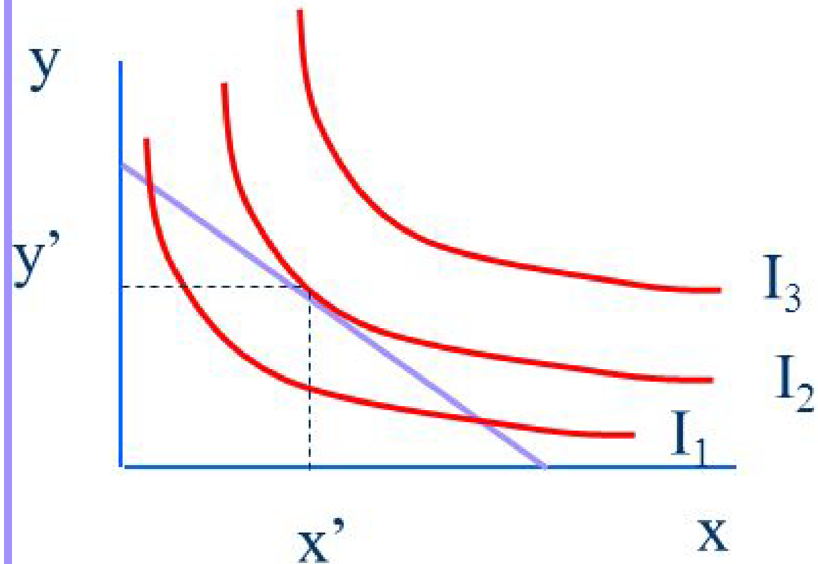
# La scelta del consumatore




$$SMS = \frac{p_x}{p_y}$$

- Dato il vincolo di bilancio, il consumatore sceglie il paniere che gli arreca maggior soddisfazione
  - Cerca di raggiungere il paniere nella curva di indifferenza più alta
  - La curva di indifferenza più alta raggiungibile è quella tangente la retta di bilancio
  - Nel punto di tangenza le pendenze sono uguali, quindi il ***SMS*** è uguale al **rapporto tra i prezzi**

## L’equilibrio del consumatore (come rappresentato nel grafico precedente) è un tipico risultato della c. d.“<u>teoria standard del consumatore</u>”

Questa si basa su una serie di ipotesi, fra le quali:

**a) Vincolo di bilancio** - si suppone semplicemente che la spesa complessiva per l'acquisto dei vari beni non possa essere superiore al reddito a disposizione.

Formalmente, indicando con $x_1 \dots x_i \dots x_N$ le quantità degli N beni che compongono un «paniere» di consumo e con $p_1 \dots p_i \dots p_N$ i rispettivi prezzi, dato un reddito pari a R il vincolo di bilancio può essere espresso nella forma $\Sigma\, p_i\, x_i \leq R$ (assumere R come «dato» è ammissibile nell’ambito di un'analisi di equilibrio parziale, mentre in modelli di equilibrio economico generale il consumatore possiede «dotazioni iniziali» di fattori produttivi i cui prezzi, e quindi il potenziale valore per il consumatore, sono determinati simultaneamente a tutti gli altri prezzi e quantità di equilibrio)

## b) Proprietà della struttura delle preferenze

La struttura delle preferenze non è altro che un ordinamento sugli elementi dell'insieme dei panieri ammissibili ottenuto attribuendo alla relazione binaria di preferenza x'R x", che significa x' è almeno altrettanto preferito di x“ (x’ e x” sono vettori di quantità di beni compresi nel “paniere”), avente le seguenti proprietà:

***1) individualismo*** (o «egoismo») delle preferenze, il che sta a significare che gli individui tengono conto solo della propria utilità (si noti che quest'ipotesi non è introdotta tanto per un giudizio etico sulla natura umana, quanto piuttosto per semplificare l'analisi, che risulterebbe molto più complessa se il livello di utilità di un individuo dipendesse dalle scelte compiute da altri individui);

***2) completezza***, per qualsiasi coppia di panieri x' e x" appartenenti ad un dato insieme delle possibilità di consumo deve valere una delle seguenti relazioni: o x' è almeno equivalente a x" (x'R x"), o x" è almeno equivalente a x' (x"R x'), oppure x' è equivalente o «indifferente» rispetto a x" (ovvero x'R x" e x"R x' e quindi x'J x"), tutto ciò implica che il consumatore sia sempre in grado di effettuare un confronto fra qualsiasi coppia di panieri (se si ha che x'R x" ma non x"R x' allora si dice che x' è preferito in senso forte a x", ovvero x'P x"). Poiché  x' è almeno equivalente a x' abbiamo x'R x‘ e quindi x'J x’ (riflessività);

***3) transitività***: se x‘ R x" e x“ R x'" allora x‘ R x"‘ (quindi se x‘ P x" e x“ P x'" allora x‘ P x"‘ e se x‘ J x" e x"J x'" allora x‘ J x"‘, ecc. per tutte le altre possibili combinazioni). Questa proprietà assicura in un certo senso la "razionalità" delle preferenze.

***4) continuità***: se x' J x" esiste sempre un paniere x’”J x' J x" tale che i suoi elementi siano in quantità min $| x'_i, x''_i | < x'''_i <$ max $| x'_i, x''_i |$

***5) non sazietà*** (o “monotonicità”): se per almeno un $x_i$ la quantità contenuta in x' è maggiore di quella contenuta in x" e tutte le altre sono non minori di quelle contenute in x", allora x'P x". Queste cinque ipotesi sono sufficienti ad assicurare l'esistenza di uno o più equilibri del consumatore, ovvero del/i paniere/i prescelto/i secondo la regola della massimizzazione del livello di utilità, mentre con l'aggiunta dell'ipotesi

**(6) di *convessità*** (se x'J x", qualsiasi paniere del tipo x"' = $\alpha$x' + (1-$\alpha$)x" con 0<$\alpha$<1 è preferito sia a x', sia a x", ovvero x"'P x' e x"'P x", il che implica che il consumatore rispetto ad ogni coppia di panieri fra cui è indifferente preferisce sempre una loro «combinazione lineare») con un vincolo di bilancio lineare, quale quello illustrato precedenza, si garantisce l’esistenza e <u>l‘unicità</u> dell’equilibrio, in corrispondenza di un paniere nel quale tutte le quantità $x_i$ sono strettamente positive.

# Oltre la teoria standard del consumatore: la teoria (soggettiva) dell'utilità attesa

Nella teoria "standard" si suppone implicitamente che il consumatore conosca con certezza il contenuto dei panieri sui quali avere delle preferenze/esercitare delle scelte.

Vi sono invece alcune scelte (sempre di carattere economico, quale ad es. il decidere se sottoscrivere o meno un contratto d'assicurazione) soggette ad incertezza circa il risultato finale conseguente ad esse. Parliamo quindi di *"scelte in condizioni di incertezza"* o, come sarebbe meglio dire, *"scelte in condizioni di rischio".*

Come osservò infatti F. H. Knight, *Risk, Uncertainty and Profit (1921,* p. 233):

*The practical difference between the two categories, risk and uncertainty, is that in the former the distribution of the outcome in a group of instances is known (**either through calculation a priori or from statistics of past experience**), while in the case of uncertainty this is not true, the reason being in general that it is impossible to form a group of instances, **because the situation dealt with is in a high degree unique**. […] The individual, as already observed, throws his estimate of the value of an opinion into the probability form of "a successes in b trials" (a/b being a proper fraction) and "feels" toward it as toward any other probability situation.*

Come possiamo allora rappresentare un tale genere di scelte?

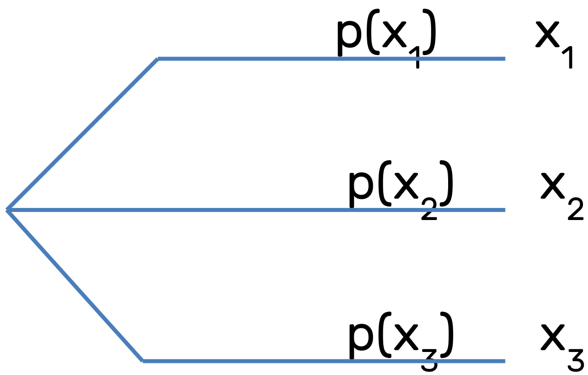
Innanzitutto dobbiamo ridefinire che cosa è oggetto di scelta. Non saranno più “panieri di beni”, come nella teoria “standard” del consumatore, bensì delle cosiddette **“lotterie”.**

Tali lotterie possono essere rappresentate a partire da **“distribuzioni di probabilità semplici”** consistenti in;

1) Un sottoinsieme <u>finito</u> di possibili “premi” x, detto “supporto” di p [supp. (p)];

2) Una distribuzione di probabilità p con $p(x) > 0 \quad \forall\, x \in \text{supp. }(p)$ e $\sum_{x \in \text{supp }(p)} p(x) = 1$

Notazioni




Oppure

$[x_1, x_2, x_3; p(x_1), p(x_2), p(x_3)]$

o altre equivalenti

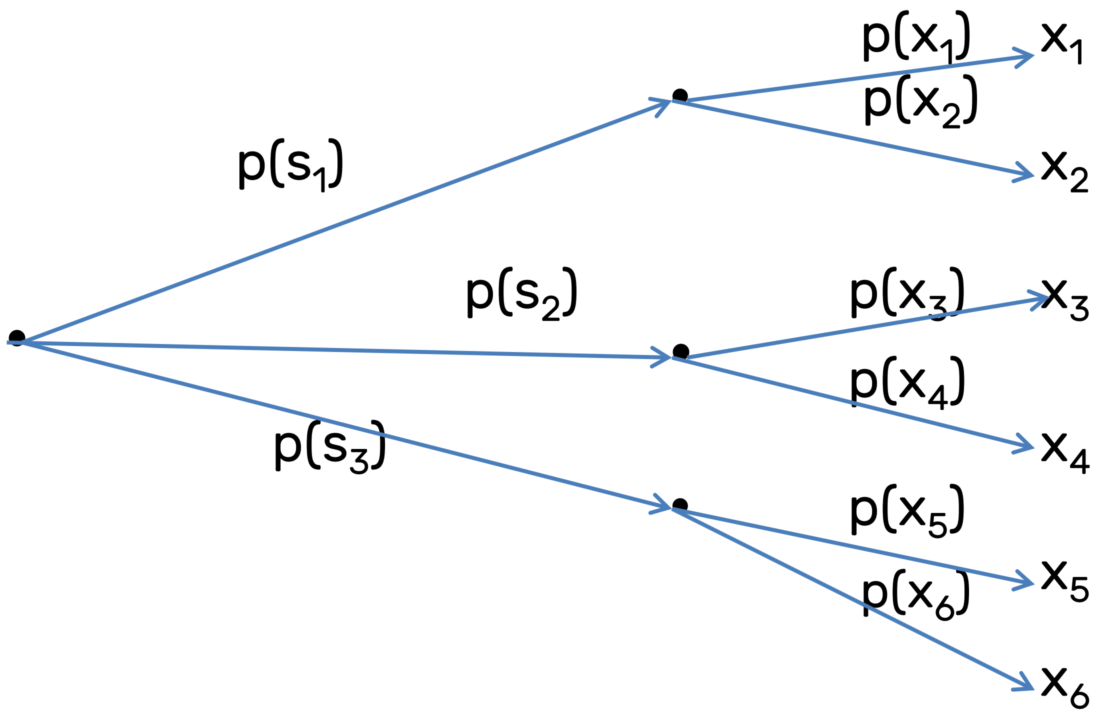
## Cosa rappresentano tali “lotterie”?

- Nell’ambito della teoria (soggettiva) dell’utilità attesa [T(S)UA] le lotterie sostituiscono i panieri di consumo della teoria standard del consumatore;
- Gli agenti devono scegliere rispetto a varabili aleatorie (solitamente rappresentate come “lotterie” (o “scommesse”);
- Gli $x_i$ sono i possibili “esiti” delle scelte/decisioni e sono comunemente indicati come “premi” in denaro (anche se potrebbero essere costituiti da altri oggetti, nel qual caso però dovremmo considerare funzioni di utilità più complesse);
- Valgono le usuali regole del calcolo delle probabilità. Nel caso di eventi <u>indipendenti</u> (come generalmente si suppone) avremo $p(x_1 \cup x_2) = p(x_1) + p(x_2)$ e $p(x_1 \cap x_2) = p(x_1) * p(x_2)$.

NB: A volte la probabilità p(x)riguarda possibili “stati del mondo” e ad ogni stato del mondo “s” è associato un esito “x”. In questo caso avremo

$$P(s)\,, \qquad s \longrightarrow x$$

Se però ad uno o più stati del mondo “s” è associata una distribuzione di probabilità su vari esiti possibili, allora abbiamo lotterie composte/complesse, rappresentabili graficamente come:




Poiché $p(s_1)+p(s_2)+p(s_3)=1$ ; $p(x_1)+p(x_2)=1$ ; $p(x_3)+p(x_4)=1$ ; $p(x_5)+p(x_6)=1$ si avrà anche $p(x_1,s_1) + p(x_2,s_1) + p(x_3,s_2) + p(x_4,s_2) + p(x_5,s_3) + p(x_6,s_3) = 1$

# Preferenze e funzione di utilità

Se il soggetto fosse indifferente fra Valore Atteso (VA = $\sum p \cdot x$) e giocare la "lotteria" non ci sarebbe problema (basterebbe infatti sostituire ad ogni lotteria il suo VA ed applicare la teoria standard del consumatore – in particolare l'assioma di non sazietà), <u>ma non è così</u>.

Come sappiamo dalla **funzione di utilità à la von Neumann-Morgenstern,** infatti, le probabilità vanno applicate non ai premi $X_i$ ma alle loro utilità $U(x_i)$

$$U\,[x_1 , x_2 , \dots , x_N ; p(x_1), p(x_2 ), ,,, , p(x_N)] = p(x_1)\cdot u(x_1)+p(x_2)\cdot u(x_2)+ \dots +p(x_N)\cdot u(x_N)$$

Tale che per ogni coppia di lotterie "x" e "y" si abbia

$U(x) > U(y)$ se $x \mathscr{P} y$ (x è preferito in senso forte a y)

e

$U(x) = U(y)$ se $x \mathscr{I} y$ (x è indifferente rispetto a y)

Come si è già visto nel caso della teoria standard del consumatore, per assicurare questo risultato è necessario assumere certe proprietà (o assiomi)

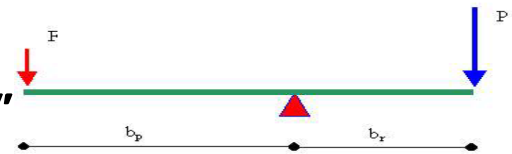
## Funzione di utilità à la von Neumann-Morgenstern: assiomi

Si mantengono dalla teoria standard i seguenti assiomi:

**1) Completezza** (definita allo stesso modo)

**2) Transitività** (definita allo stesso modo)

**3)** Si adotta poi il cosiddetto **assioma "archimedeo"**




Date tre "lotterie" tali che per un individuo sia x $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}$ z , esistono sempre due valori $\alpha$ e $\beta$ $[0 < \alpha,\beta < 1\ ;\ \alpha > \beta]$ tali che $\alpha x + (1 - \alpha)z\ \mathscr{P}\ y\ \mathscr{P}\ \beta x + (1 - \beta)z$ da cui discendono due importanti **corollari**:

3a) **Continuità**: esiste sempre un valore $\gamma$ $[0 < \gamma < 1\ ;\ \alpha > \gamma > \beta]$

tale che $\gamma x + (1 - \gamma)z\, \mathscr{I}\ y$ ;

3b) **Monotonicità**: se $\alpha > \beta$, allora $\alpha x + (1 - \alpha)z\ \mathscr{P}\ \beta x + (1- \beta)z$

**4) Sostituzione** [o **Indipendenza dalle alternative irrilevanti,** o **Principio della cosa certa**, ecc.]

Date due "lotterie" tali che per un individuo sia x $\mathscr{P}$ y ,allora per qualsiasi altra lotteria z si avrà $\alpha x + (1 - \alpha)z\ \mathscr{P}\ \alpha y + (1 - \alpha)z$ con $0 < \alpha < 1$ dove il termine $(1 - \alpha)z$ è, appunto, l'alternativa irrilevante perché comune ad entrambe le lotterie (composte).

**Corollario**: se x $\mathscr{I}$ y , allora $\alpha x + (1 - \alpha)z\ \mathscr{I}\ \alpha y + (1 - \alpha)z$ .

Si consideri ora una lotteria $[x_1, x_2, \dots, x_N; p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_N)]$ con
$x_1 > x_2 > \dots > x_N$

Per la proprietà della <u>continuità</u>, per ogni $x_i$ esiste sempre un valore $\gamma_i$ tale che $x_i \mathscr{I} [x_1, x_N; \gamma_i, (1-\gamma_i)]$ con $0 \le \gamma_i \le 1$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_N = 0$; $0 < \gamma_{i \neq 1,N} < 1$

Per l'assioma di <u>sostituzione</u> possiamo allora sostituire agli $x_i$ le lotterie $[x_1, x_N; \gamma_i, (1-\gamma_i)]$.

Otteniamo così il **principio di riduzione:**

Una lotteria $[x_1, x_2, \dots, x_N; p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_N)]$ con $x_1 > x_2 > \dots > x_N$ può sempre essere "ridotta" ad una lotteria

$[x_M, x_m; \sum \gamma_i \cdot p(x_i), \sum (1-\gamma_i) p(x_i)] = [x_M, x_m; \sum \gamma_i \cdot p(x_i), 1 - \sum \gamma_i \cdot p(x_i)]$

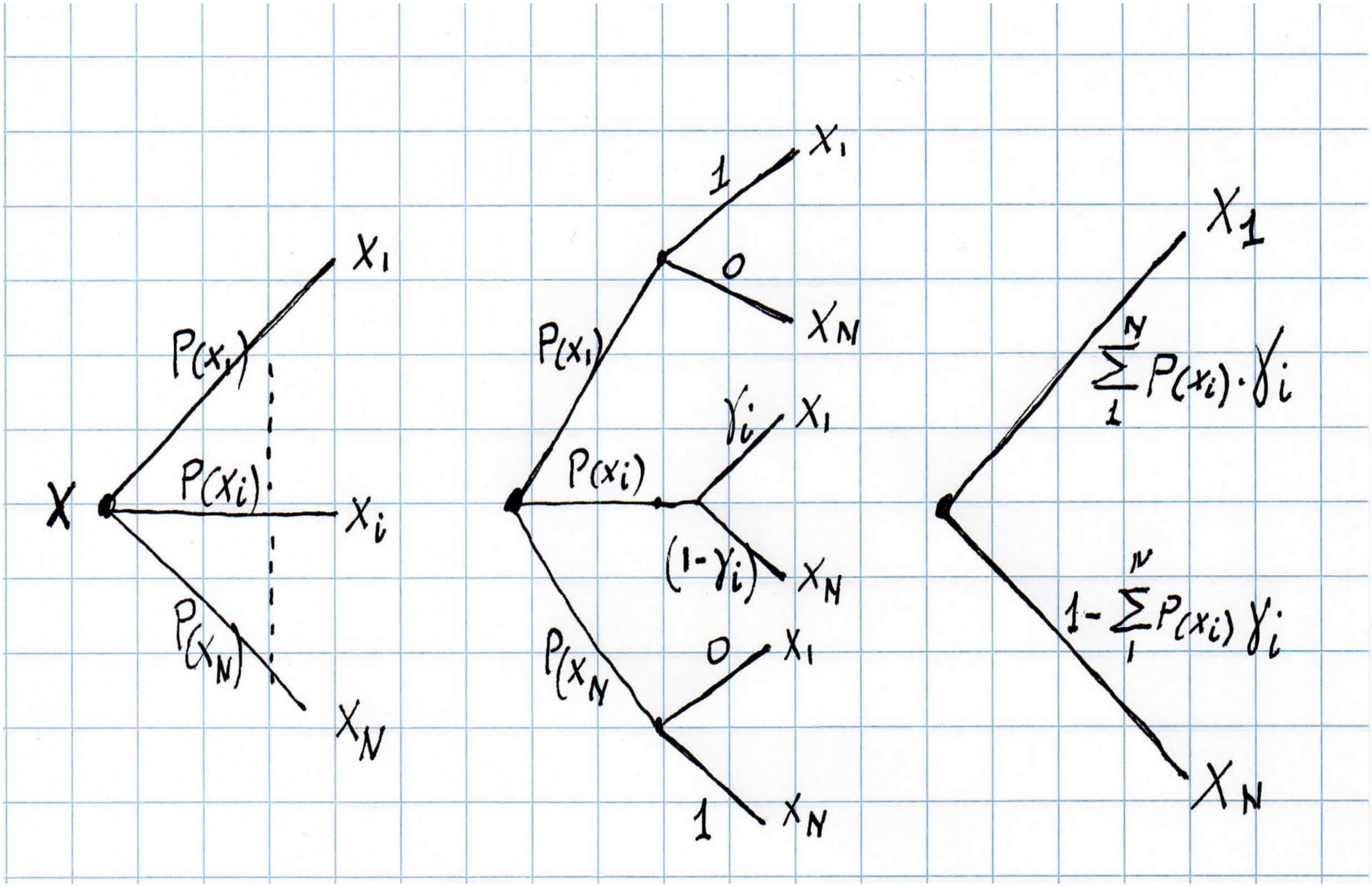
Con $X_M \ge x_1$ e $X_m \le x_N$ (questo perché volendo ridurre due o più lotterie con diversi $x_1$ e $x_N$ occorrerà scegliere il maggiore dei primi ed il minore dei secondi per renderle confrontabili).

Date più lotterie è quindi sempre possibile "ridurle" a lotterie del tipo:

$[x_M, x_m; \sum \gamma_i \cdot p(x_i), 1 - \sum \gamma_i \cdot p(x_i)]$ con $x_M = \max x_1$ e $x_m = \min x_N$

Così ridotte possono essere poste a confronto sfruttando la proprietà della **monotonicità:** $x \mathscr{P} y$ se $\sum \gamma_i \cdot p(x_i) > \sum \gamma_i \cdot p(y_i)]$ e $x \mathscr{I} y$ se $\sum \gamma_i \cdot p(x_i) = \sum \gamma_i \cdot p(y_i)]$

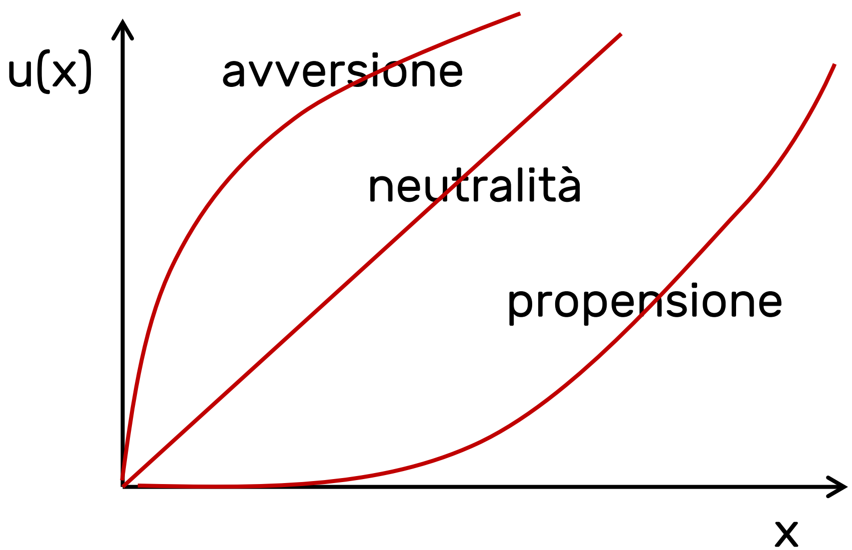
**Graficamente:**



NB: La funzione di utilità à la von Neumann – Morgenstern [VNM] **non** ammette qualsiasi trasformazione monotona crescente (come le funzioni di utilità nella teoria standard del consumatore), ma solo trasformazioni <u>affini</u> crescenti, ovvero se

$U_{(x)} = \sum_{x \in supp\,(p)} u(x) \cdot p(x)$ è una funzione di utilità VNM, allora $V_{(x)}$ è equivalente solo se $v(x) = a \cdot u(x) + b$

Se $U_{(x)} = \sum_i u(x_i) \cdot p(x_i)$ , che forma potrà assumere la $u(x_i)$ ?
Gli assiomi visti in precedenza riguardano la $U_{(x)}$ . Per quanto riguarda la $u(x_i)$ l'unico vincolo che abbiamo, per la **monotonicità**, è che essa deve essere strettamente crescente, ovvero $du/dx > 0$ (e, se si vuole, $u_{(x=0)} = 0$ ).
Ciò lascia aperte le seguenti tre possibilità (o combinazioni di esse):




al rischio

**Neutralità** (al rischio): se u(x) è lineare e crescente possiamo anche scriverla come $u(x) = a \cdot x$ (con $a > 0$) e quindi per una lotteria $[x_1 , x_N ; \pi , (1-\pi)]$ si ha

$$U_{[\cdot]} = \pi\, u(x_1) + (1-\pi)\, u(x_N) = \pi\, a\, x_1 + (1-\pi)\, a\, x_N = a\, \underbrace{[\pi\, x_1 + (1-\pi)\, x_N]}_{\text{Valore Atteso}}$$

NB: $u(x_1) = a\, x_1 = a\, x_N\, (x_1/x_N) = u(x_N)\, (x_1/x_N)$

Neutralità rispetto al rischio implica quindi un valore dell'utilità VNM proporzionale al Valore Atteso [VA] e quindi è "come se" l'individuo scegliesse sulla base del VA.
Se tutti gli individui fossero neutrali rispetto al rischio non avremmo bisogno di una teoria dell'utilità attesa, perché questa sarebbe proporzionale al VA di ogni lotteria, ma così NON è.

**Avversione al rischio**: la concavità della u(x) implica che $u(x_1) < u(x_N)\, (x_1/x_N)$ e quindi $U_{[\cdot]}$ non risulta più proporzionale al VA.
La proprietà della continuità ci assicura comunque che esiste sempre un equivalente certo [EC] tale che $x_1 > EC > x_N$ ed $EC < VA$

**Equivalente certo:**

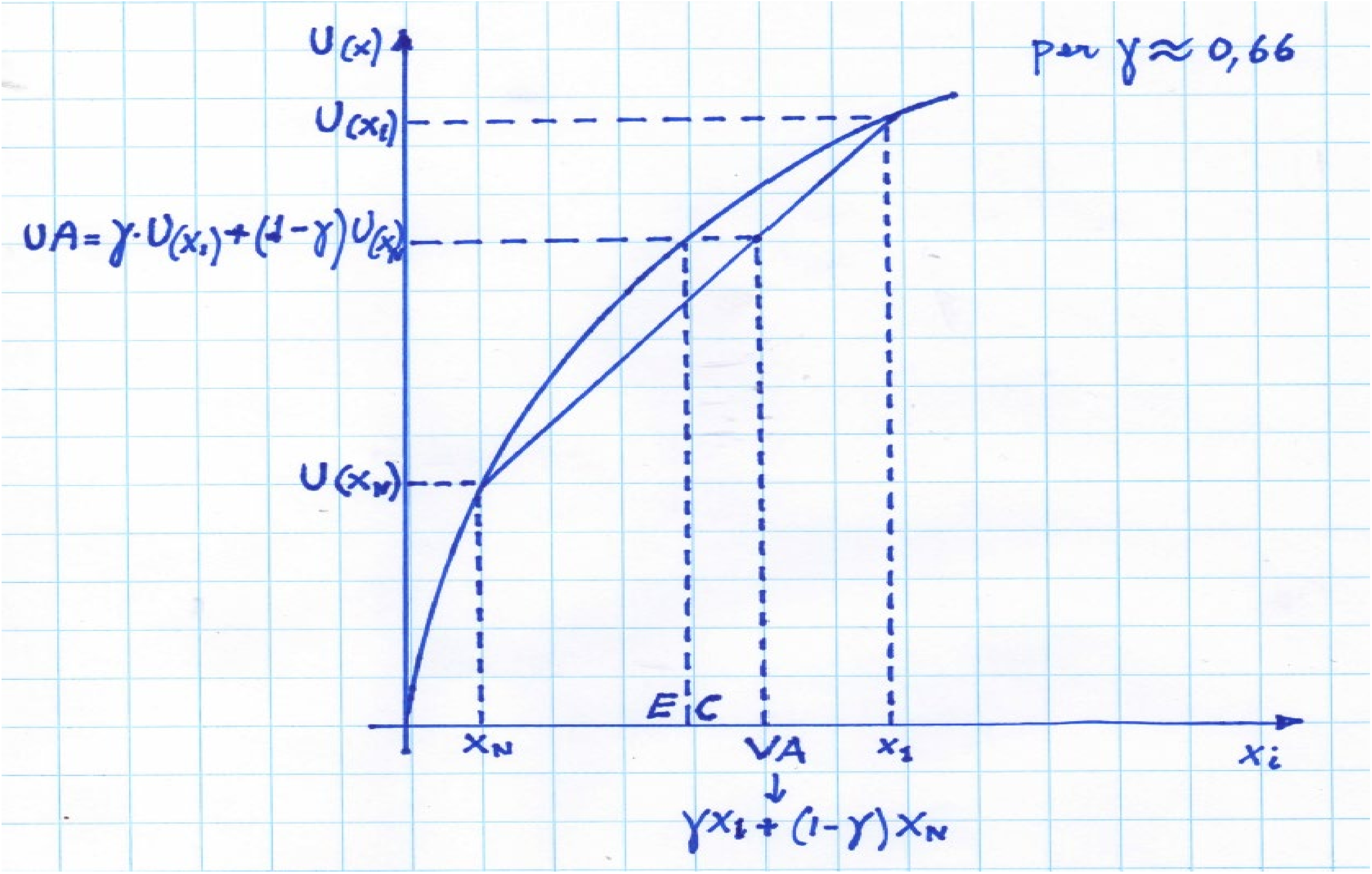
Quando u(x) è concava, ovvero quando l'individuo è avverso al rischio, esiste sempre un "equivalente certo" (EC) con la medesima "utilità attesa" (UA) del valore attuale (VA), tale che EC < VA.

In altri termini, l'individuo è indifferente fra EC con probabilità 1 e la lotteria $[x_1, x_N ; \gamma, (1-\gamma)]$ con $0 < \gamma < 1$.

La differenza VA – EC rappresenta una sorta di "premio per il rischio", ovvero un costo che occorre sostenere per far sì che l'individuo avverso al rischio accetti di assumersi il rischio della "lotteria" anziché preferire l'equivalente certo.

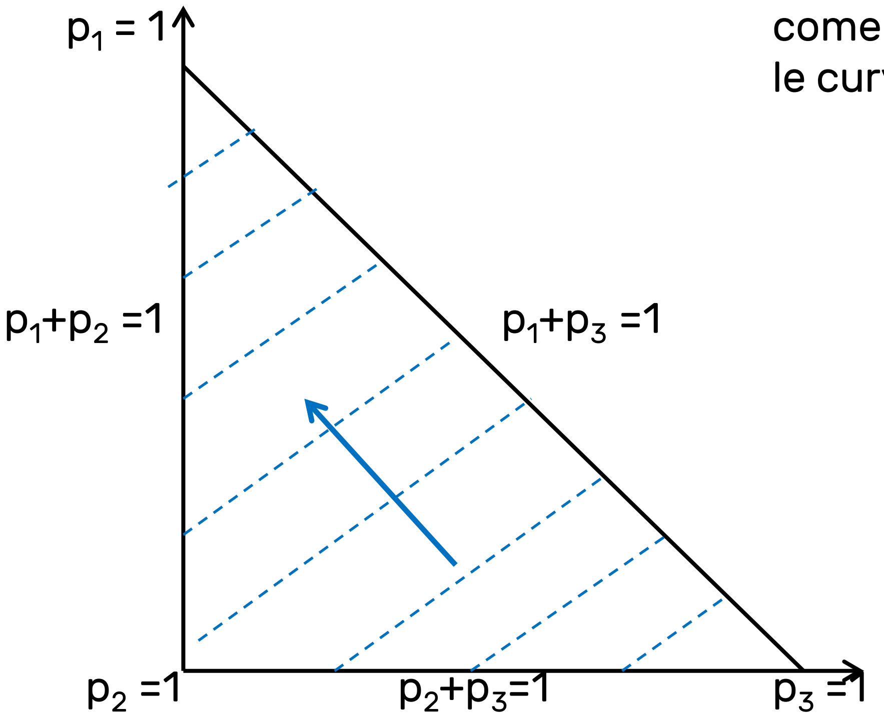
**Da qui un principio generale: <u>è efficiente (meno costoso) che si assuma il rischio un agente neutrale rispetto al rischio (con un premio pari a 0) piuttosto che un agente avverso al rischio</u>.**

# Graficamente:



**Triangolo di Machina**

Supponiamo di considerare lotterie con tre possibili esiti $x_1 > x_2 > x_3 > 0$ con probabilità, rispettivamente, $p_1$, $p_2$, $p_3$ con, al solito, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . Possiamo rappresentare tutte le possibili combinazioni di probabilità, **dati** $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ , per mezzo del cosiddetto "triangolo di Machina" (dal nome dell'autore).




come vedremo nella slide successiva le curve di indifferenza risultano in questo caso essere delle rette parallele

**Dimostrazione:**

Le curve di indifferenza nello spazio delle probabilità sono date da

$$P_1 U(x_1) + P_2 U(x_2) + P_3 U(x_3) = k \,; \quad \text{poiché } P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_1 U(x_1) = k - P_3 U(x_3) - \underbrace{(1 - P_1 - P_3)}_{P_2} U(x_2)$$

$$P_1 \left[ U(x_1) - U(x_2) \right] = -P_3 \left[ U(x_3) - U(x_2) \right] - U(x_2) + k$$

$$P_1 = \frac{P_3 \left[ U(x_2) - U(x_3) \right]}{U(x_1) - U(x_2)} + K \quad \text{con} \quad K = \frac{k - U(x_1)}{U(x_1) - U(x_2)}$$

NB: poiché $x_1$, $x_2$, e $x_3$ sono dati, $U(x_1)$, $U(x_2)$ e $U(x_3)$ sono costanti e quindi la relazione tra $P_1$ e $P_3$ risulta <u>lineare</u>