Modulo 8.3

Utilità e sostituzione

La funzione di utilità

- Introdurremo un esempio specifico di funzione di utilità.
- Questo esempio concreto ci aiuterà ad introdurre importanti concetti quali:

  L'utilità marginale

  Il saggio marginale di sostituzione (SMS)
- Esempi a riguardo di funzioni di utilità alternative completeranno il capitolo.

La funzione Cobb-Douglas

- Qualsiasi funzione di utilità del tipo:

$$U(x_1,x_2) = x_1^{a} x_2^{b}$$

con $a > 0$ e $b > 0$ viene chiamata funzione di utilità Cobb-Douglas.

- Es.: $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ $(a = b = ½)$

- $V(x_1,x_2) = x_1 x_2^{3}$ $(a = 1, b = 3)$

- Le curve di indifferenza sono espresse dall’equazione

$$x_1^a x_2^b = k$$

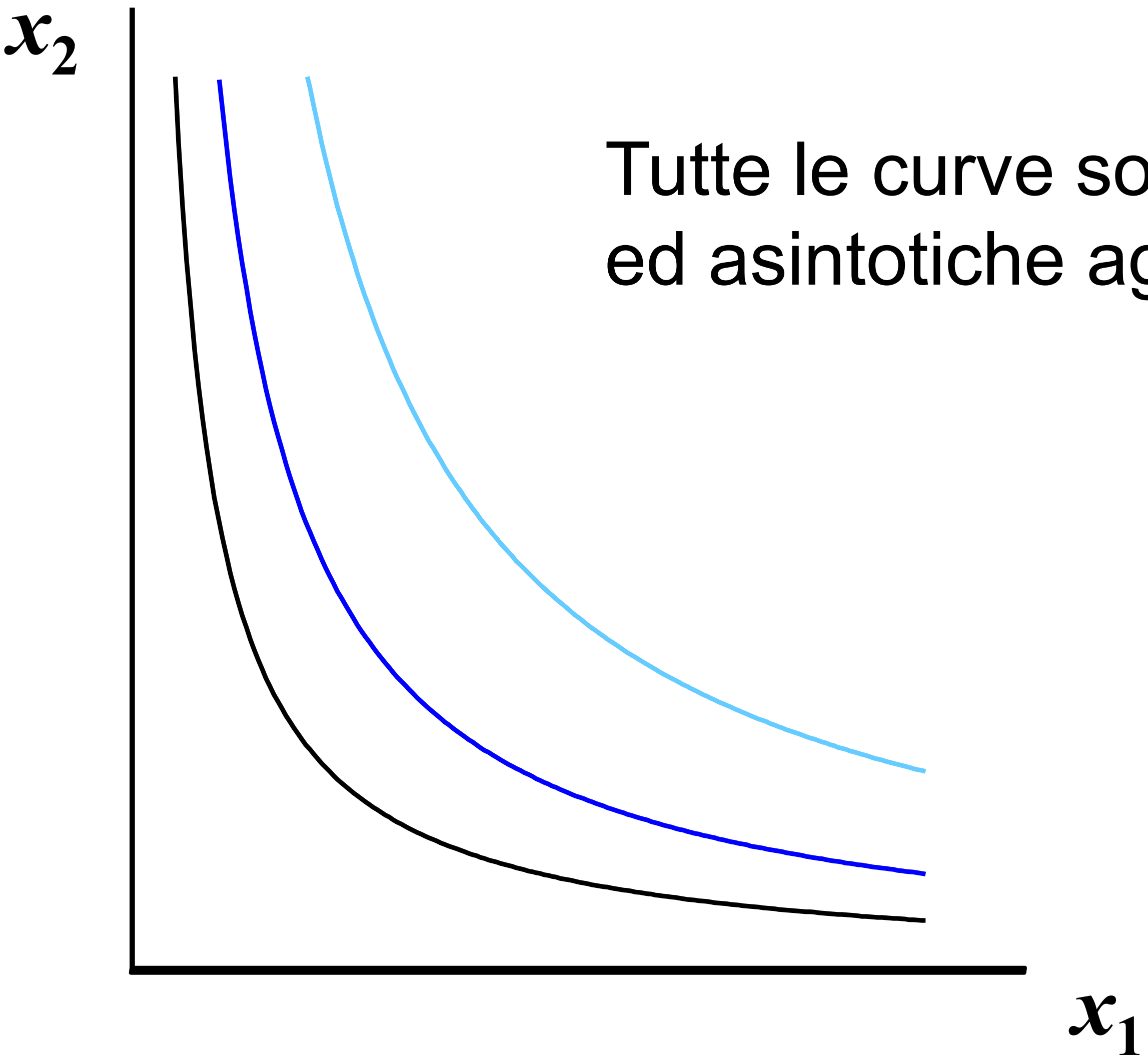
dove k è un dato.

- Esplicitando per x_2 si ottiene:

$$x_2 = (k/x_1^a)^{1/b}$$

- Per $a=b=1/2$, $x_2=k^{0.5}/x_1$

Curve di indifferenza



Tutte le curve sono iperboliche ed asintotiche agli assi.

Utilità marginali

- Marginale significa “incrementale”.

- Intuitivamente, l’utilità marginale del bene i è incremento di utilità connesso ad un incremento unitario nel consumo del bene i:

$$UMg_{\,i} = U(x_1,..,x_i + 1,..) - U(x_1,..,x_i,..)$$

- Più precisamente, l'utilità marginale del bene i è il rapporto tra la variazione di utilità e l'incremento nel consumo del bene i.

- In termini differenziali:

$$UMg_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

- In concreto, si utilizza il concetto di derivata parziale.
- *E.g.* se $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{2}$ allora:

$$UMg_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} \boxed{x_2^2}$$

Il termine in x_2 è un dato (viene considerato come fosse una costante): cambia solo il consumo del primo bene

- Analogamente, dato sempre $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$

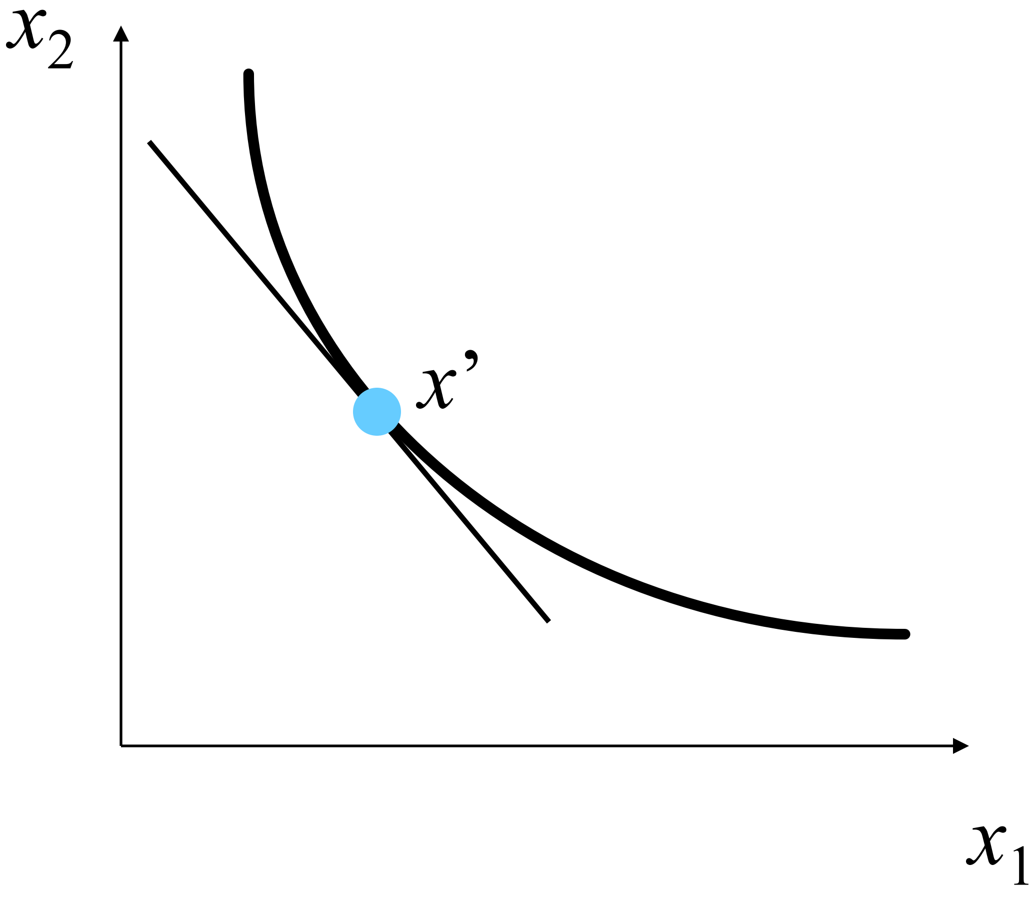
$$UMg_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2\boxed{x_1^{1/2}}x_2$$

Saggio marginale di sostituzione

- Si tratta di un concetto fondamentale: ci dice **quante unità di un bene sono sacrificabili per ottenere una unità aggiuntiva di un altro bene "a parità di benessere" (restando indifferenti)**

- Come si calcola il SMS di sostituzione?

Il SMS nel punto x' è la pendenza della curva di indifferenza in x'

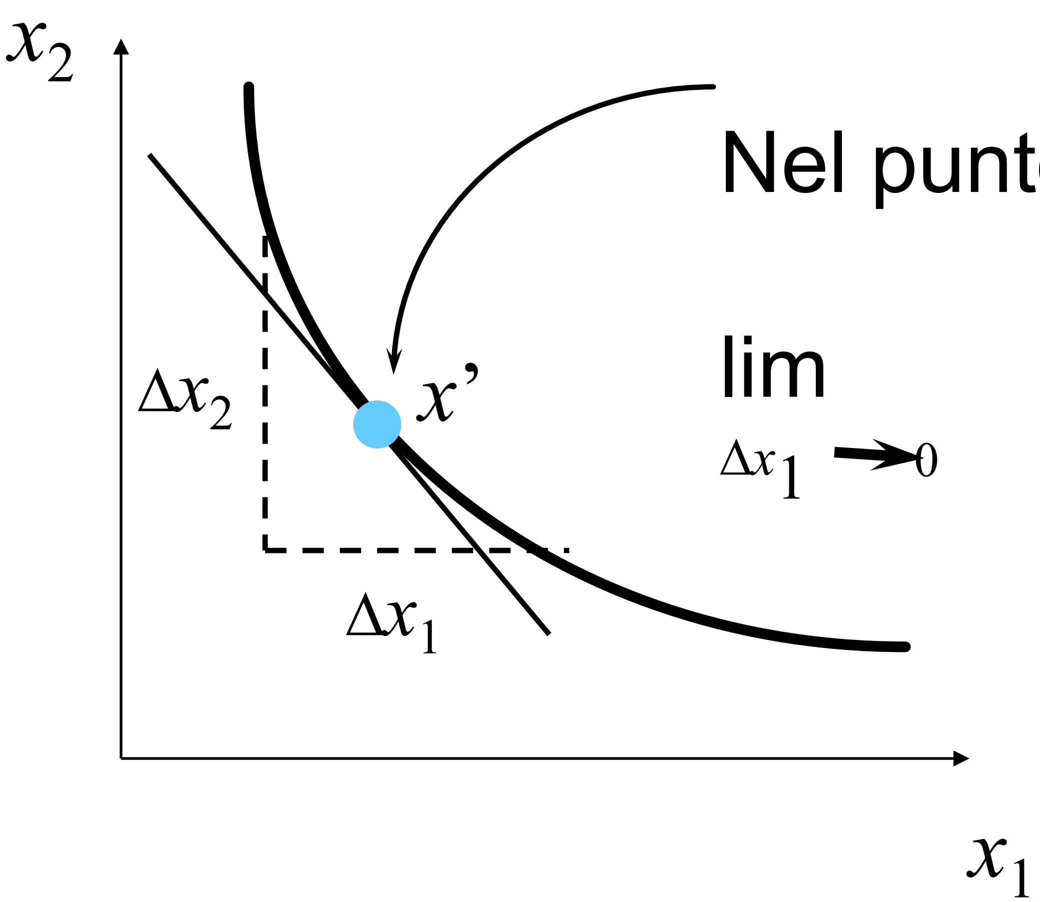


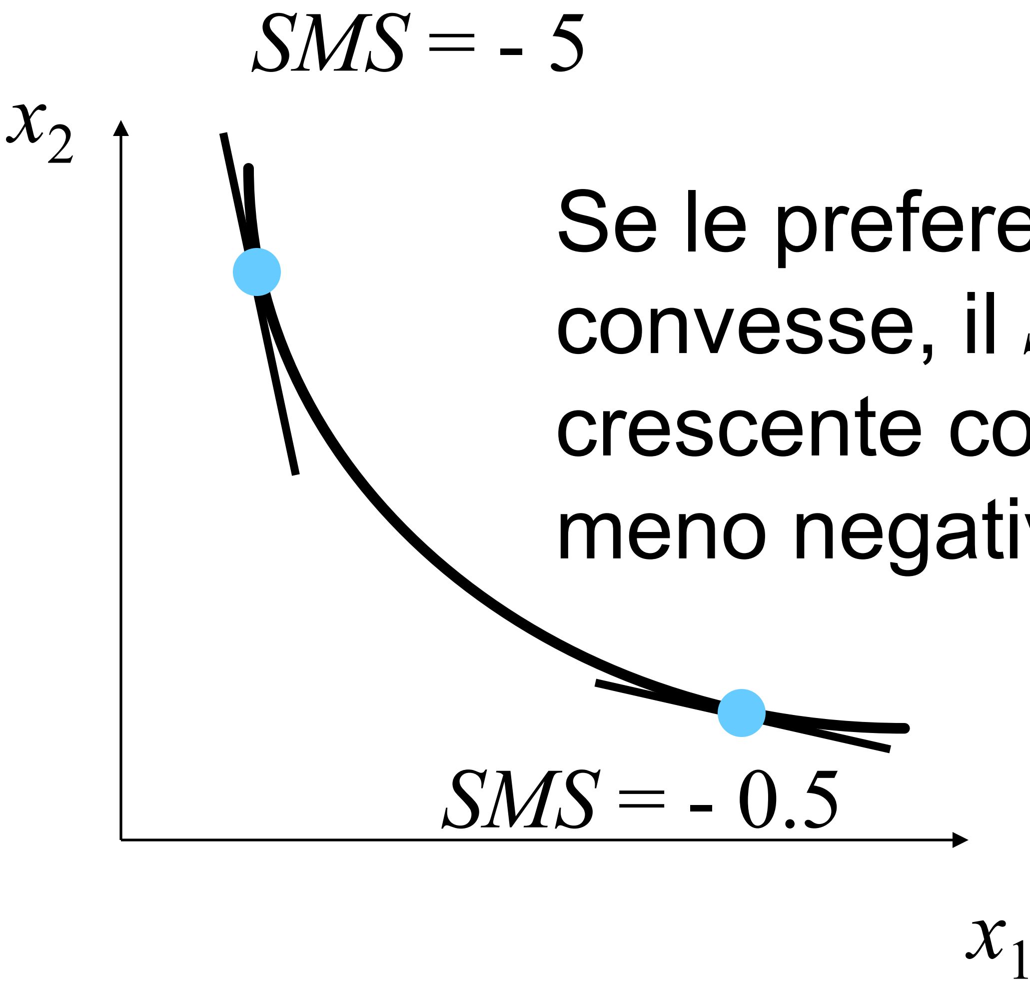
Il SMS è la pendenza

della curva: $\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$

Nel punto x’ è:

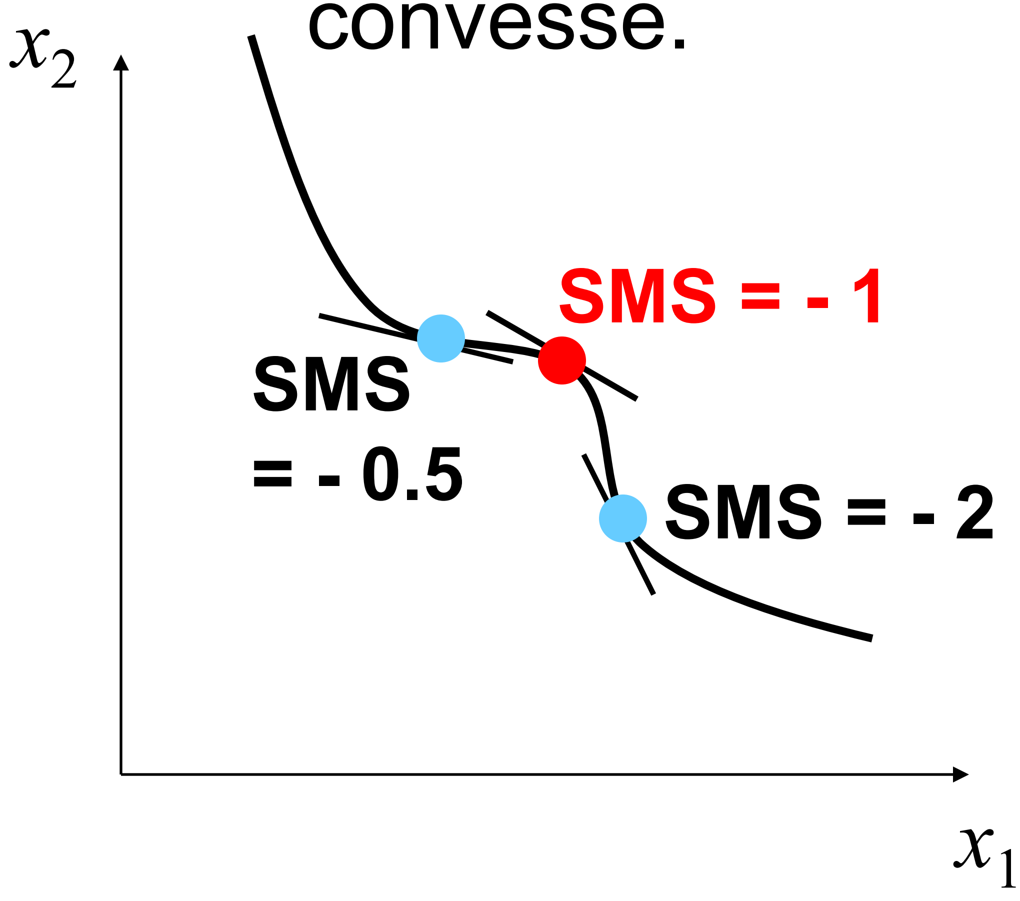
$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{d\,x_2}{d\,x_1}$$





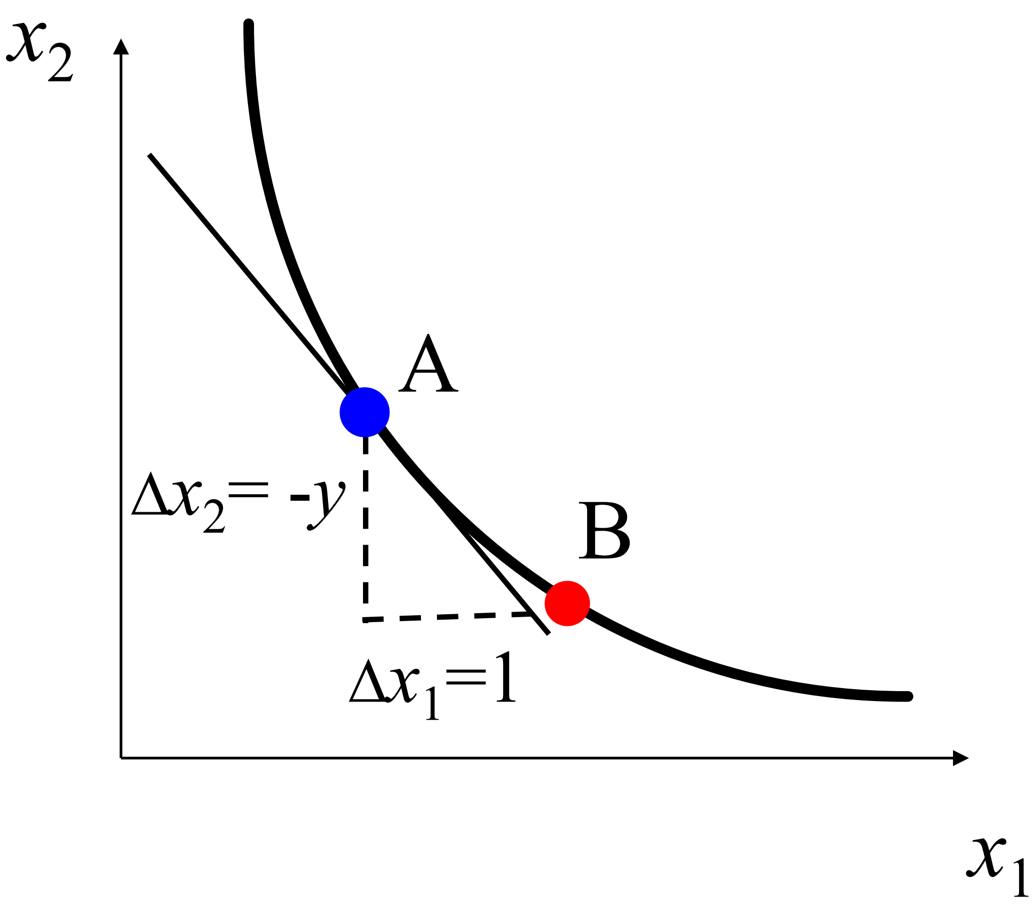
Se le preferenze sono convesse, il *SMS* è sempre crescente con x_1 (diventa meno negativo).

Se il SMS non è sempre crescente con x_1 le preferenze non sono convesse.



Utilità marginali e saggio marginale di sostituzione

- Esiste una relazione (fondamentale!!) tra SMS ed utilità marginali.
- Consideriamo due panieri posti sulla stessa curva di indifferenza: A e B.
- Nel punto B è presente una unità in più del bene 1 ed “alcune” unità in meno del bene 2.
- Il SMS consente di determinare facilmente il numero di unità in meno di x_2 che consentono di godere della stessa utilità.


x_2
A
$\Delta x_2 = -y$
B
$\Delta x_1 = 1$
x_1

- L’utilità apportata da una unità in più del bene 1 è eguale alla riduzione di utilità connessa alla rinuncia al consumo di y unità del bene 2.
- Intuitivamente, l’utilità marginale di una unità di x_1 è eguale a y volte l’utilità marginale di x_2.
- Ciò consente appunto di determinare y.

$$y = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{UMg_1}{UMg_2}.$$

Il Saggio Marginale di Sostituzione (**SMS**) è esprimibile come **rapporto tra le utilità marginali** dei due beni, con segno cambiato.

- Segue una trattazione più formale.
- L'equazione generale per una curva di indifferenza è:

  $U(x_1, x_2) \equiv k$, una costante.

  Il differenziale totale di questa espressione è:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Risistemando si ottiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1$$

Partendo da:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1$$

con un passaggio si ottiene:

$$\frac{d x_2}{d x_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

Questo è (di nuovo) il SMS.

Un esempio

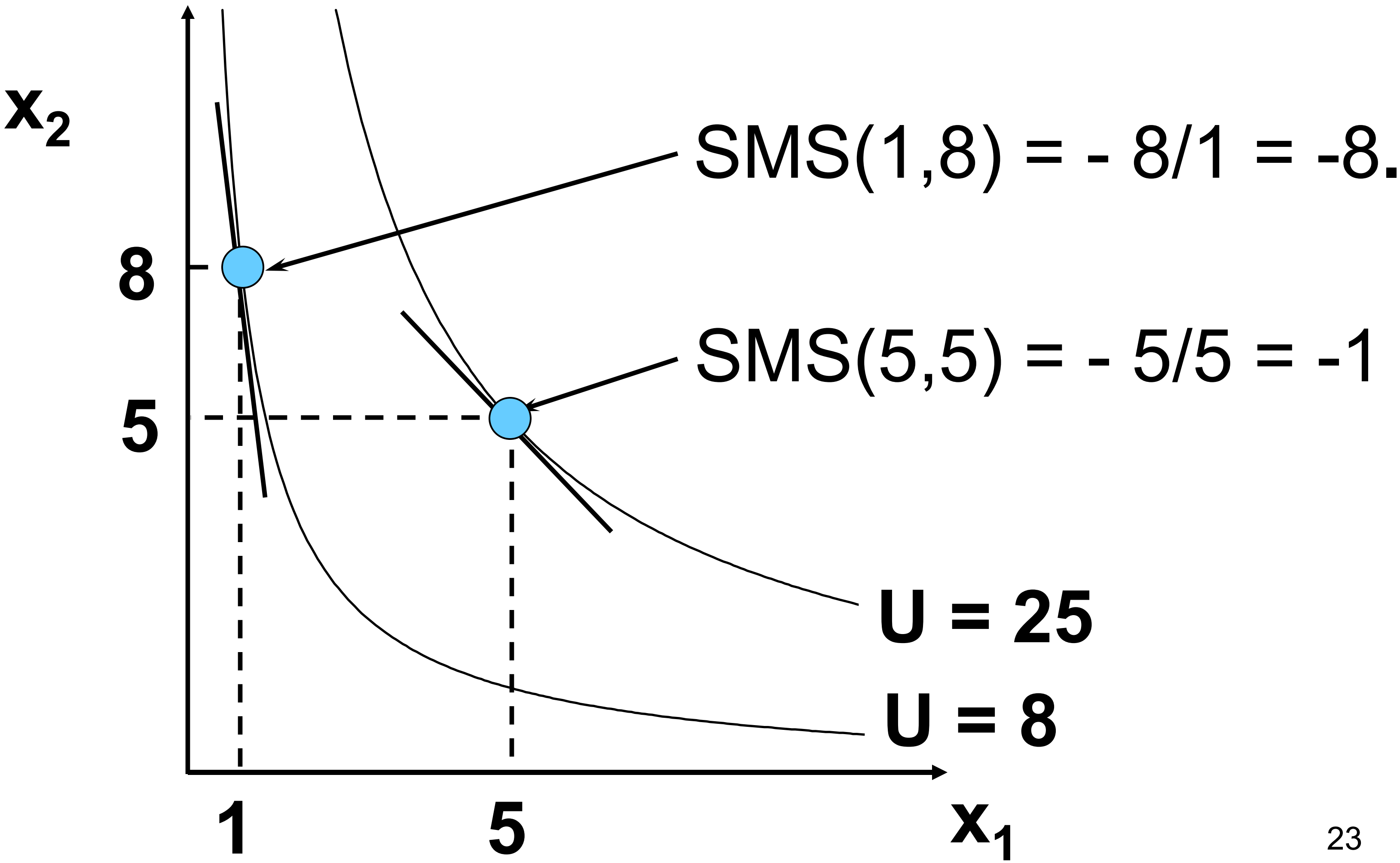
- Supponiamo $U(x_1,x_2) = x_1x_2$. Quindi:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = (1)(x_2) = x_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = (x_1)(1) = x_1$$

per cui $$SMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = -\frac{x_2}{x_1}.$$

$U(x_1,x_2) = x_1x_2$ $\qquad SMS = -\dfrac{x_2}{x_1}$



Casi estremi I: perfetti sostituti

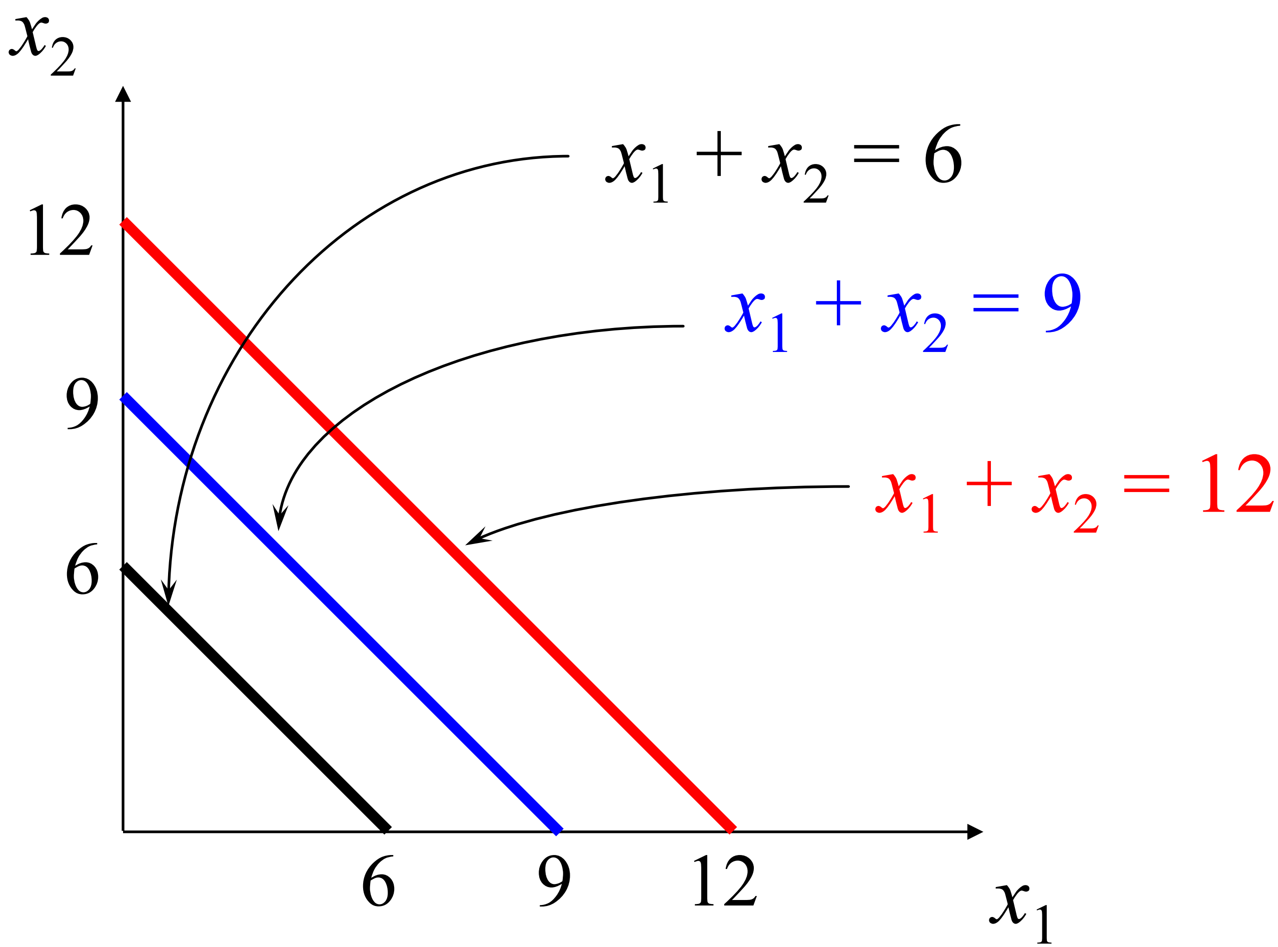
- Se, per un consumatore, i beni 1 e 2 sono equivalenti, allora i beni sono perfetti sostituti. Solo l' ammontare totale dei due beni nei panieri determina il loro ordine di preferenza.
- Esempio: coca cola e pepsi (per alcuni consumatori!)
- La funzione di utilità è esprimibile come:

$$V(x_1,x_2) = x_1 + x_2.$$

- La generica curva di indifferenza presenta equazione:

$$x_1 + x_2 = k$$

$$V(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$



Le curve di indifferenza sono lineari e parallele.

Casi estremi II:perfetti complementi

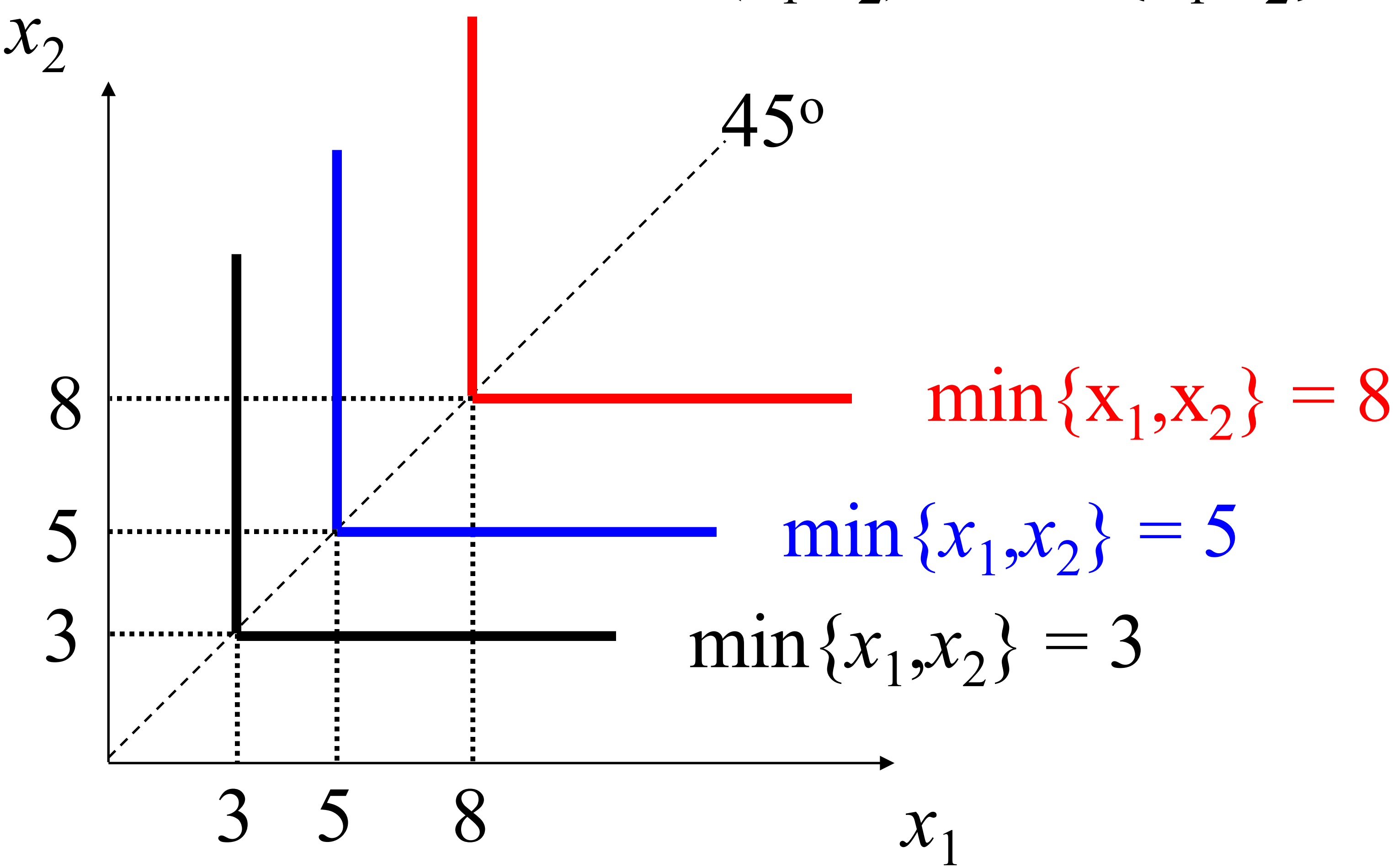
- Se un consumatore consuma sempre i beni 1 e 2 in proporzioni fisse (e.g. uno-a-uno), allora i beni sono complementi perfetti
- Esempi: paia di sci e paia di attacchi, pizza e birra (per alcuni consumatori!)
- Negli esempi solo il numero di coppie di unità dei due beni determina l’ordine di preferenza dei panieri.

- La funzione di utilità per un caso di questo tipo è data da:

$$W(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

- Ad esempio, se $x_1 > x_2$, alcune unità di x_1 vanno sprecate.
- L'idea è che non ci serve avere due paia di attacchi se possediamo un solo paio di sci
- Chiediamoci che forma presentano le curve di indifferenza per questi "perfetti complementi".

$$W(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$



Hanno tutte la forma di una L (con vertice su un raggio dall'origine).

Preferenze quasi lineari

- Una funzione di utilità con la forma:

$$U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$$

è lineare in x_2 ed è chiamata quasi-lineare.

- *E.g.* $U(x_1,x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$.

Ogni curva è una copia, spostata verticalmente, delle altre.