1 Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste del seguente gioco:

I/II	t_1	t_2
s_1	1,2	2,1
s_2	3,1	1,3

In strategie pure non c'è equilibrio di Nash. Passo alle strategie miste e assegno distribuzione di probabilità sulle diverse mosse dei giocatori.

$$U_I(p,q) = 1(pq) + 3q(1-p) + 2p(1-q) + 1(1-p)(1-q)$$

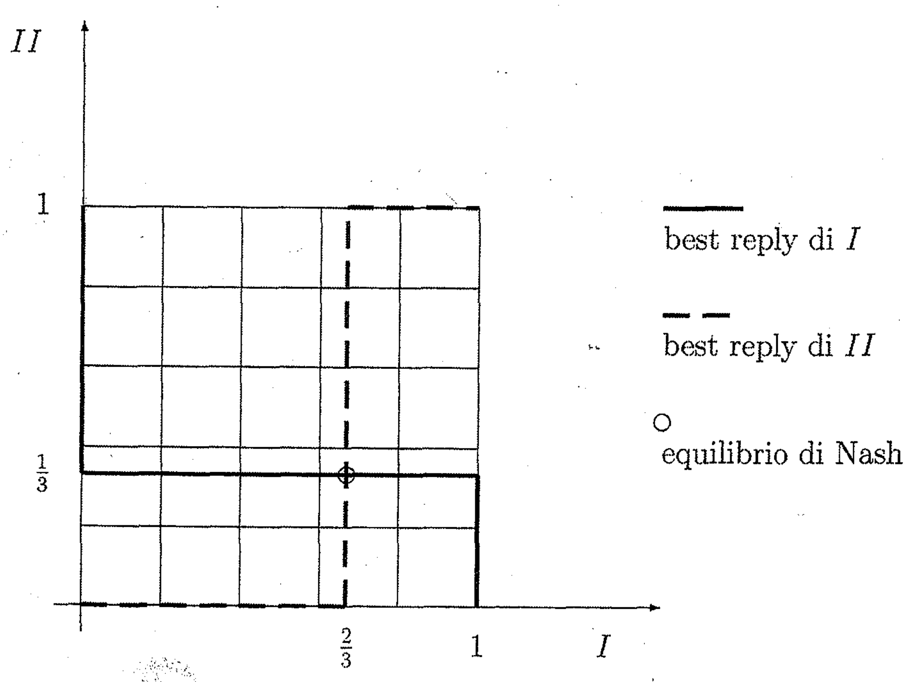
$$U_{II}(p,q) = 2(pq) + 1q(1-p) + 1p(1-q) + 3(1-p)(1-q)$$

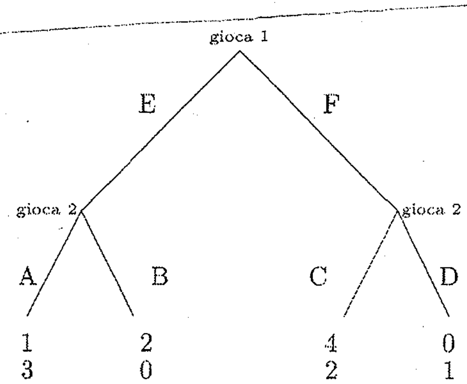
Fissato q, cerco la miglior risposta per I, cioè cerco, al variare di p, il max della funzione di utilità di I:
$U_I(p,q) = pq + 3q - 3pq + 2p - 2pq + 1 - q - p + pq = -3pq + 2q + p + 1 = (1-3q)p + 2q + 1$
Per q fissato, questa è l'equazione di una retta che considero nell'intervallo $[0,1]$ perché $0 \leq p \leq 1$.

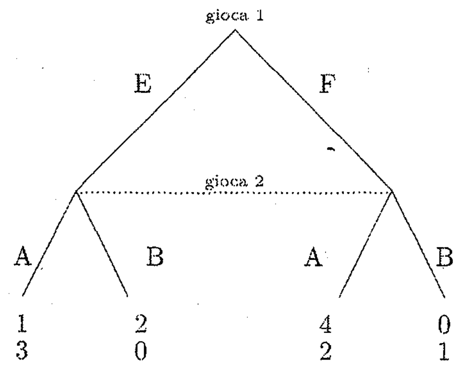
Se $1-3q > 0$, cioè $q < 1/3$: max per $p = 1$
Se $1-3q < 0$, cioè $q > 1/3$: max per $p = 0$
Se $1-3q = 0$, cioè $q = 1/3$: max per ogni p

Fissato p, cerco la miglior risposta per II, cioè cerco al variare di q il max della funzione di utilità di II:
$U_{II}(p,q) = 2pq + q - pq + p - pq + 3 - 3q - 3p + 3pq = 3pq - 2q - 2p + 3 = (3p-2)q - 2p + 3.$

Se $3p-2 > 0$, cioè $p > 2/3$: max per $q = 1$
Se $3p-2 < 0$, cioè $p < 2/3$: max per $q = 0$
Se $3p-2 = 0$, cioè $p = 2/3$: max per ogni q







Scrivere la forma strategica di entrambi (uno è a informazione perfetta, mentre l'altro non lo è).

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie pure e gli equilibri perfetti nei sottogiochi di quello dei due che è a informazione perfetta.

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste di quello non a informazione perfetta.

La forma strategica del primo gioco è:

$I \backslash II$	AC	AD	BC	BD
E	$1, \underline{3}$	$\underline{1}, \underline{3}$	$2, 0$	$\underline{2}, 0$
F	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$

Nella forma strategica abbiamo già sottolineato i payoff per mostrare la best reply e trovare gli equilibri di Nash. Gli equilibri di Nash sono (E, AD), (F, AC) e (F, BC). Di questi (F, AC) è l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi (cosa che si verifica agevolmente applicando l'induzione a ritroso).

La forma strategica del secondo gioco è:

$I \backslash II$	A	B
E	$1, \underline{3}$	$\underline{2}, 0$
F	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$

Anche qui abbiamo sottolineato, etc... Il gioco ha un solo equilibrio di Nash: (F, A).

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$ per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II.
Il payoff atteso di I è:

$$f(p,q) = pq + 2p(1-q) + 4(1-p)q = pq + 2p - 2pq + 4q - 4pq =$$
$$= -5pq + 2p + 4q = p(2-5q) + 4q$$

Quindi per $q < 2/5$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/5$ è tutto $[0,1]$, per $q > 2/5$ la best reply è $p = 0$.
Per II il payoff atteso è:

$$g(p,q) = 3pq + 2p(1-q) + (1-p)(1-q) = 3pq + 2q - 2pq + 1 - p - q + pq =$$
$$= 2pq - p + 1 + q = q(2p+1) + (1-q)$$

La best reply per II è sempre $q = 1$, qualunque sia p.

In figura 1 disegniamo le best reply.

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. L'unico che troviamo è indicato in figura, e corrisponde a $p = 0$ e $q = 1$. Vale a dire, si tratta dell'equilibrio in strategie pure che già avevamo trovato.
Potevamo in realtà risparmiarci i conti, semplicemente osservando che la strategia A domina strettamente B.