Modulo 2.2

# Produttività e rendimenti di scala

# Produttività marginale

- Consideriamo la funzione di produzione:

$$y = f(x_1, .. x_i, .. x_n)$$

- La **produttività marginale** dell'input $i$ è data dall'incremento nell'output conseguito variando il livello dell'input $i$, **tenendo fissi gli altri livelli di input.**

- Cioè:

$$PM_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Se $$y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

la produttività marginale dell'input 1 è:

$$PM_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$

e la produttività marginale dell'input 2 è:

$$PM_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}.$$

Tipicamente la produttività marginale di un input dipende dall’ammontare utilizzato degli altri inputs.

Consideriamo: $$PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$

Se $x_2 = 8,$ $$PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} 8^{2/3} = \frac{4}{3} x_1^{-2/3}$$

Se $x_2 = 27,$ $$PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} 27^{2/3} = 3 x_1^{-2/3}.$$

- La produttività marginale dell'input $i$ è decrescente se diventa più piccola al crescere dell'utilizzo dell'input $i$.

- In molti casi la produttività marginale è decrescente: a parità degli altri fattori, ogni unità dell'input che viene aumentato trova meno unità degli altri fattori con cui "collaborare".

- Per questo motivo le unità addizionali sono "meno produttive".

Se $y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ allora:

$$PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{e} \quad PM_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

quindi $$\frac{\partial PM_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{9} x_1^{-5/3} x_2^{2/3} < 0$$

e $$\frac{\partial PM_2}{\partial x_2} = -\frac{2}{9} x_1^{1/3} x_2^{-4/3} < 0.$$

Nel nostro esempio, entrambe le produttività marginali sono decrescenti.

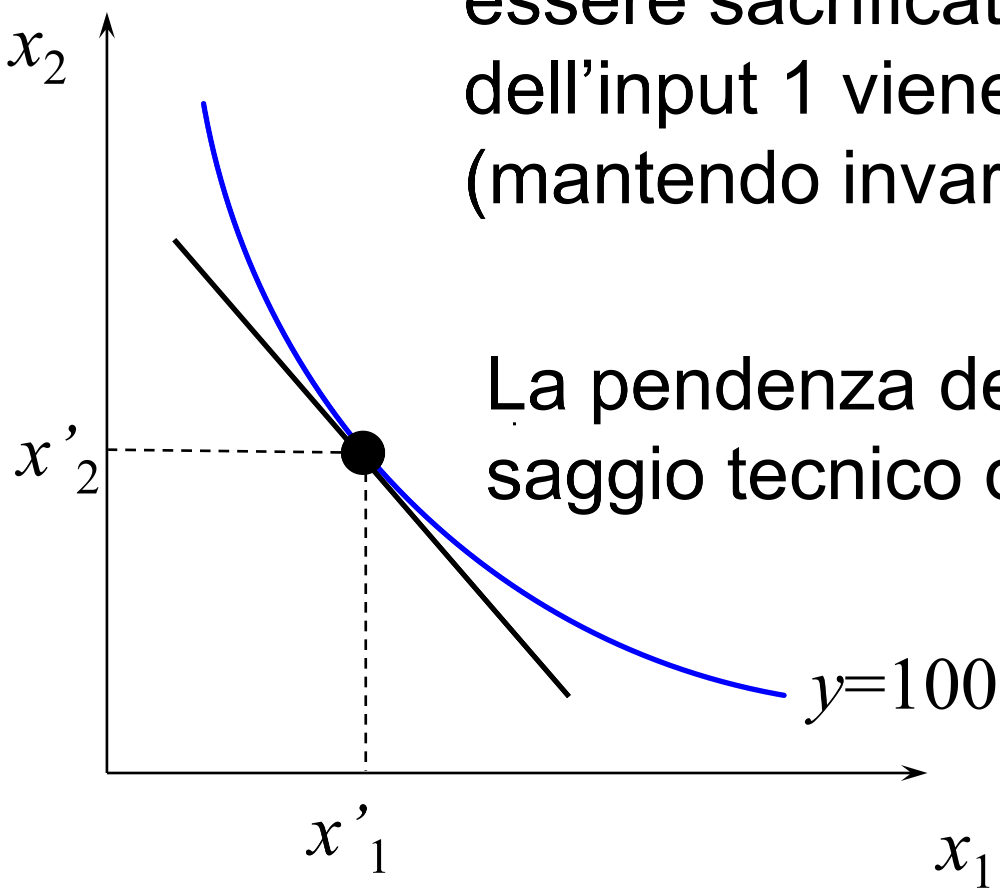
# Saggio tecnico di sostituzione

- Poniamoci un quesito di notevole rilevanza:

- secondo quale rapporto è possibile per un’azienda sostituire un input con un altro senza modificare il livello di output?

- (Si tratta di un problema analogo a quello visto per i consumatori, che sostituivano i beni mantenendo la stessa utilità)

La pendenza dell’isoquanto è il rapporto al quale l’input 2 deve essere sacrificato se il livello dell’input 1 viene aumentato (mantendo invariato l’output).




La pendenza dell’isoquanto è il saggio tecnico di sostituzione.

- Come si calcola il saggio di sostituzione tecnica?
- La funzione di produzione è:

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Un piccolo cambiamento $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$ nel vettore di input induce una variazione nel livello di output pari a:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Ma $\mathrm{d}y = 0$ (stiamo sull'isoquanto di partenza), quindi le variazioni $\mathrm{d}x_1$ e $\mathrm{d}x_2$ negli inputs devono soddisfare:

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 .$$

risistemando

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = - \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1$$

ovvero:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$$

che è il saggio tecnico di sostituzione (STS), ovvero il rapporto a cui l’input 2 deve essere sacrificato se l’input 1 aumenta e si voglia mantenere costante il livello di output.

Notate che il STS è pari al rapporto tra le produttività marginali, con segno cambiato.

# Esempio Cobb-Douglas

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Svolgiamo con $a$=1/3; $b$=2/3

Le produttività marginali sono:

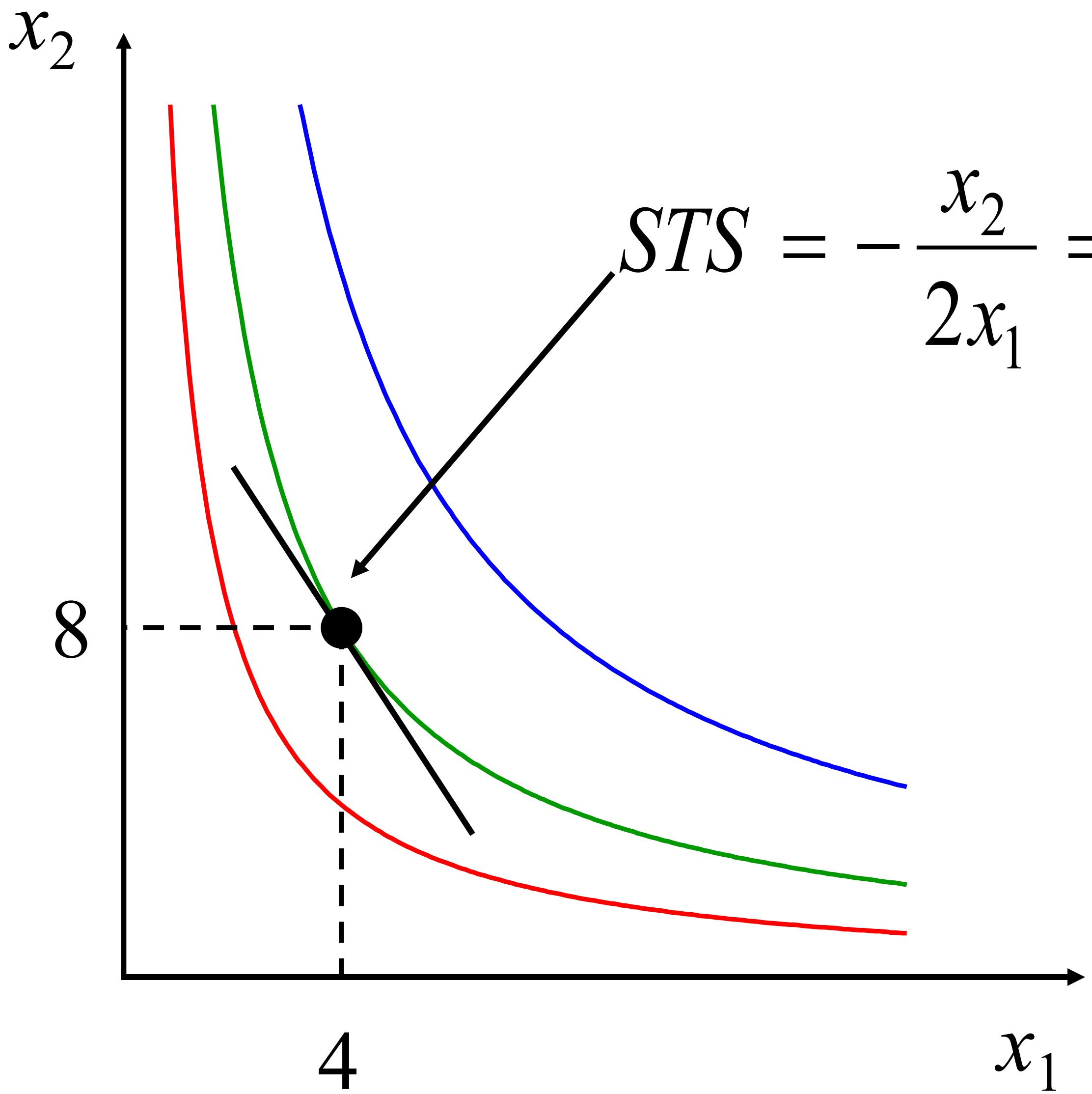
$$PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$ e

$$PM_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

Il loro rapporto con segno mutato (STS) è quindi:

$$STS = -\frac{(1/3)x_1^{-2/3}x_2^{2/3}}{(2/3)x_1^{1/3}x_2^{-1/3}} = -\frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = -\frac{x_2}{2x_1}$$

# Graficamente, se $x_2$=8 e $x_1$=4:

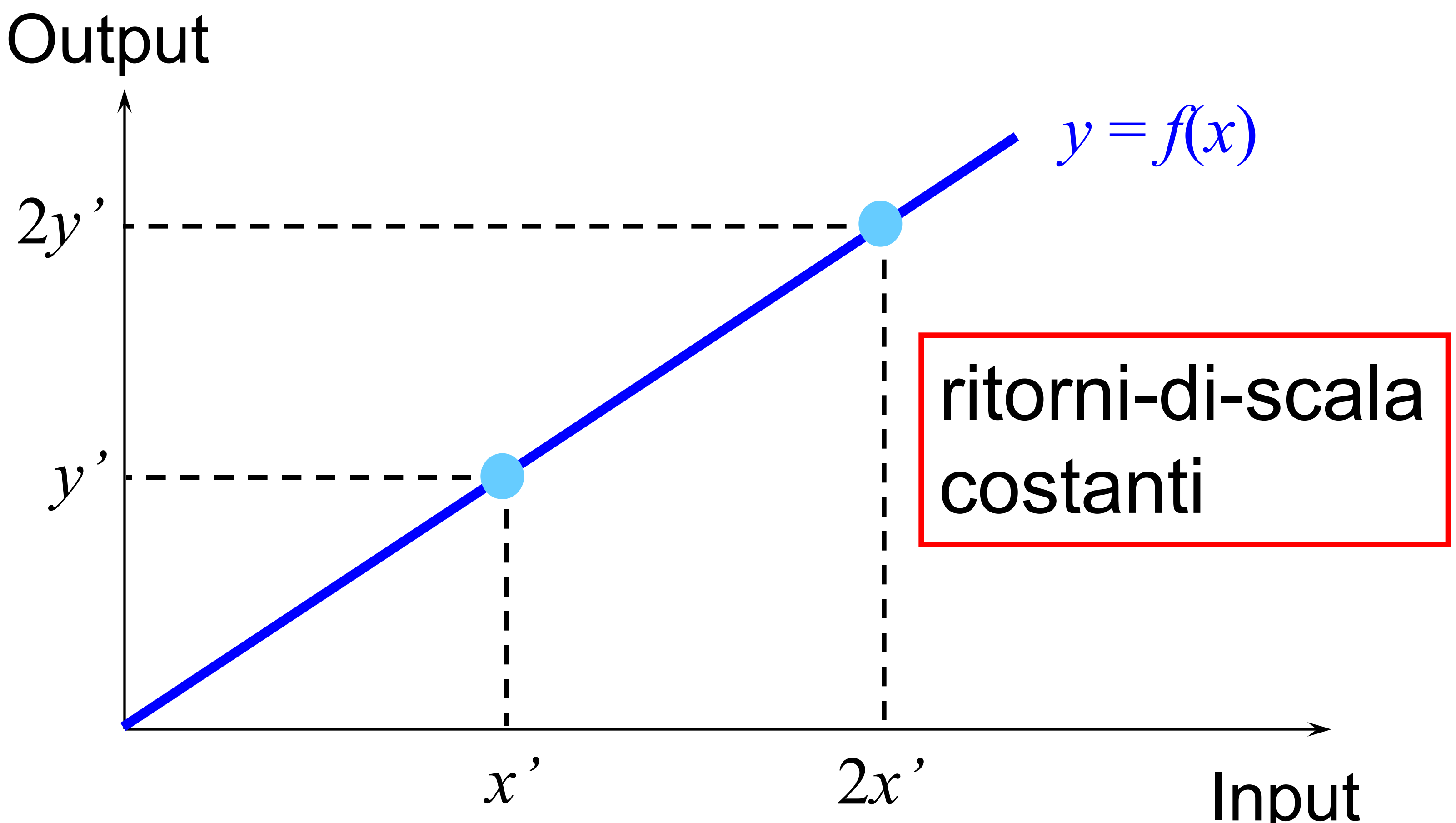



$$STS = -\frac{x_2}{2x_1} = -\frac{8}{2 \times 4} = -1$$

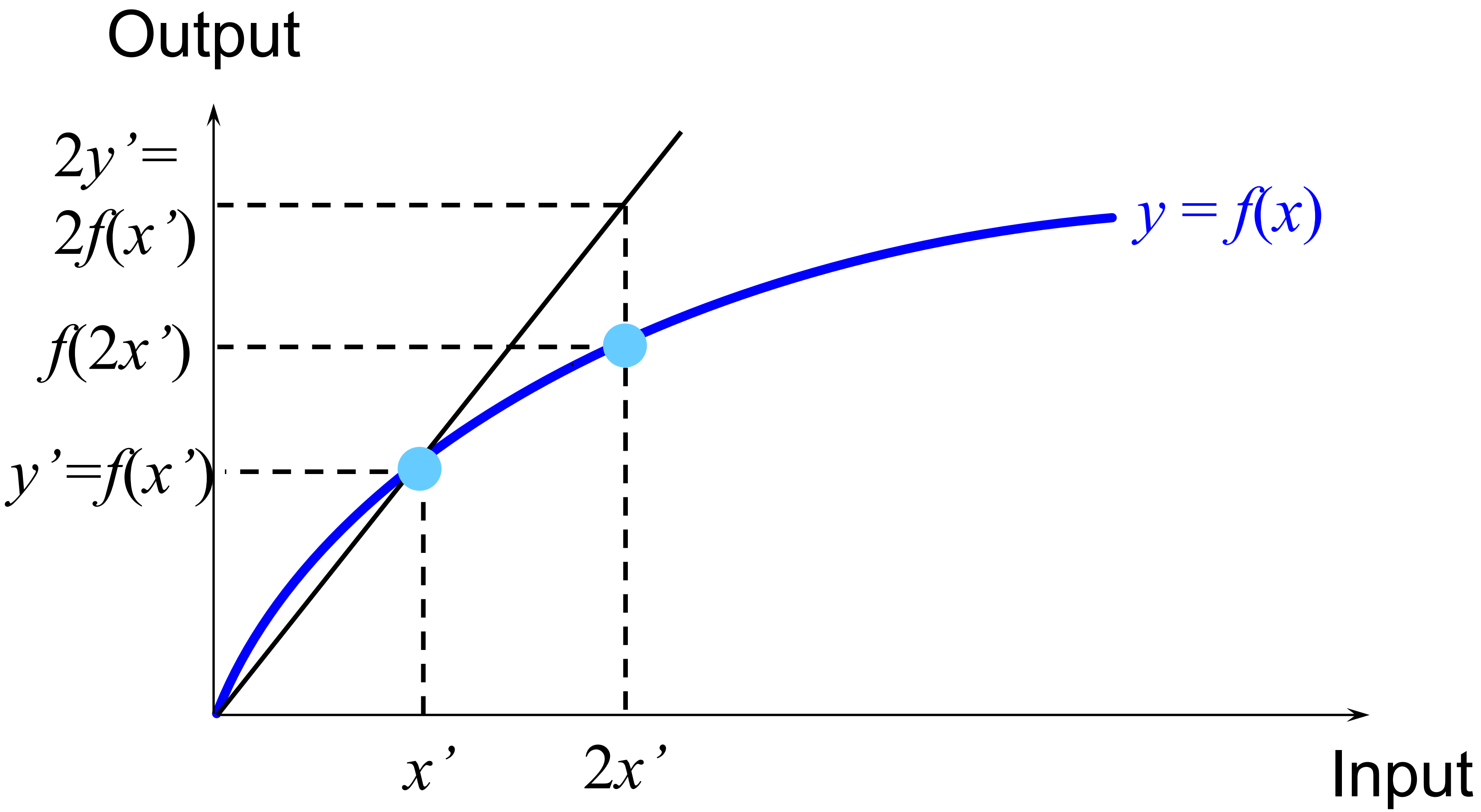
# Ritorni-di-scala

- Le produttività marginali descrivono il cambiamento nell'output quando cambia un solo livello di input.
- I "ritorni di scala" descrivono come cambia l'output quando tutti i livelli di input cambiano nella stessa proporzione (*e.g.* tutti vengono raddoppiati, triplicati ecc.).
- Presenteremo una trattazione grafica a riguardo del caso irrealistico ma utile didatticamente in cui esiste un solo input

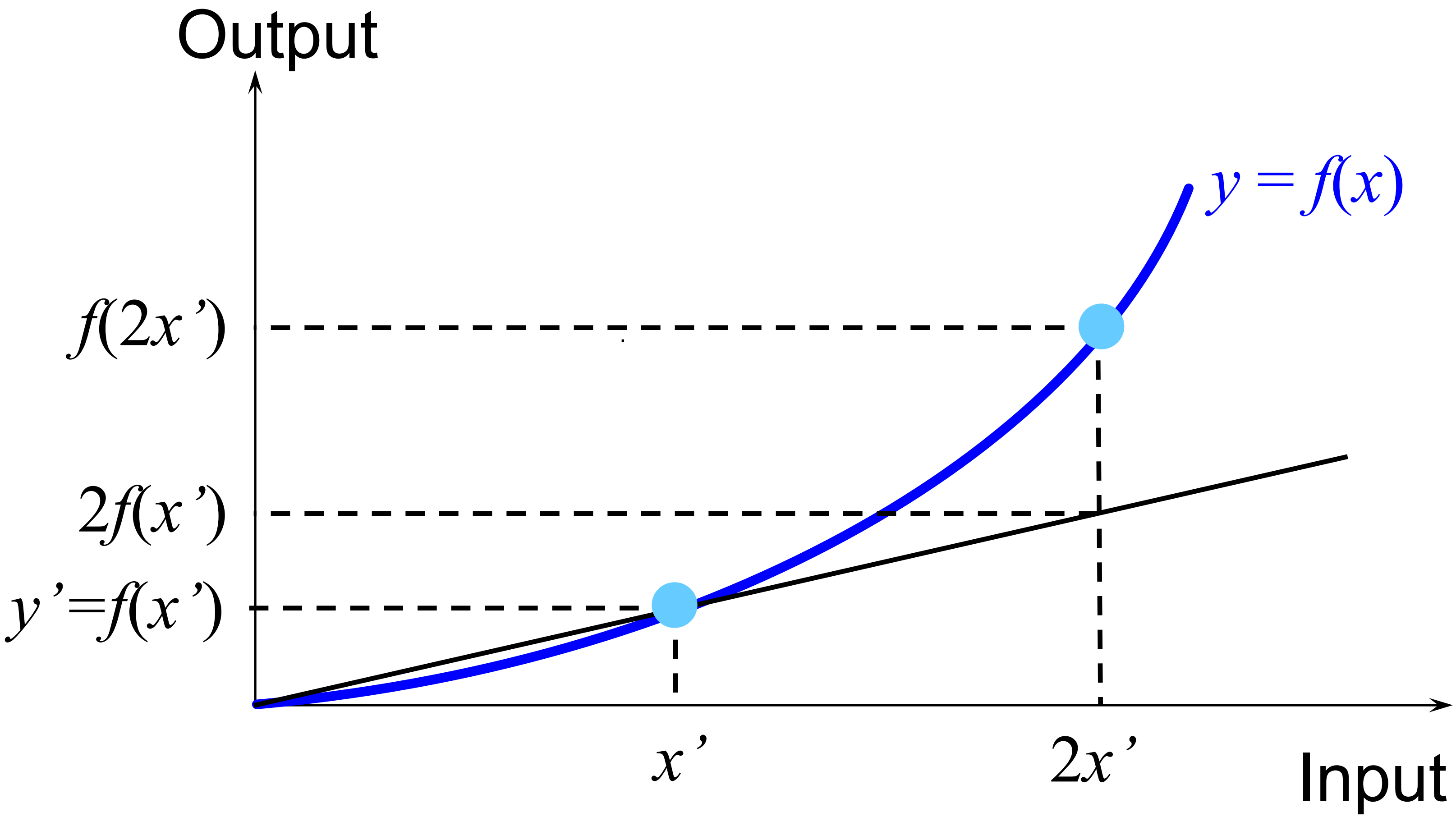
# Un input, un output



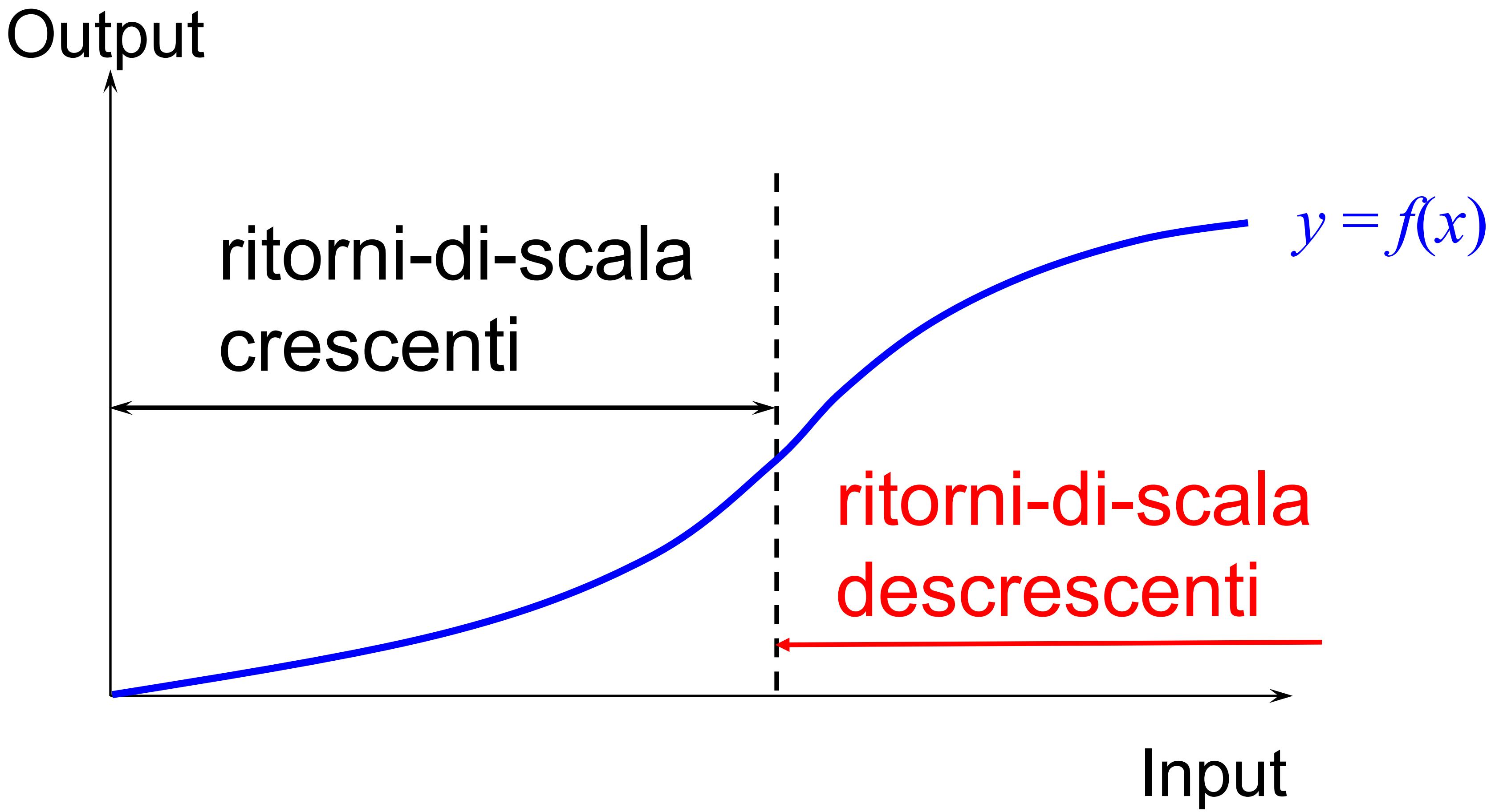
ritorni-di-scala decrescenti: $2y' > f(2x')$



ritorni-di-scala crescenti: $2y' < f(2x')$



# Situazione “tipica”



# Esempio Cobb-Douglas

La funzione di produzione sia data da:

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \quad .$$

Espandiamo tutti i livelli di input in proporzione di $k$.

L'output diventa: $(kx_1)^{a_1}(kx_2)^{a_2}$

$$= k^{a_1} k^{a_2} x_1^{a_1} x_2^{a_2} = k^{a_1+a_2} x_1^{a_1} x_2^{a_2} = k^{a_1+a_2} y.$$

Data la funzione di produzione: $y = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$

si ottiene: $(kx_1)^{a_1}(kx_2)^{a_2} = k^{a_1+a_2} y.$

Tale tecnologia presenta ritorni-di-scala:

costanti se $a_1 + a_2 = 1$

crescenti se $a_1 + a_2 > 1$

decrescenti se $a_1 + a_2 < 1.$

# Caso generale

Se, per un qualsiasi vettore di inputs $(x_1,\ldots,x_n)$,

$$f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = kf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

allora la tecnologia descritta dalla funzione di produzione presenta ritorni-di-scala costanti.

Se $k = 2$, raddoppiando tutti gli inputs, si raddoppia anche l'output.

Se, per un qualsiasi vettore di inputs $(x_1, \ldots, x_n)$,

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) < kf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

allora la tecnologia descritta dalla funzione di produzione presenta ritorni-di-scala decrescenti.

Se $k = 2$, raddoppiando tutti gli inputs, l'output non viene raddoppiato.

Se, per un qualsiasi vettore di inputs $(x_1,\ldots,x_n)$,

$$f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) > kf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

allora la tecnologia descritta dalla funzione di produzione presenta ritorni-di-scala crescenti.

Se $k = 2$, raddoppiando tutti gli inputs,l’output è più che raddoppiato.

# Ritorni-di-scala e produttività decrescenti

- Una tecnologia può presentare ritorni-di scala crescenti se tutte le produttività marginali sono decrescenti?
- Si. Consideriamo ad esempio:

$$y = x_1^{2/3} x_2^{2/3}.$$

questa tecnologia presenta ritorni-di-scala crescenti. $a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 1$

Tuttavia $PM_1 = \frac{2}{3} x_1^{-1/3} x_2^{2/3}$

diminuisce se $x_1$ aumenta e

$$PM_2 = \frac{2}{3} x_1^{2/3} x_2^{-1/3}$$

diminuisce se $x_2$ aumenta

- La produttività marginale è la variazione di output indotta dall'aumento in un solo input.
- La produttività marginale diminuisce  in quanto i livelli degli altri input sono costanti, quindi ogni unità dell'input che cresce trova sempre meno unità degli altri inputs con cui "collaborare".
- Quando tutti gli inputs vengono aumentati proporzionatamente, non è detto che vi sia diminuzione delle produttività marginali.
- ogni fattore produttivo ha sempre la stessa quantità degli altri inputs con cui "collaborare".

# Breve e lungo periodo

- Il lungo periodo è la situazione in cui un'impresa non è vincolata nella scelta di nessun fattore produttivo.
- Il breve periodo è una situazione in cui un'impresa è vincolata in qualche modo nella scelta di (almeno) un fattore produttivo.

- Esempi di possibili vincoli ‘di breve periodo’ :
- impossibilità (o eccessivo costo) nell’installare/rimuovere capitale
- impossibilità legale di licenziare lavoratori.
- Supponiamo che i vincoli di breve periodo riguardino il livello di input del fattore 2 (input fisso). Il fattore 1 rimane variabile.

Sia $y = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$ la funzione di produzione di lungo periodo ($x_1$ e $x_2$ sono variabili).

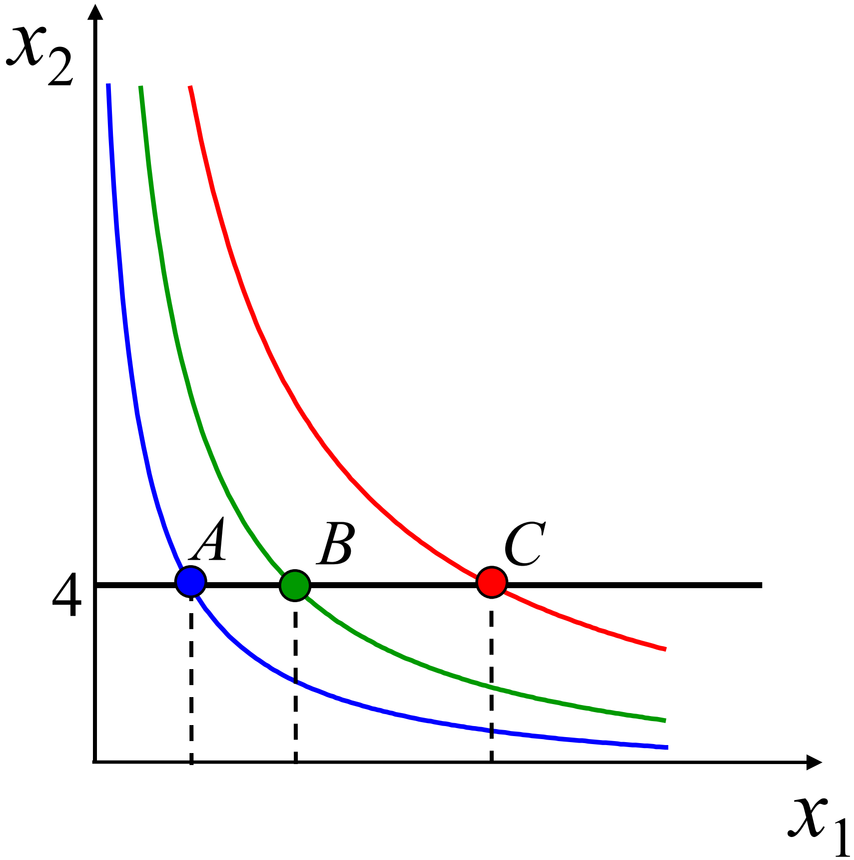
La funzione di produzione di breve periodo con $x_2 = 4$ è:

$$y = x_1^{1/3} 4^{1/2} = 2x_1^{1/3}.$$

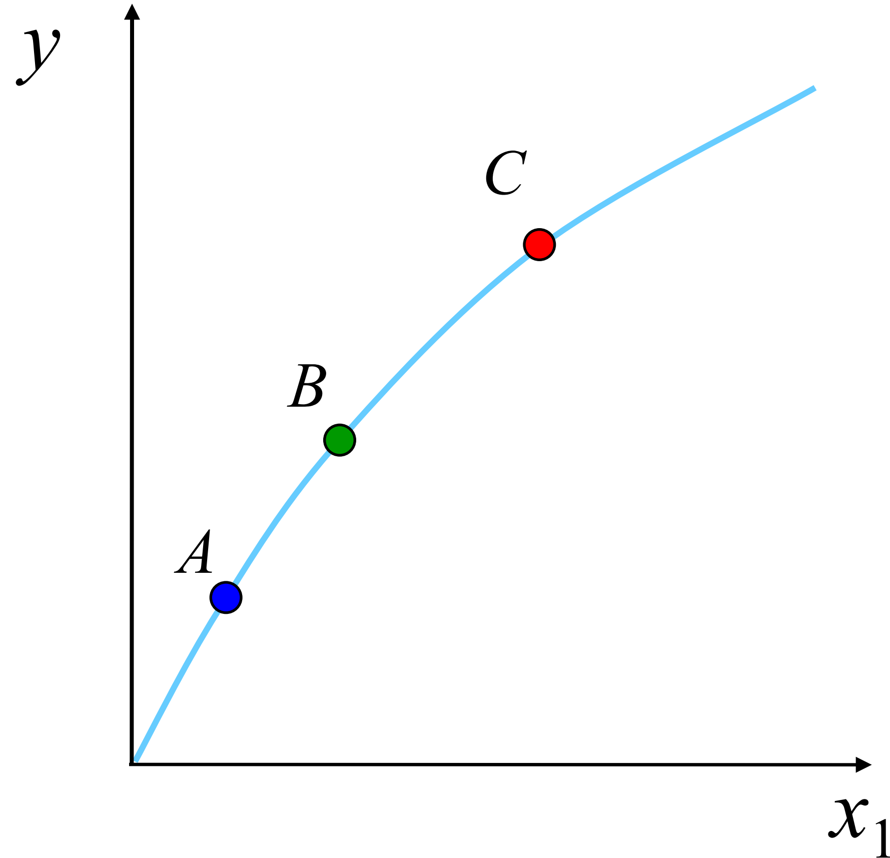
La funzione di produzione di breve periodo con $x_2 = 16$ è:

$$y = x_1^{1/3} 16^{1/2} = 4x_1^{1/3}.$$

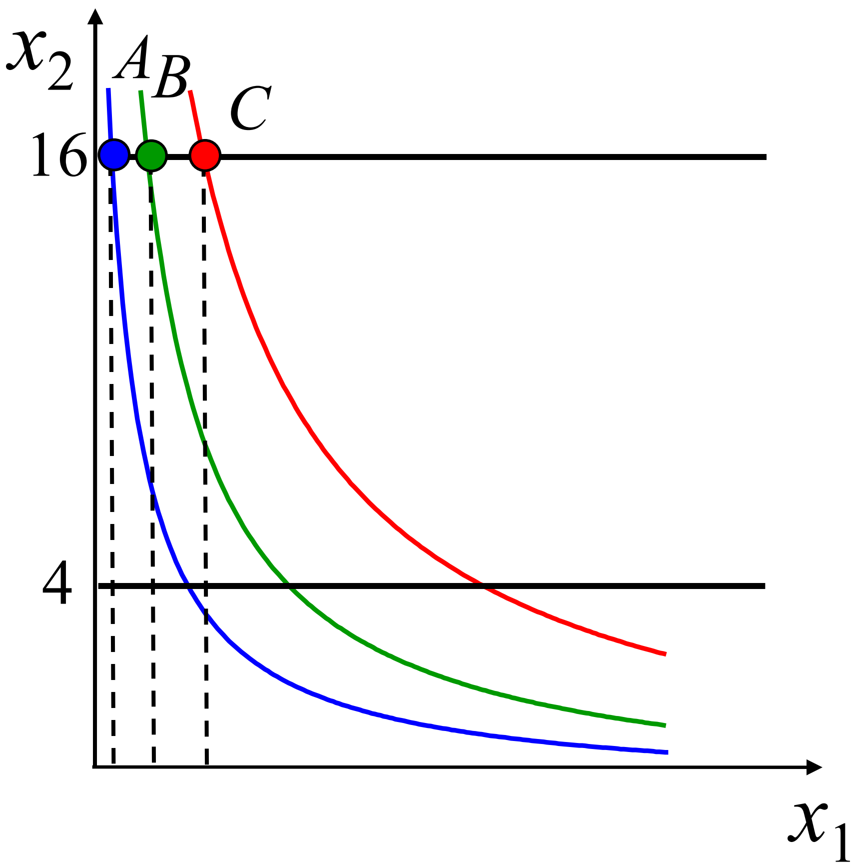
Isoquanti per $y = 2, 4, 8$




Funzione di produzione di breve periodo ($x_2$=4).



Isoquanti per $y = 2, 4, 8$




Funzione di produzione di breve periodo ($x_2$=16).