *Betweenness*

Esempio

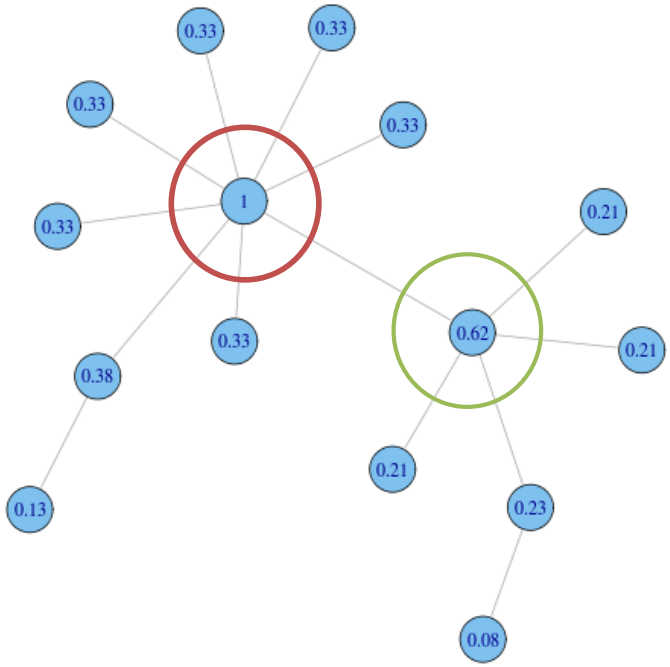


Reti sociali – *Eigenvector centrality*

- Importanza delle **connessioni di un nodo**: connessione con **elementi/individui influenti**
- **Centralità** di un nodo → **proporzionale a quella dei vicini**
- Esempio: **Pagerank**

Reti sociali – *Eigenvector centrality*

Esempio



Reti sociali – Caratteristiche

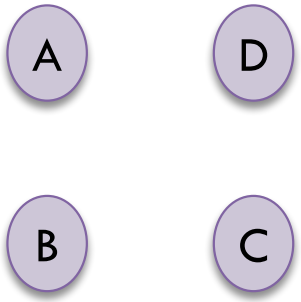
Caratteristiche strutturali dell'intera rete

- **Densità**
- **Inclusività**

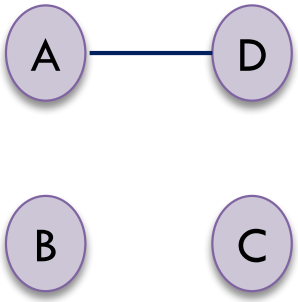
Reti sociali – Densità

- **Densità**: indica la **correlazione** tra gli elementi della rete
- Misura l'**integrazione sociale**
- **Densità**: numero archi del grafo/numero possibili archi

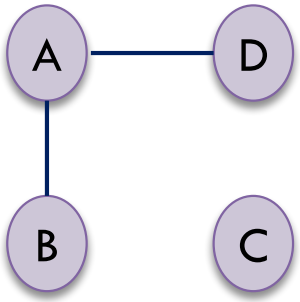
Reti sociali – Densità



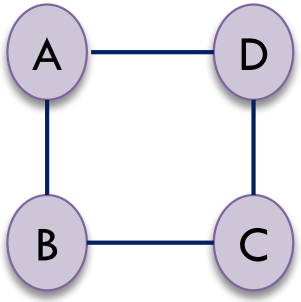
Densità: 0/6



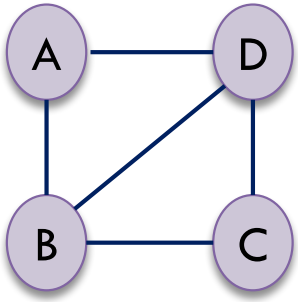
Densità: 1/6



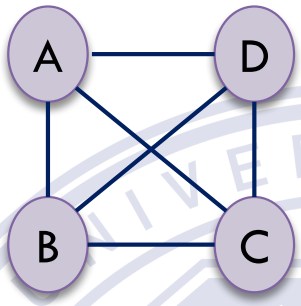
Densità: 2/6



Densità: 4/6



Densità: 5/6

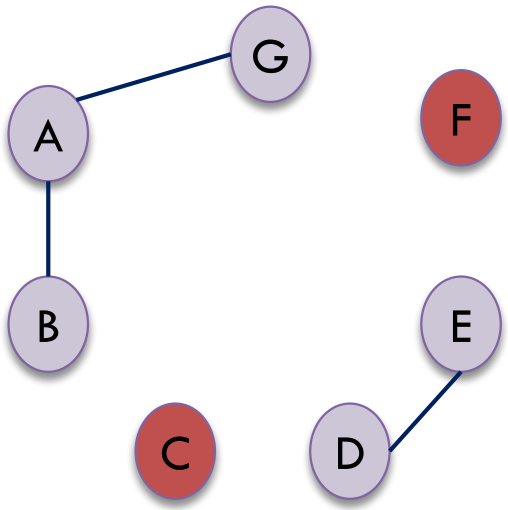


Densità: 6/6

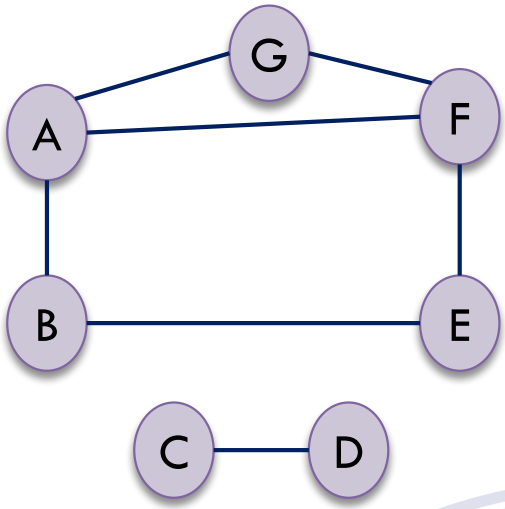
Reti sociali – Inclusività

- **Inclusività**: elementi/individui **coinvolti** nella relazione rappresentata dal grafo
- **Inclusività**: rapporto tra
  - **Numero totale di nodi non isolati in un grafo**
  - **Numero totale dei nodi**

Reti sociali – Inclusività



Inclusività: (7-2)/7



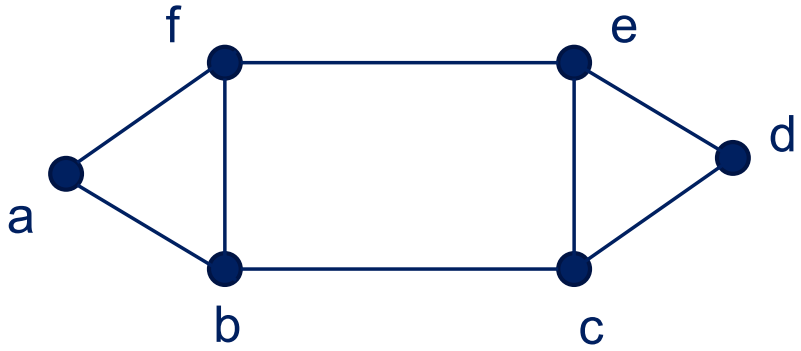
Inclusività : 7/7

Problemi su grafi

Reti e grafi

Proprietà dei grafi

Grado totale di un grafo: somma dei gradi dei **singoli nodi**



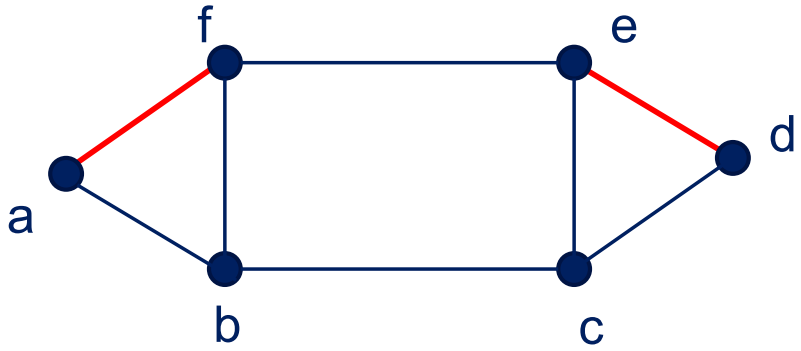
Grado totale: 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 3 = 16

Proprietà dei grafi

***Proprietà (Lemma delle strette di mano)**: il grado totale di un grafo è sempre un numero pari.*

1. Il grado totale di un grafo è la somma dei gradi dei **singoli nodi**
2. Ogni arco contribuisce al grado di **due nodi**

Proprietà dei grafi



Arco (a,f): contribuisce al grado del nodo *a* e del nodo *f*

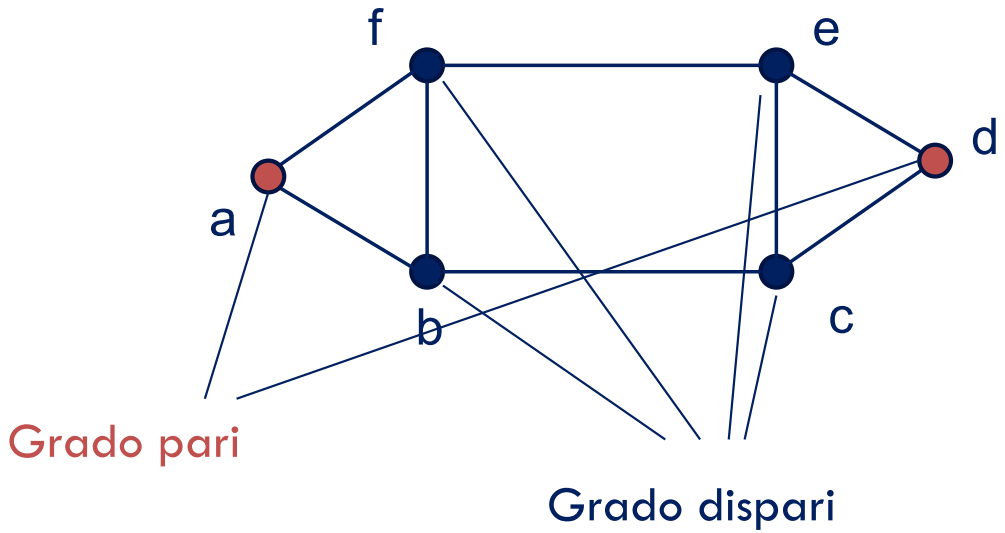
Arco (d,e): contribuisce al grado del nodo *d* e del nodo e

Proprietà dei grafi

***Proprietà**: il numero di nodi aventi grado dispari è sempre pari.*

1. Il grado totale del grafo è pari (Lemma delle strette di mano)
2. Il **grado totale dei nodi pari è pari**
3. Il **grado totale dei nodi dispari è pari**
4. I nodi di grado dispari devono essere **pari**

Proprietà dei grafi



Proprietà dei grafi

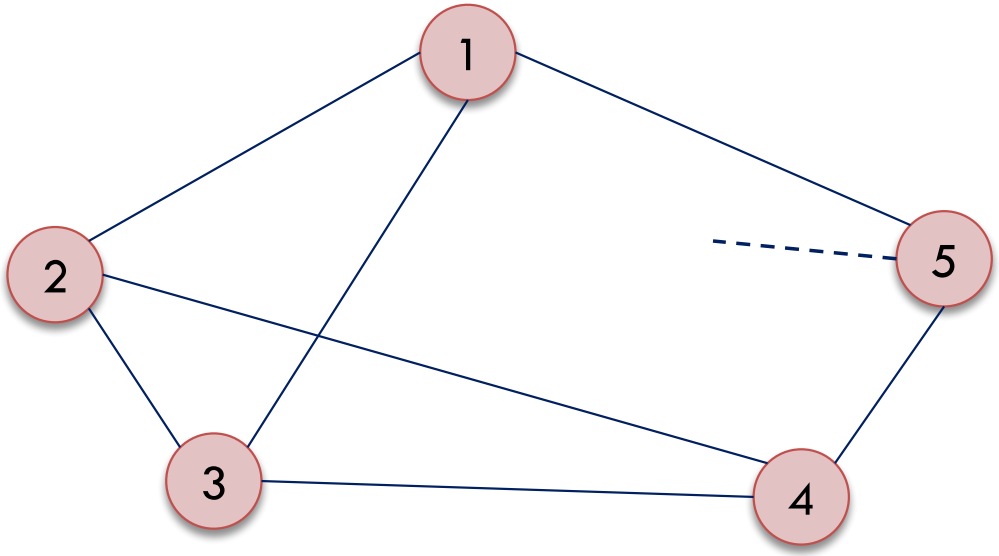
***Proprietà**: il numero di nodi aventi grado dispari è sempre pari.*

Conseguenze: impossibilità che si verifichino certe situazioni

Esempio

A. Non è possibile costruire un grafo con un numero dispari di nodi che rappresenta una relazione in cui ogni persona conosce esattamente 3 persone

Proprietà dei grafi



Non è possibile costruire un grafo che rappresenta relazioni in cui ogni persona conosce esattamente 3 persone

Proprietà dei grafi

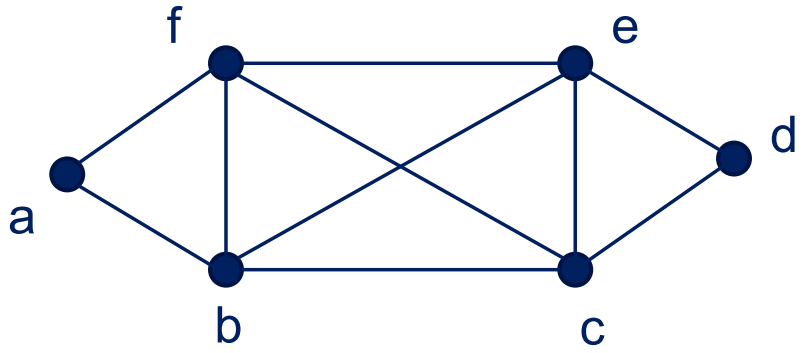
***Proprietà**: il numero di nodi aventi grado dispari è sempre pari.*

Conseguenze:

B. Campionato football
   I. Squadre divise in due gruppi di 13 squadre
   II. Richiesta: *ogni squadra giochi con esattamente 11 squadre del proprio gruppo*

Proprietà dei cicli

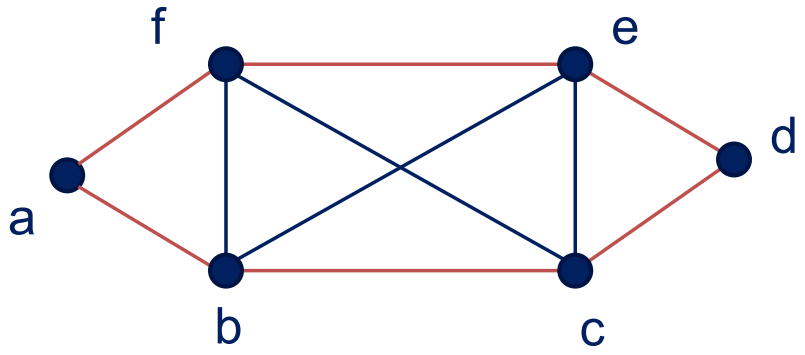
- *Un circuito è detto **euleriano** se tocca tutti gli **archi** del grafo una e una sola volta.*
  - Nota bene: un nodo può essere attraversato più volte



Circuito euleriano:
(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,c), (c,f), (f,e), (e,b), (b,f), (f,a)

Proprietà dei cicli

- *Un ciclo è detto **hamiltoniano** se tocca tutti i **nodi** del grafo una e una sola volta.*
- Un arco può essere attraversato più volte?



Ciclo hamiltoniano:
(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,f), (f,a)

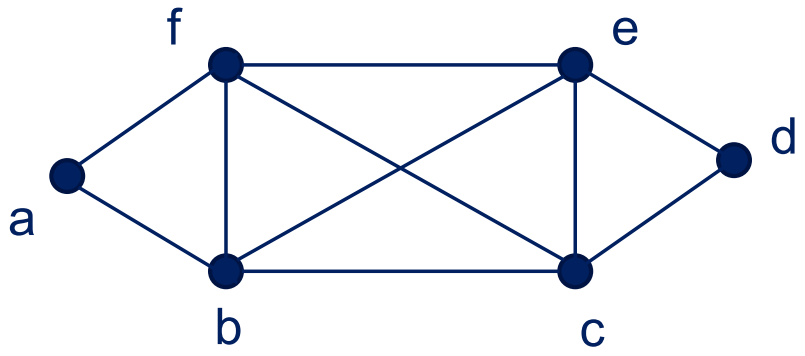
Proprietà dei cicli

Quando un grafo ammette un **percorso/circuito euleriano**?

- Alcune proprietà
  1. Esiste un **circuito euleriano** *se e solo se* tutti i nodi hanno **grado pari**
  2. Esiste un **percorso euleriano** *se e solo se* tutti i nodi eccetto due hanno **grado pari**

Proprietà dei cicli

1. Esiste un **circuito euleriano** se e solo se tutti i nodi hanno grado pari



Circuito euleriano:
(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,c), (c,f), (f,e), (e,b), (b,f), (f,a)

Proprietà dei cicli

Algoritmo per circuito euleriano (algoritmo di *Fleury*)

Ad ogni passo

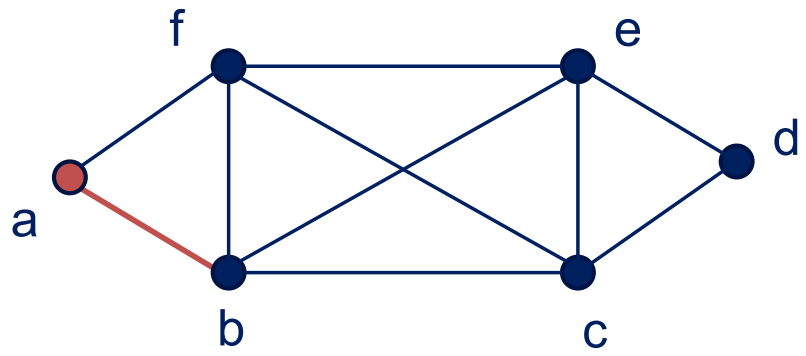
1. Seleziono un **arco consecutivo**
2. **Elimino l'arco selezionato**
3. Seleziono un arco che **separa in due parti** (*ponte*) un grafo solo se **non ho altra possibilità**

Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),

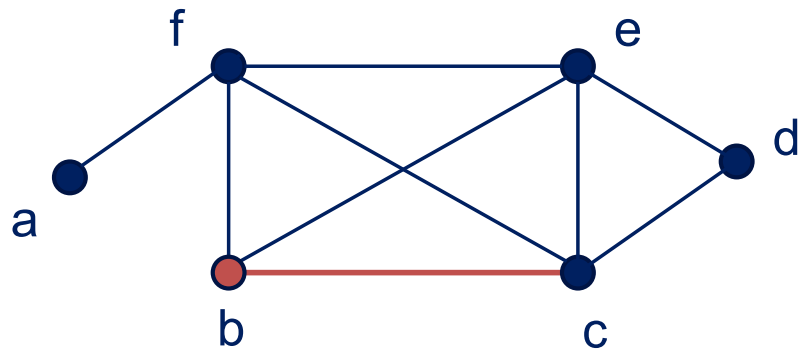


Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)

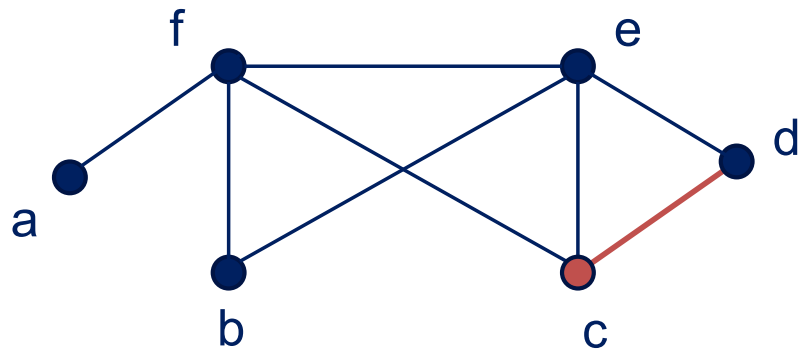


Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)

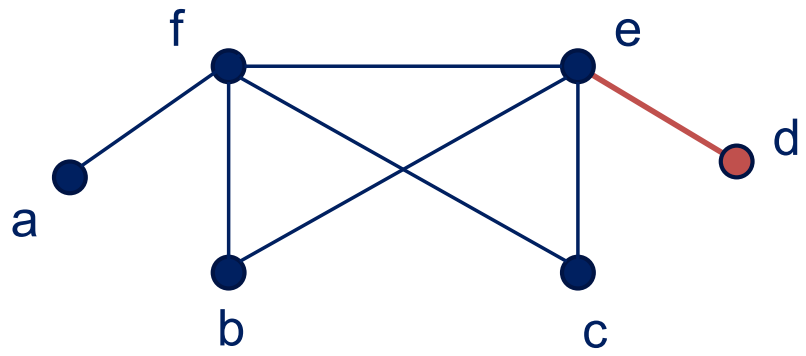


Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)
4. (d,e)

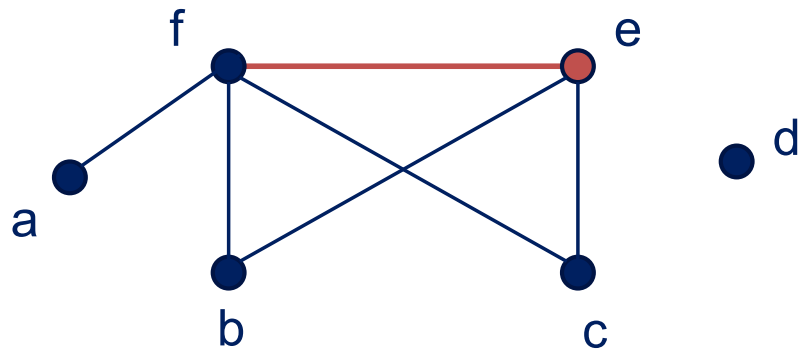


Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)
4. (d,e)
5. (e,f)



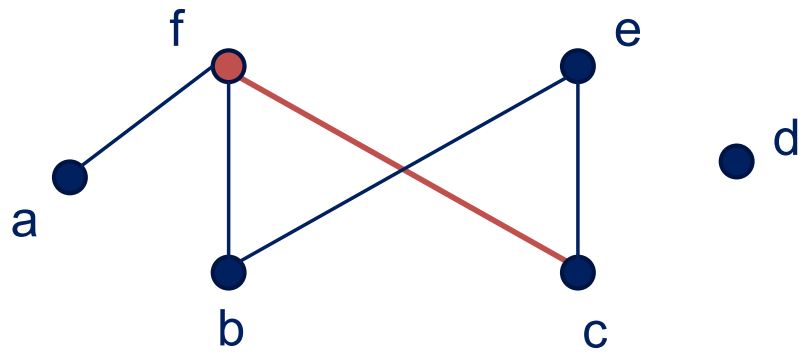
Proprietà dei cicli

Algoritmo

Non selezione (a,f): ponte che disconnetterebbe il grafo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)
4. (d,e)
5. (e,f)
6. **(f,c)**

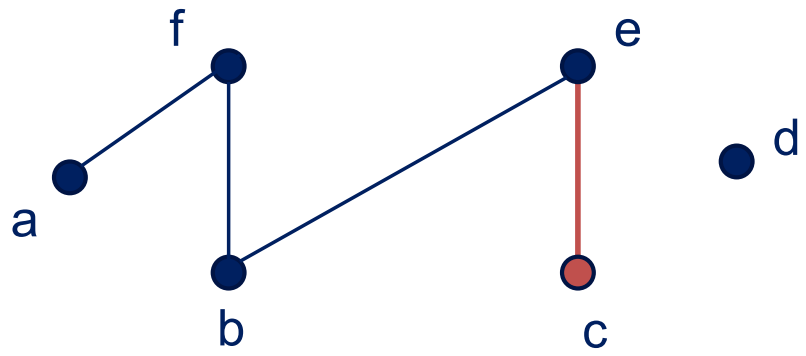


Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)
4. (d,e)
5. (e,f)
6. (f,c)
7. (c,e)

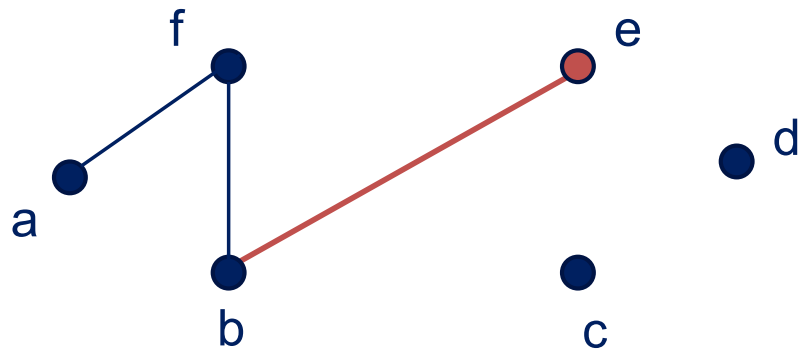


Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)
4. (d,e)
5. (e,f)
6. (f,c)
7. (c,e)
8. (e,b)

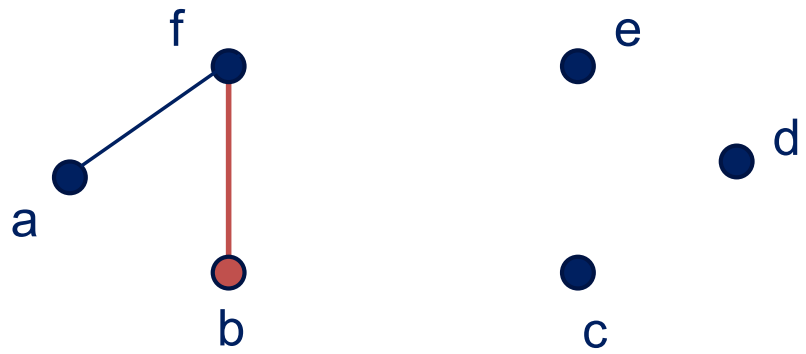


Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)
4. (d,e)
5. (e,f)
6. (f,c)
7. (c,e)
8. (e,b)
9. (b,f)



Proprietà dei cicli

Algoritmo

Archi selezionati

1. (a,b),
2. (b,c)
3. (c,d)
4. (d,e)
5. (e,f)
6. (f,c)
7. (c,e)
8. (e,b)
9. (b,f)
10. (f,a)

Proprietà dei cicli

- La ricerca di un percorso/circuito **euleriano** dipende da **proprietà locali** della rete
- La ricerca di un cammino/ciclo **hamiltoniano** dipende da **proprietà globali** della rete
- Gli algoritmi esistenti per la ricerca di un cammino/ciclo **hamiltoniano non sono efficienti**

Ricerca di percorsi

La ricerca di cammini euleriani/hamiltoniani legati a problemi di pianificazione

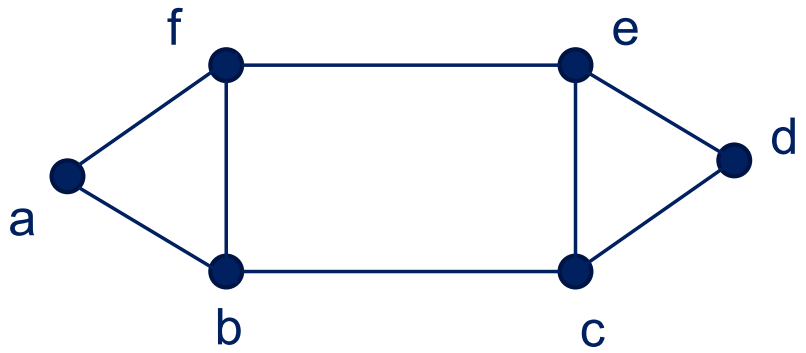
- **Problema del postino cinese**
- **Problema del commesso viaggiatore**

Problema del postino cinese

Problema del postino cinese: dato un grafo, trovare un percorso che

- **Percorre ogni arco**
- **Percorre il minor numero di archi**

Problema del postino cinese



Percorso del postino cinese:

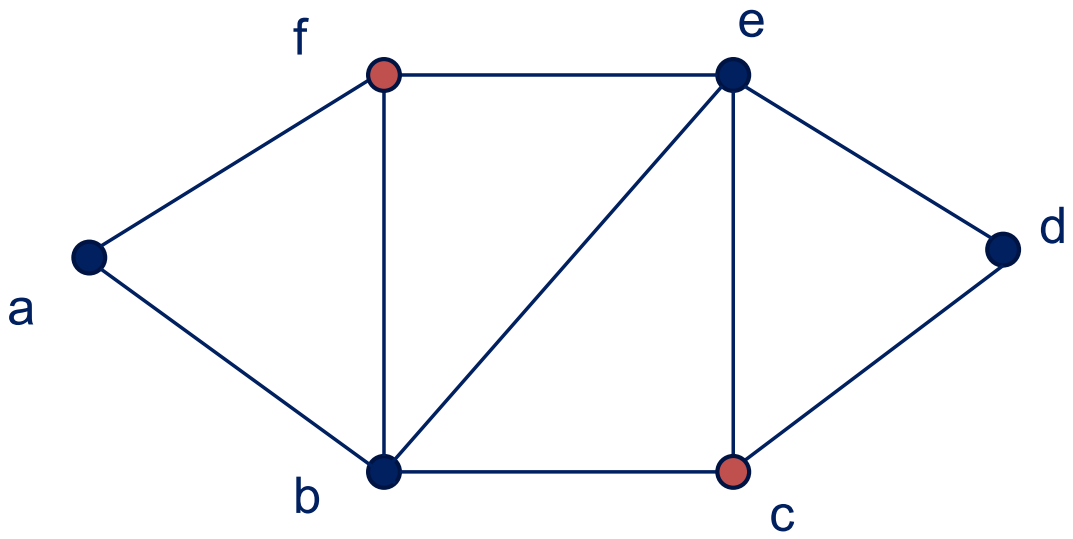
(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), **(e,c)**, **(c,e)**, (e,f), **(f,b)**, **(b,f)**, (f,a)

Problema del postino cinese

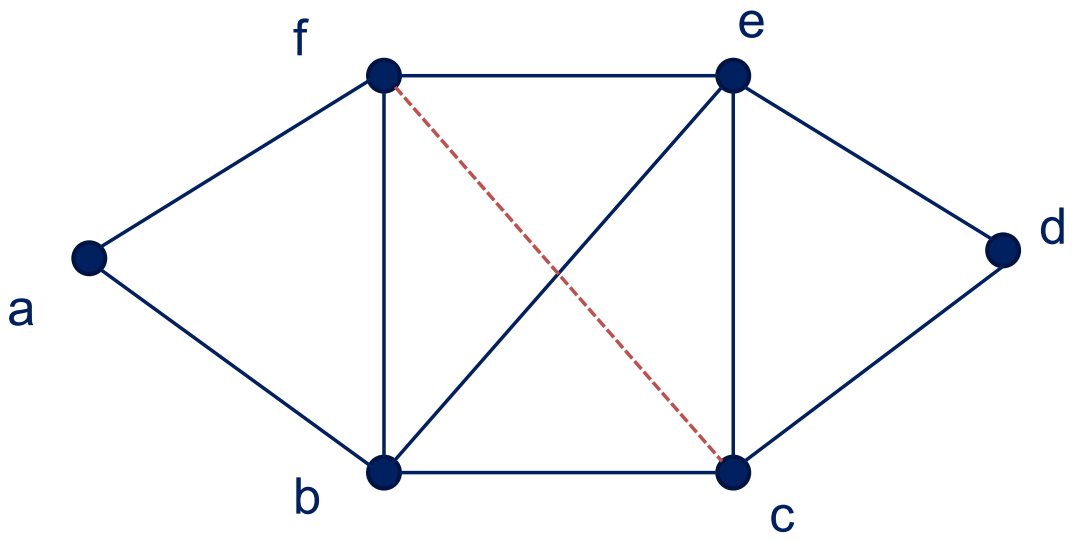
Algoritmo risolutivo

1. **Raggruppo a coppie** i nodi dispari
2. **Collego ogni coppia** di nodi dispari con un **arco finto**
3. Calcolo un **percorso euleriano** nel grafo risultante
4. Gli archi finti sono rimpiazzati con il **percorso più breve** tra i nodi

Problema del postino cinese



Problema del postino cinese



Ciclo euleriano:

(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,f), **(f,c)**, (c,e), (e,b), (b,f), (f,a)

Postino cinese:

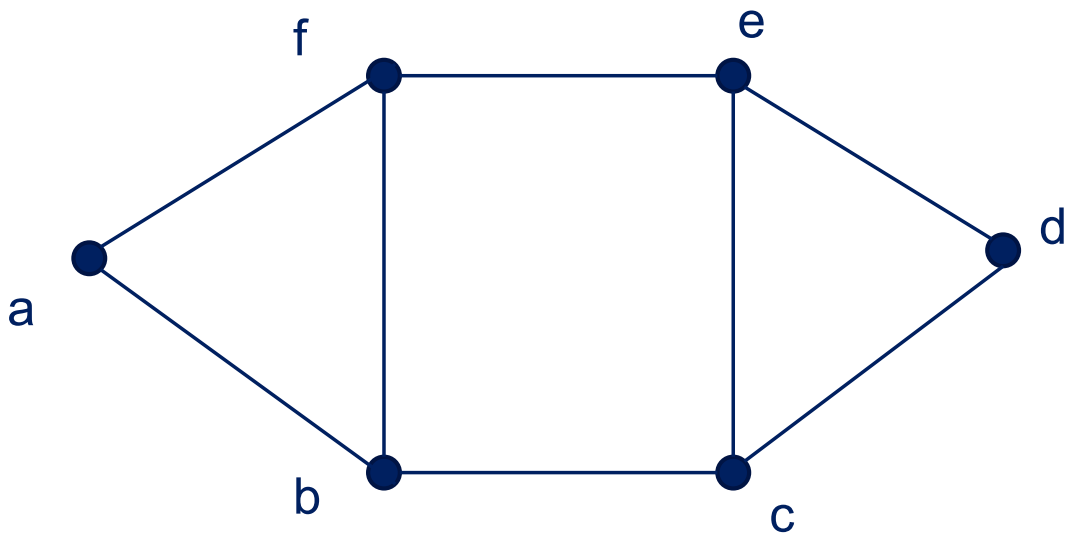
(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,f), **(f,b)**, **(b,c)**, (c,e), (e,b), (b,f), (f,a)

Problema del commesso viaggiatore

Problema del **commesso viaggiatore**: dato un grafo, trovare un circuito che

- **Raggiunge ogni nodo**
- **Ha minima lunghezza /peso**

Problema del commesso viaggiatore



Commesso viaggiatore:
(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,f), (f,a)

Postino cinese:
(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,c), (c,b), (b,f), (f,e), (e,f), (f,a)

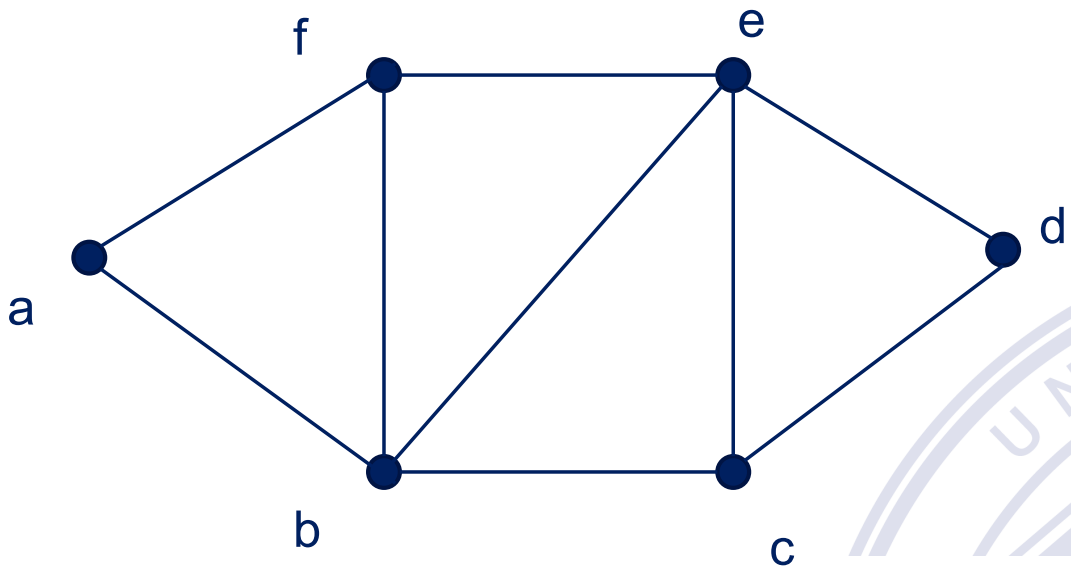
Problema del commesso viaggiatore

Applicazioni:

- **Pianificazione percorsi**
- **Schedulazione**
- **Studio DNA**

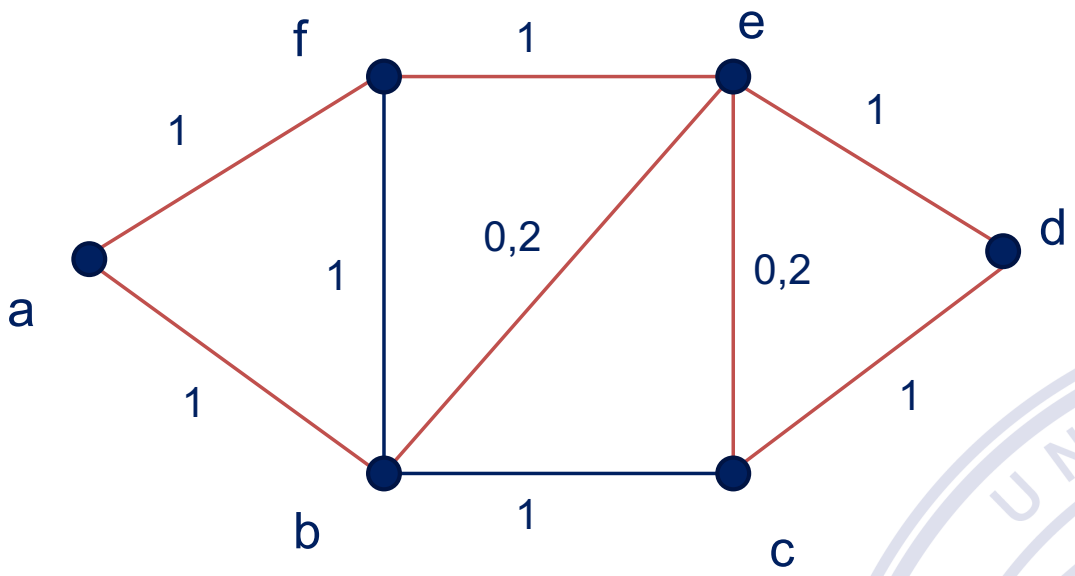
Problema del commesso viaggiatore

- Se esiste un **ciclo hamiltoniano** (nel caso non pesato) → soluzione **ottima** del problema del commesso viaggiatore



Problema del commesso viaggiatore

- Se esiste un ciclo hamiltoniano (nel caso **non pesato**) → soluzione ottima del problema del commesso viaggiatore



Soluzione ottima: costo 5,4 Ciclo hamiltoniano: 6

Problema del commesso viaggiatore

Difficoltà del problema del commesso viaggiatore

In genere:

- **Non sempre esiste** un ciclo hamiltoniano
- Per la risoluzione del problema
  - Soluzioni **non efficienti**
  - Soluzioni **non esatte**

Progettazione reti

Reti e grafi

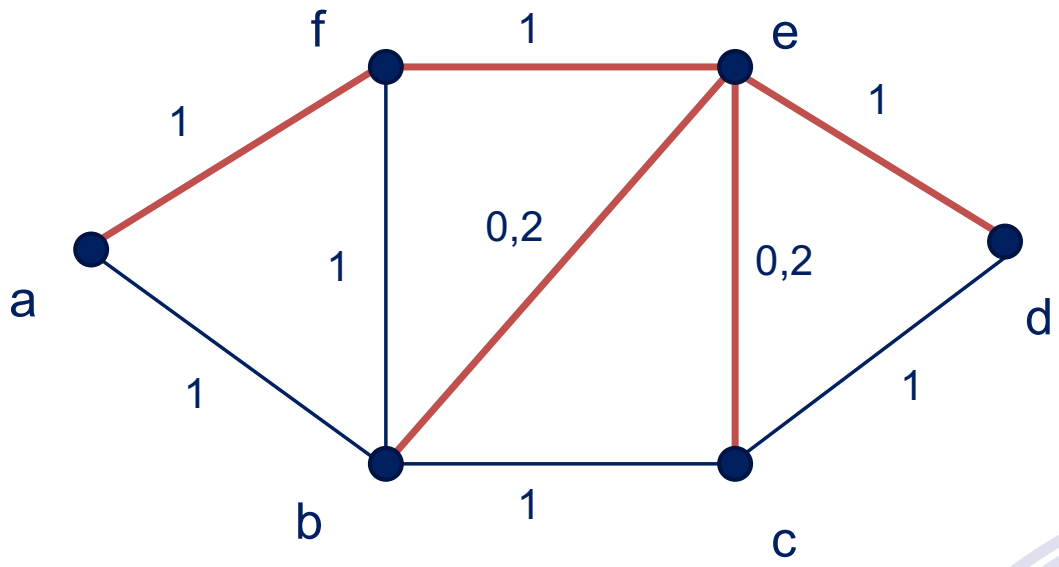
Progettazione di reti

- Nel caso debba essere **progettata una rete** (grafo)
  - **Nodi** → elementi **da collegare**
  - **Archi** → **linee di collegamento** tra elementi
  - **Peso** di un arco → proporzionale al **costo di costruzione** della linea
- In genere si vuole **minimizzare** il costo della rete

Progettazione di reti

- Minimizzare il costo della rete → costruzione di un **minimo albero ricoprente** (*minimum spanning tree*)
- Proprietà albero ricoprente: **albero** che
  1. Contiene **tutti i nodi** del grafo
  2. Ha **costo** minimo

Progettazione di reti



Costo albero ricoprente: 3,4

Albero ricoprente

Algoritmi risolutivi per il calcolo del minimo albero ricoprente → **efficienti**

- Algoritmo di **Kruskal**
- Algoritmo di **Prim**

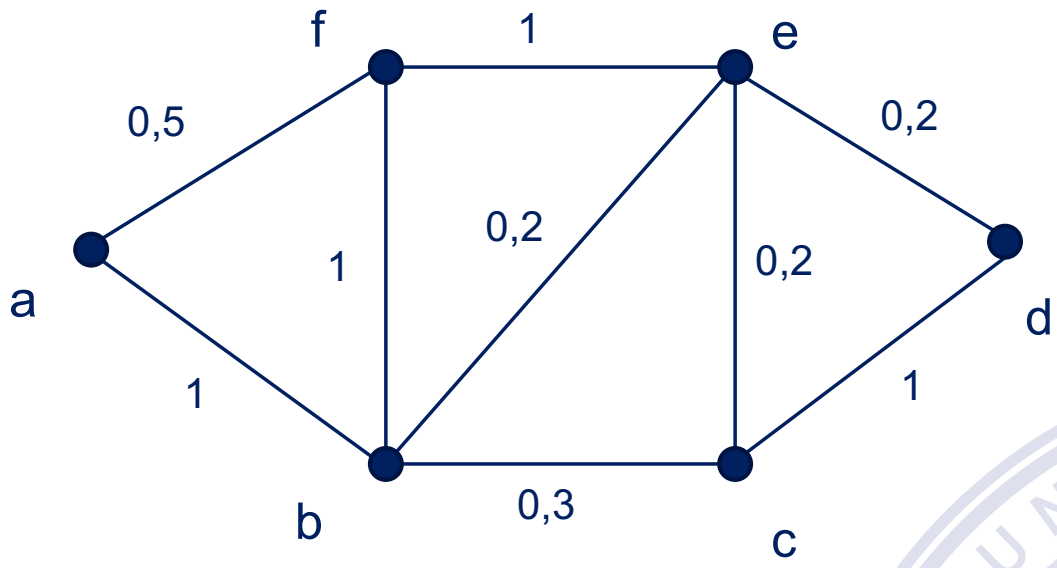
Albero ricoprente

Algoritmo di Kruskal

- Ciclicamente aggiungo archi alla soluzione
- Ad ogni passo ho un **insieme di alberi** (non necessariamente connessi)
- Ad ogni passo
  - Aggiungo l'**arco di peso minimo** che non forma un ciclo con gli archi già scelti

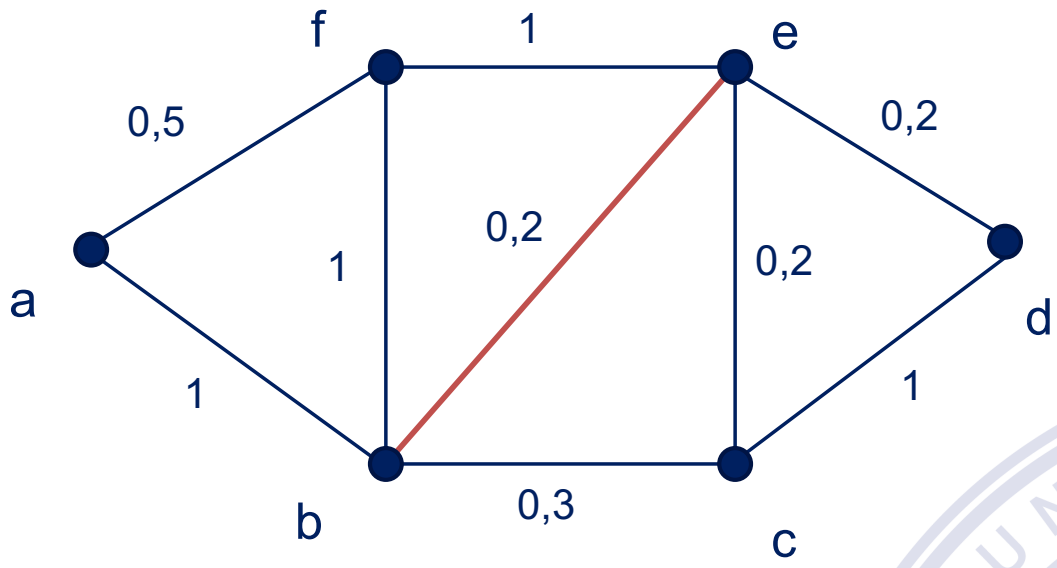
Albero ricoprente

Algoritmo di Kruskal



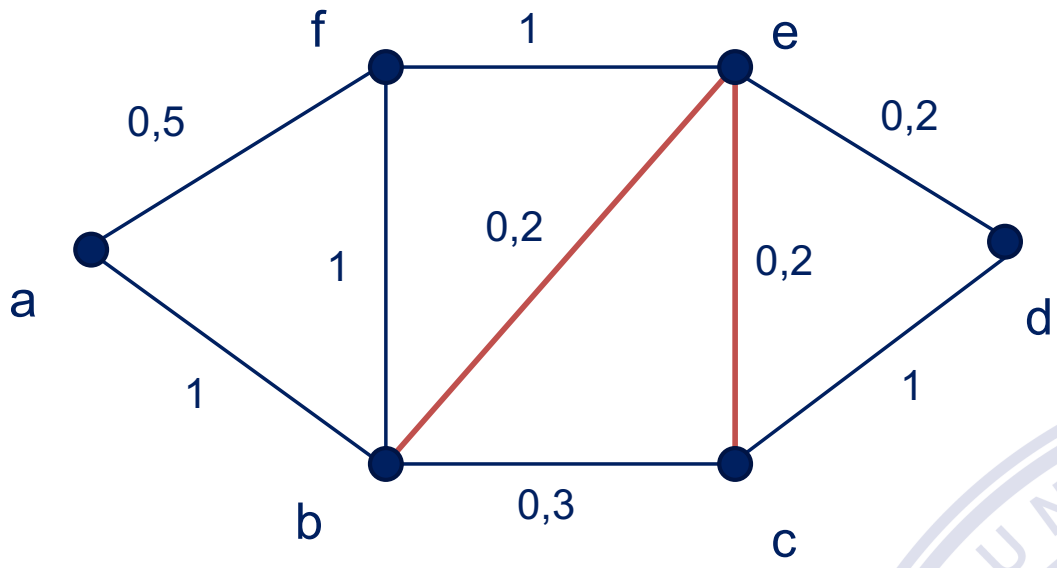
Albero ricoprente

Algoritmo di Kruskal



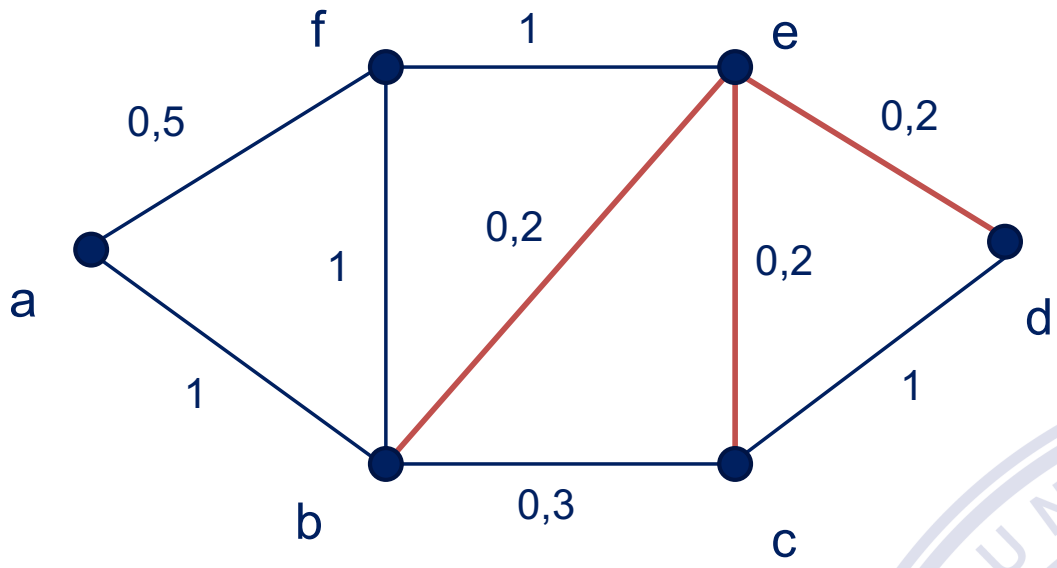
Albero ricoprente

Algoritmo di Kruskal



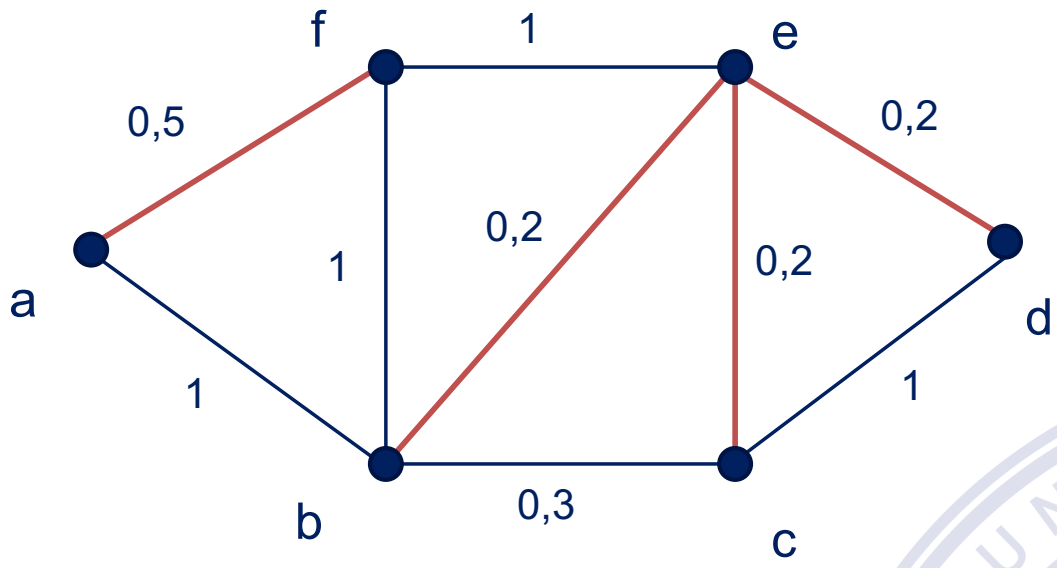
Albero ricoprente

Algoritmo di Kruskal



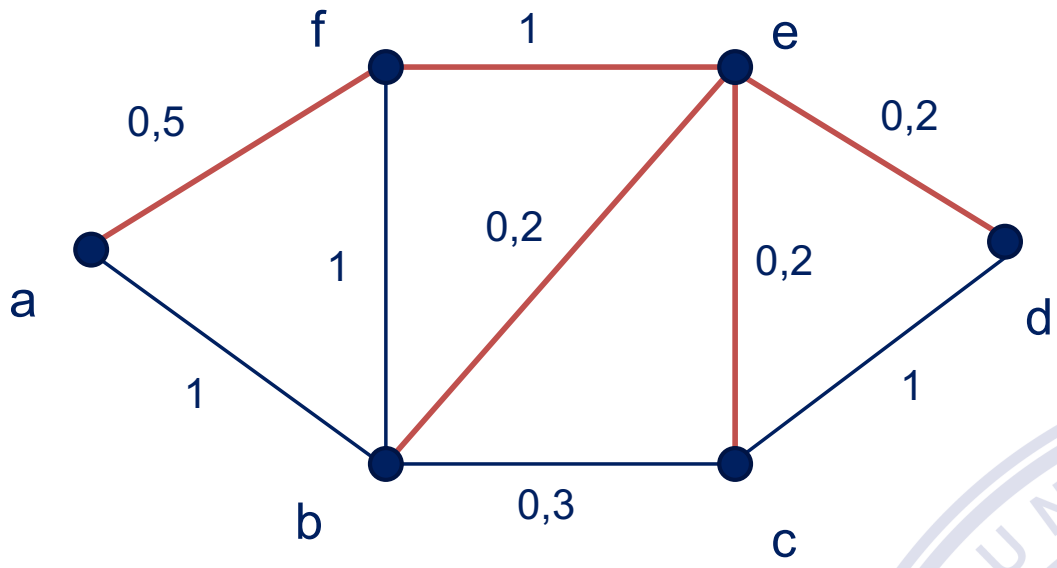
Albero ricoprente

Algoritmo di Kruskal



Albero ricoprente

Algoritmo di Kruskal



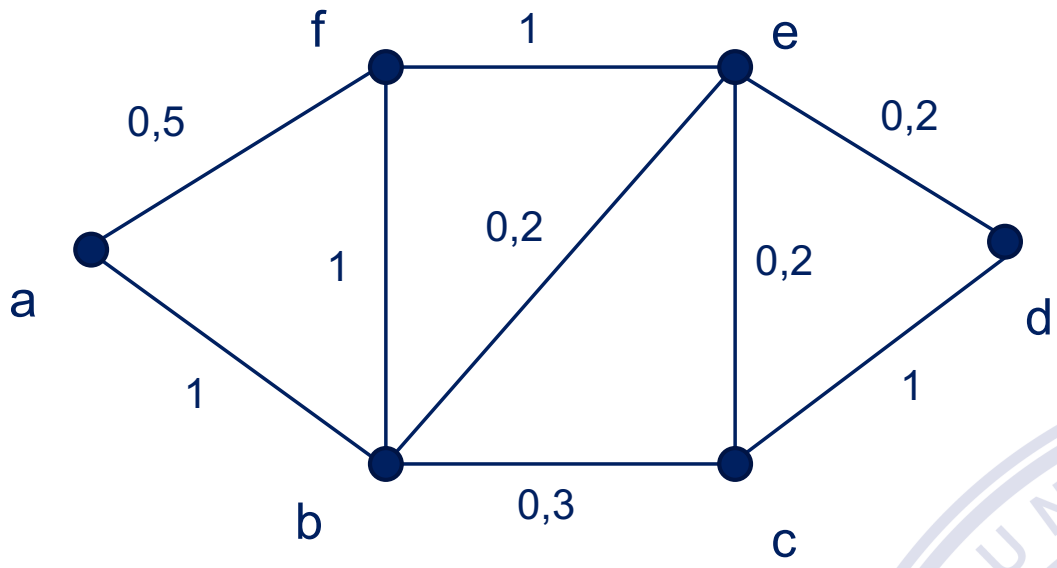
Albero ricoprente

Algoritmo di Prim

- Ciclicamente aggiungo archi
- Ad ogni passo ho un **albero**
- Ad ogni passo: aggiungo l'**arco di peso minimo**
  - **Collegato all'albero**
  - Che non forma un ciclo

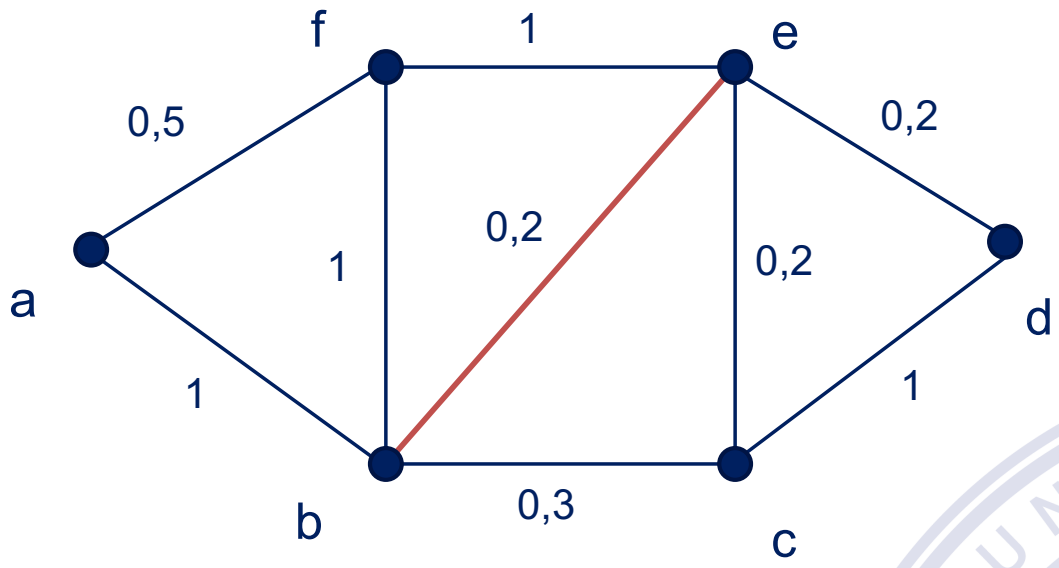
Albero ricoprente

Algoritmo di Prim



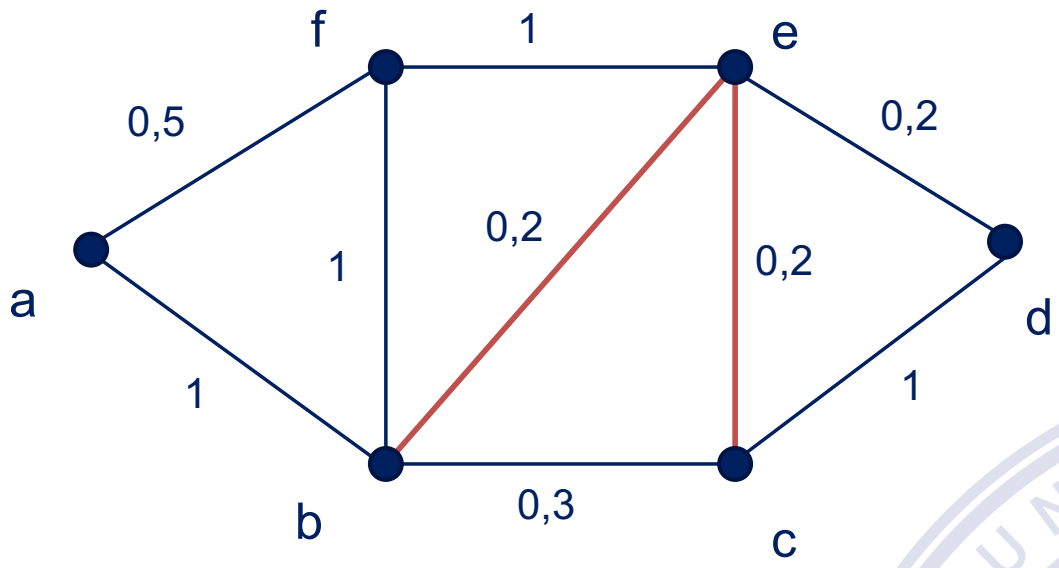
Albero ricoprente

Algoritmo di Prim



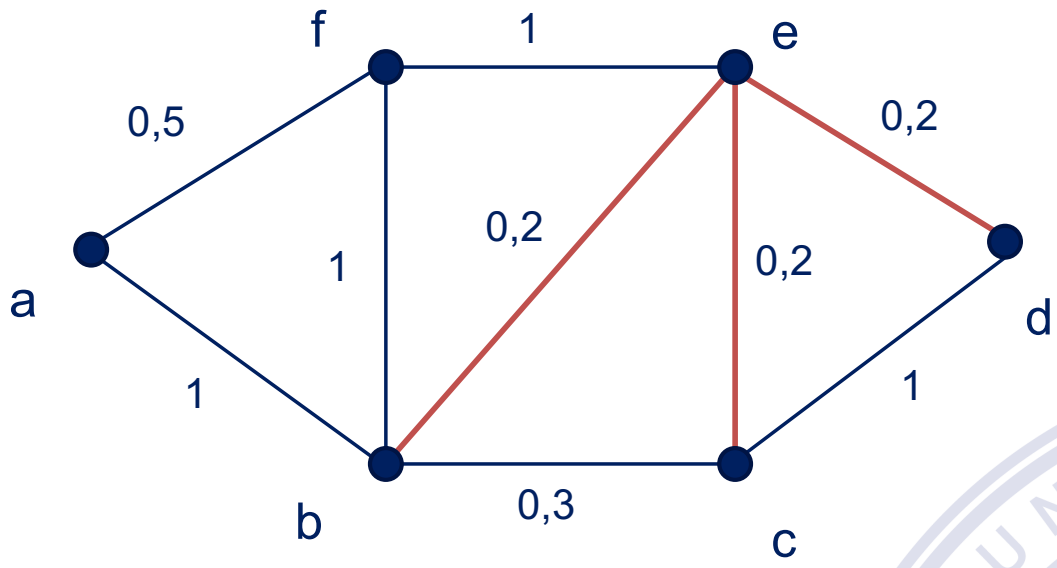
Albero ricoprente

Algoritmo di Prim



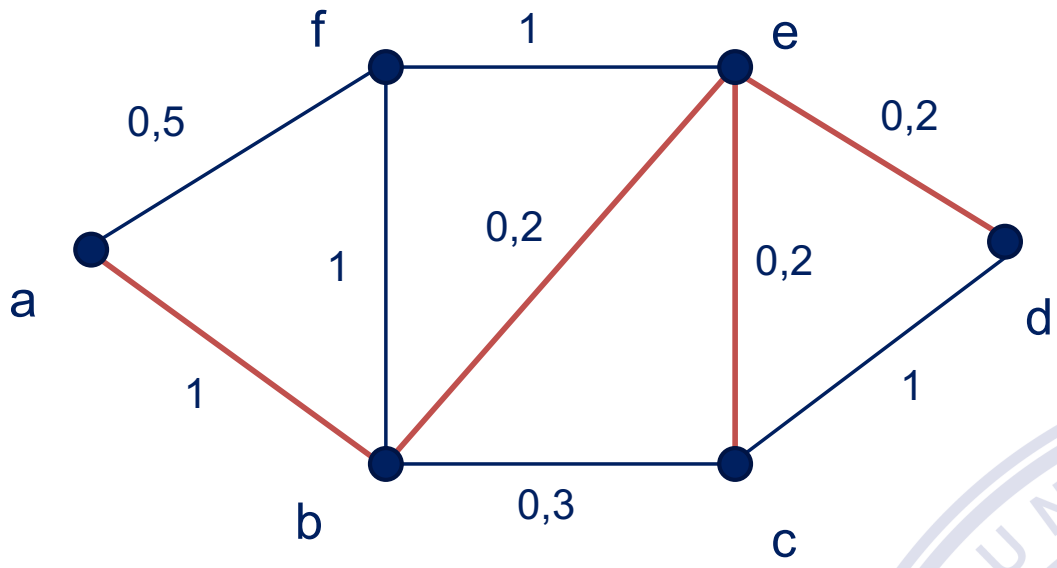
Albero ricoprente

Algoritmo di Prim



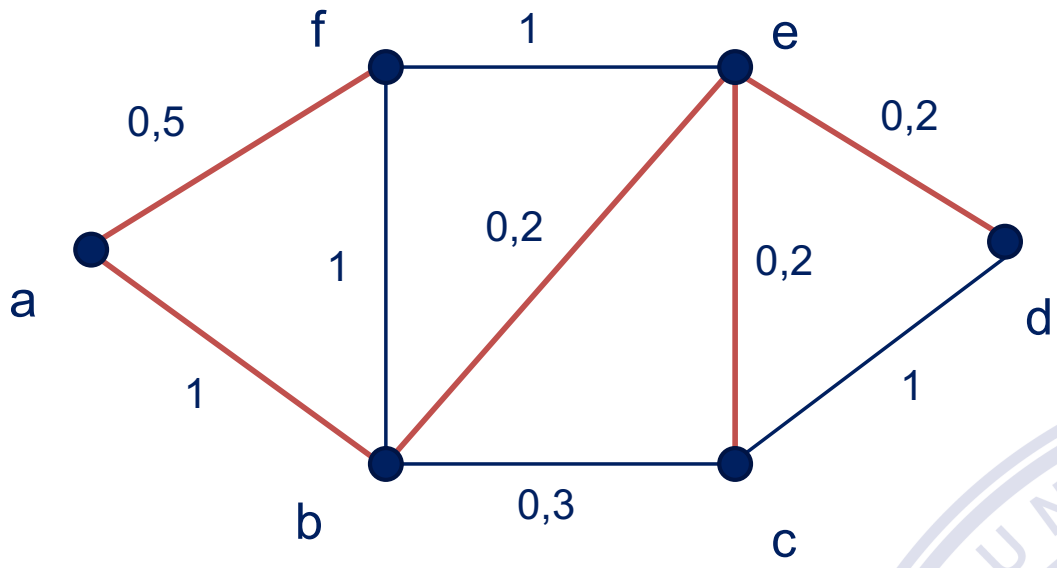
Albero ricoprente

Algoritmo di Prim



Albero ricoprente

Algoritmo di Prim

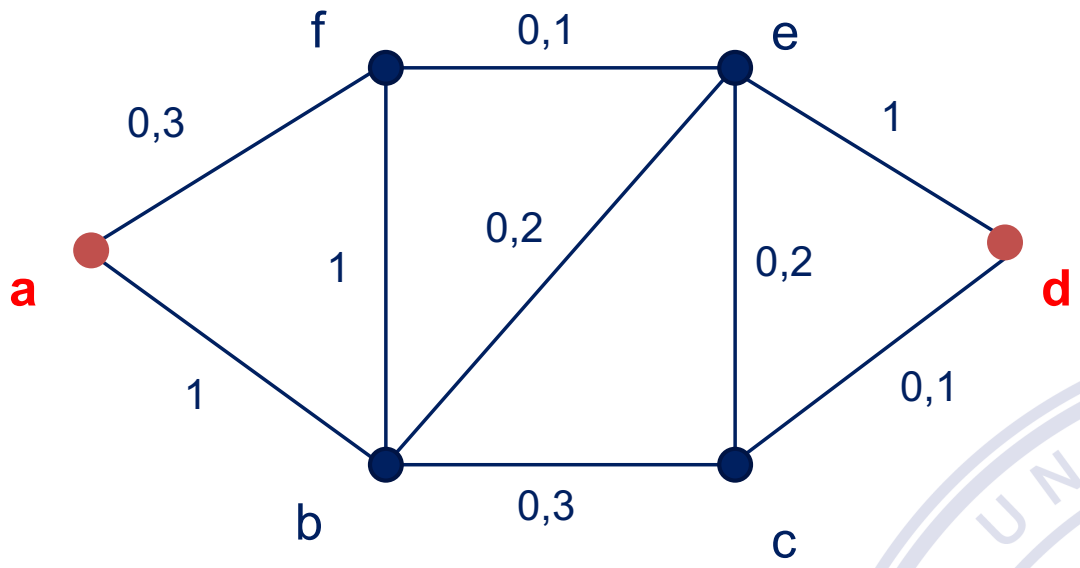


Cammino più breve

- Problema di interesse nella progettazione/studio di reti: **calcolo del cammino più breve** tra due nodi
- Esempi:
  - Calcolo del **diametro** di un grafo
  - Problema **postino cinese**

Cammino più breve

- **Problema**: dati due nodi, determinare il cammino di peso minimo che li collega



Cammino più breve

Algoritmo di Djikstra: percorso dal nodo *a* al nodo *d*

Idea generale

- Calcolo il cammino minimo per **nodi intermedi**

Cammino più breve

Idea generale

- Per calcolare il cammino minimo per i **nodi intermedi** utilizzo delle **etichette**
- Nodi hanno **due tipi di etichette** (ciclicamente aggiornate):
  - **Temporanea**: **minimo cammino** *fino a quel momento*
  - **Definitiva**: minimo cammino da *a*

Cammino più breve

Inizialmente

- Etichette temporanee

Successivamente

- Etichette aggiornate
- Nell'aggiornamento **un'etichetta temporanea può diventare definitiva** (mai il contrario)

Cammino più breve

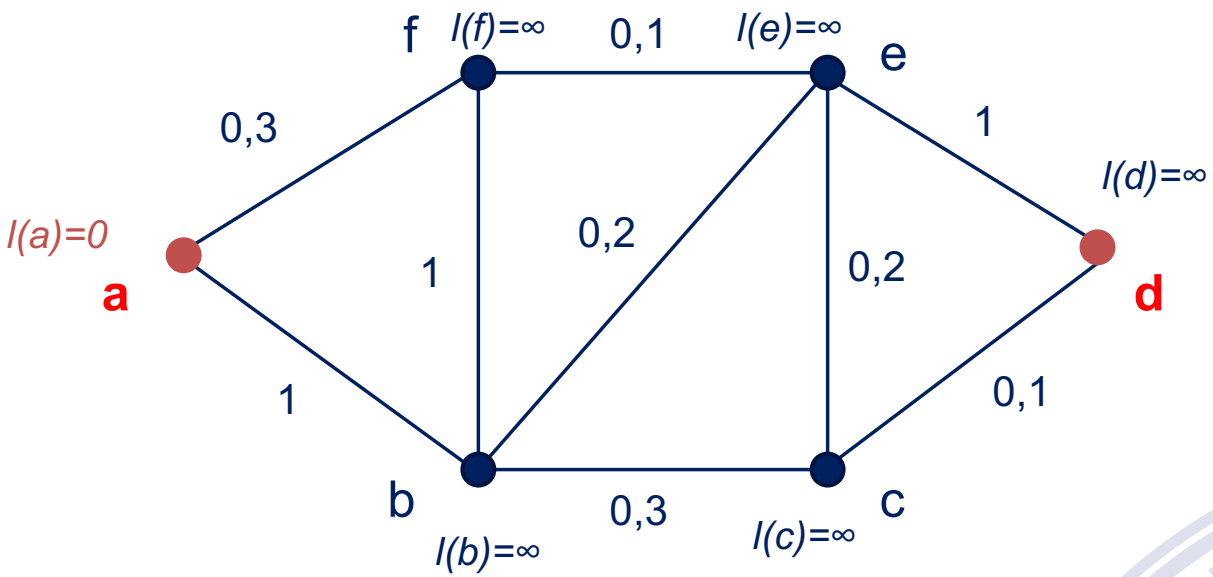
Algoritmo di Djikstra: percorso da *a* a *d*

1. **Etichetta** l temporanea ai nodi
2. Inizialmente $l(a)=0$; $l(c)=\infty$ per ogni altro nodo *c*
3. **Ad ogni passo**
   1. L'etichetta **temporanea** di **valore minimo** è sostituita con etichetta **definitiva** $e(c)$
   2. Le altre etichette temporanee sono aggiornate:

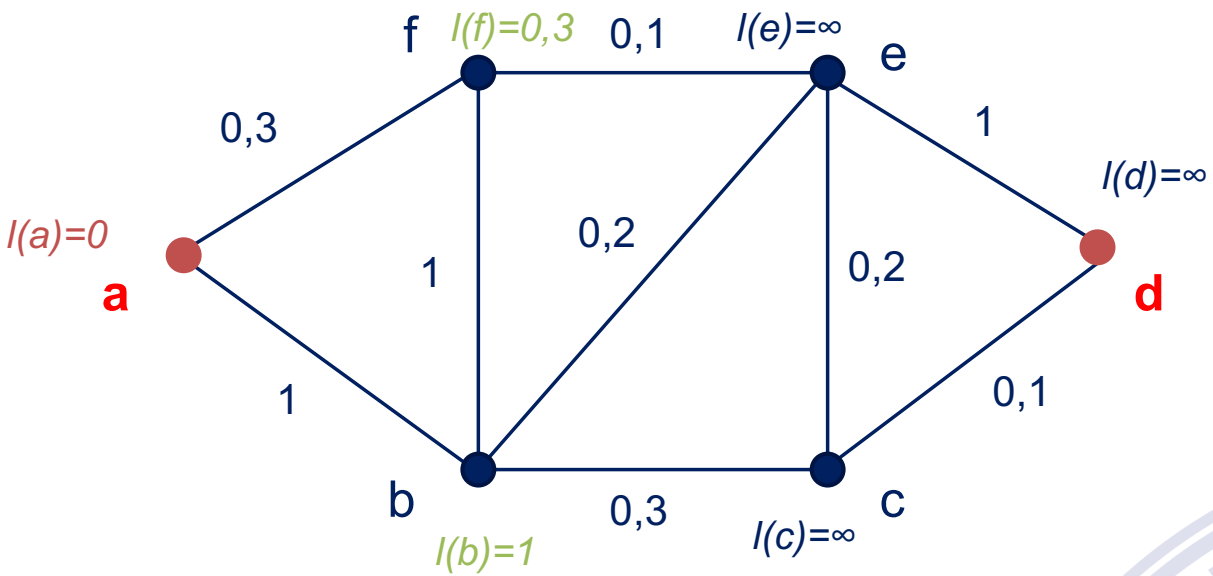
      Per il nodo *x*:

      Se $l(x) > e(c) + w(x, c)$, definisco $l(x) = e(c) + w(x, c)$

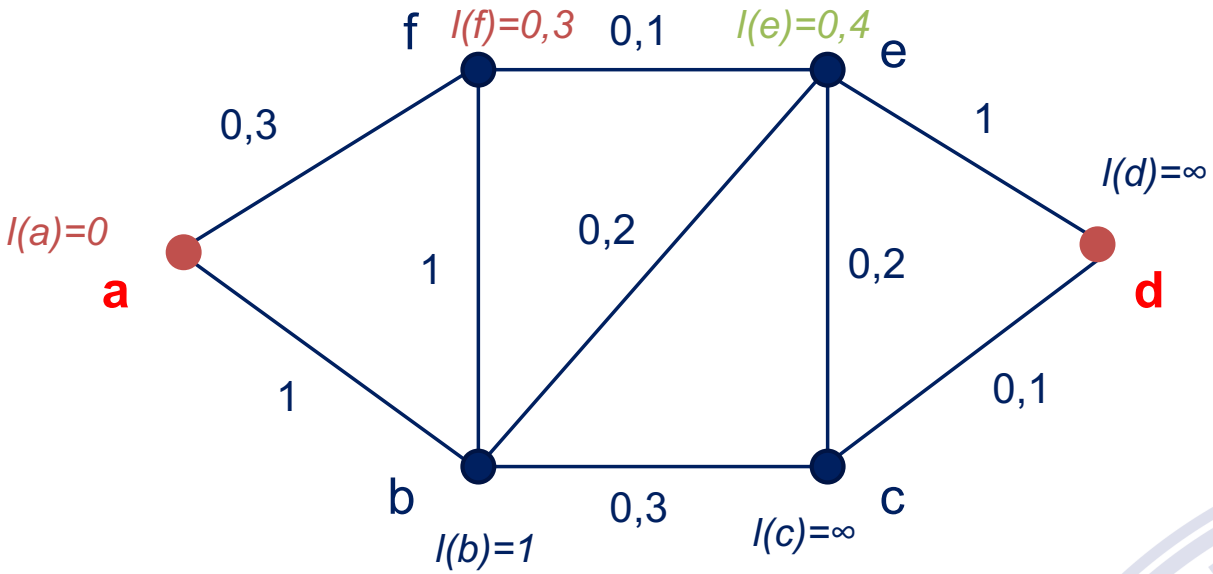
Cammino più breve



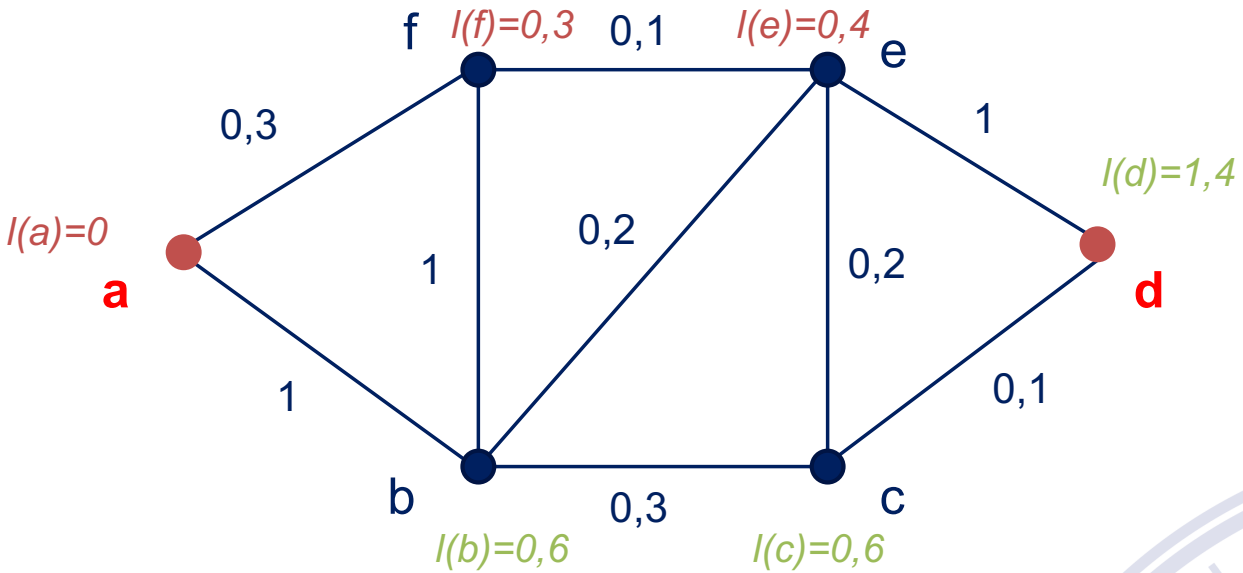
Cammino più breve



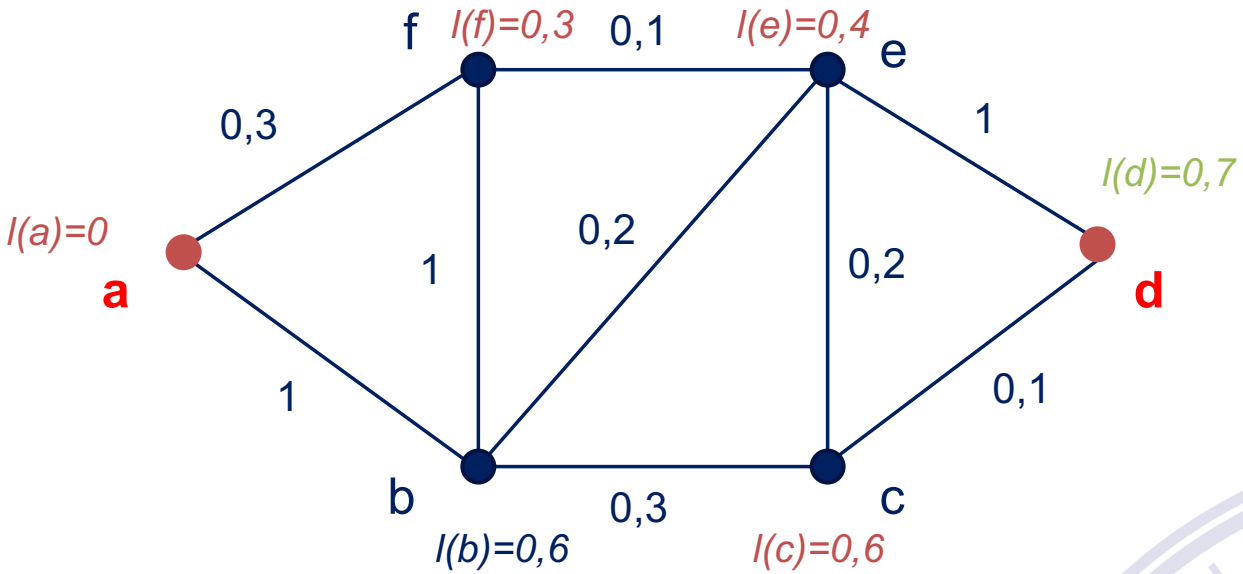
Cammino più breve



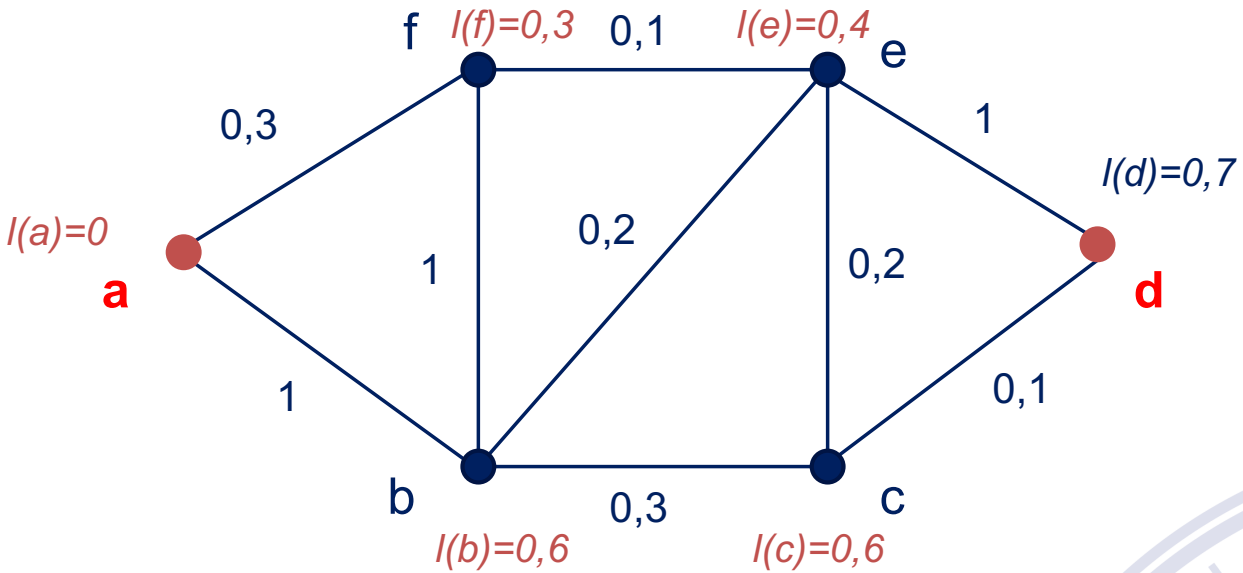
Cammino più breve



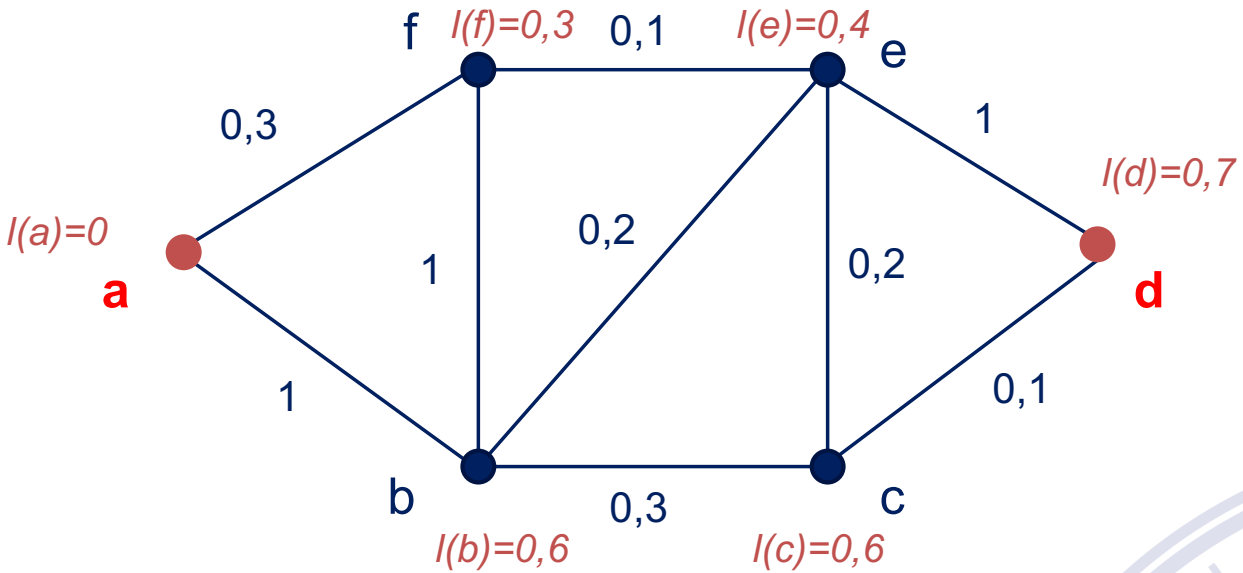
Cammino più breve



Cammino più breve



Cammino più breve



Cammino più breve