

Modello Principale – Agente (P-A)

Il problema “principale – agente” può essere considerato da due punti di vista (diversi ma complementari):

- 1) Un caso di “**moral hazard**” (poiché P non può monitorare convenientemente il comportamento di A, tale comportamento si configura come una “azione nascosta” e da qui la “tentazione” di adottare un comportamento sleale nei confronti di P);
- 2) Un potenziale problema di “**selezione avversa**” (se P offre lo stesso contratto a più agenti, vi è la possibilità che a tale contratto aderiscano i “peggiori” dal punto di vista di P).

NB: Nel seguito considereremo solo il caso 1) ovvero il modello con un solo A, la selezione avversa sarà illustrata per mezzo di un successivo modello (quello di Akerlof).

Iniziamo con un esempio numerico (adatto comunque ad illustrare le caratteristiche principali dl modello)

Si consideri un A avente come funzione di utilità attesa VNM della forma $U(w,a) = \sqrt{w} - a$ (che implica avversione al rischio) con utilità di riserva $U_r = 9$ ed $a = 0$ se impegno “scarso”, oppure $a = 5$ se impegno “elevato”.

Se A si impegna al meglio ($a = 5$) la sua attività per P vale 270€, se si impegna poco la medesima attività per P vale 70€.

Affinché A accetti il contratto e si impegni poco dovrebbe essere $\sqrt{w} \geq 9 \rightarrow w \geq 81$ €. Poiché tale attività varrebbe per P 70€, non sarà possibile alcun contratto basato su tali condizioni (P avrebbe una perdita di 11€).

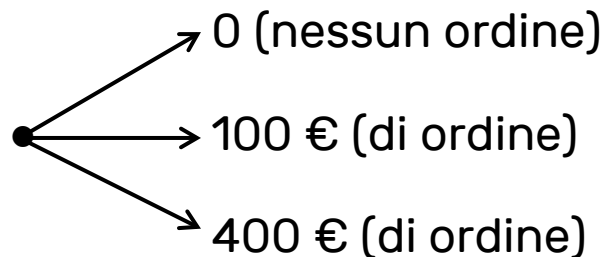
Affinché A sia invece incentivato ad impegnarsi molto, P dovrebbe offrirgli una remunerazione tale che $\sqrt{w} - 5 \geq 9 \rightarrow \sqrt{w} \geq 14 \rightarrow w \geq 196$ €. Poiché l'attività di A in questo caso per P vale 270€, l'accordo sarebbe conveniente per P

Ma in che modo realizzare tale ipotetico contratto? Offrire 196€ non risolverebbe il problema del comportamento sleale, e questo per il semplice fatto che l'impegno di A è una c.d. “azione nascosta” (che P non può controllare o verificare) e questo fa sì che A sia incentivato ad adottare un comportamento sleale nei confronti di P (moral hazard).

Nell'impossibilità di monitorare direttamente il livello di impegno di A occorre un contratto basato su clausole diverse (altrimenti, se P pagasse ad A 196€ e quest'ultimo si impegnasse poco, P avrebbe una perdita di $196 - 70 = 126$ € !)

Per identificare il contratto (sub)ottimale^(*) si osservi che i **risultati** conseguiti da A (a differenza del suo impegno) sono sempre osservabili, ma resta il problema se livello di impegno e risultati NON sono perfettamente correlati secondo una corrispondenza biunivoca (altrimenti l'osservazione dei risultati sarebbe equivalente all'osservazione del livello di impegno).

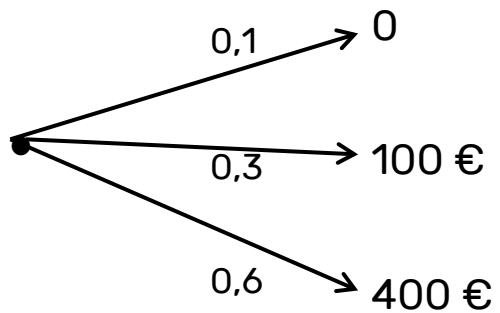
Supponiamo che A sia un venditore, e che il rapporto venditore-cliente sia rappresentabile sotto forma di una "lotteria" del tipo seguente:



L'impegno di A influisce sulle probabilità associate ai possibili esiti

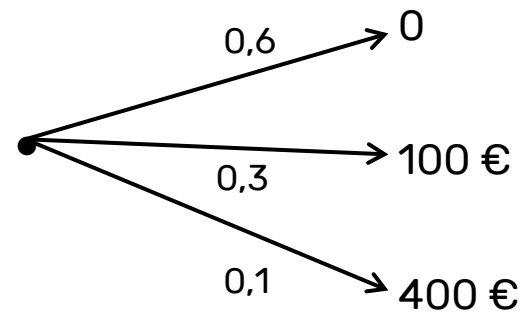
(*) Volendo minimizzare il costo, il rischio dovrebbe essere posto a carico di P (che si suppone sia neutrale rispetto al rischio). Ma poiché ciò non è possibile perché saremmo in presenza di un incentivo al comportamento sleale, occorrerà trasferire almeno parte del rischio ad A (al quale, essendo avverso al rischio, occorrerà riconoscere un "premio per il rischio")

Impegno **elevato**



VA = 270 €

Impegno **scarso**



VA = 70 €

Caso 1: A neutrale rispetto al rischio

Poiché questa non era l'ipotesi iniziale, dobbiamo supporre che in questo caso sia

$U(w,a) = w - a$ (anziché $U(w,a) = \sqrt{w} - a$) con $U_r = 81$ ed $a = 0$ se impegno "scarso", oppure $a = 25$ se impegno "elevato".

Per ottenere un impegno elevato si dovrebbero offrire ad A almeno 106€ [81 + 25] e questo converrebbe comunque a P, che ricaverebbe 270€ con un guadagno lordo di $270 - 106 = 164$ €.

Per ottenere invece un impegno scarso basterebbero 81€ [81 + 0] ma P avrebbe una perdita di $81 - 70 = 11$ €.

Resta ovviamente il problema già osservato in precedenza: come potrebbe P accertarsi del livello di impegno di A?

Si noti che il guadagno lordo di P ha tre possibili risultati:

$270 - 106 = 164$ se A si impegna "molto"

$70 - 81 = -11$ se A si impegna "poco"

$70 - 106 = -36$ se A si impegna "poco" ma è pagato per impegnarsi "molto"

Il problema potrebbe ammettere una soluzione se immaginiamo un contratto del tipo seguente:

- A paga al principale 164€ se non vende nulla;
- A paga al principale 64€ se vende per 100€;
- A riceve $400 - 164 = 236€$ se vende per 400€ .

A fronte di questa offerta A può prendere tre possibili decisioni:

- rifiutare il contratto, conseguendo il livello di utilità $U_r = 81$;
- accettare il contratto ed impegnarsi "**poco**", in tal caso la sua utilità attesa sarà $U_A = 0,1 \cdot 236 + 0,3 \cdot (-64) + 0,6 \cdot (-164) - 0 = -94$;
- accettare il contratto ed impegnarsi "**molto**", in tal caso la sua utilità attesa sarà $U_A = 0,1 \cdot (-164) + 0,3 \cdot (-64) + 0,6 \cdot 236 - 25 = 81$.

Per ogni remunerazione, in caso di vendita per 400€, pari a $(236 + \Delta)€$ A preferirebbe l'opzione c), che comporta un VA per A pari a 106€ ed un VA per P pari a 270€ .

Caso 2: A avverso al rischio

Ritorniamo alla funzione di utilità originale, ovvero $U(w,a) = \sqrt{w} - a$ con

$U_r = 9$ ed $a = 0$ per un impegno “scarso” ed $a = 5$ per un impegno “elevato”.

Abbiamo già visto che per soddisfare il vincolo della U_r , se A deve impegnarsi molto, occorre offrirgli un compenso almeno pari a 196€ (con un guadagno lordo per P pari a $270 - 196 = 74$ €).

Anche in questo caso occorre trasferire almeno parte del rischio ad A (nel caso precedente il rischio si trasferiva completamente ad A al quale non occorre pagare alcun premio per il rischio perché neutrale rispetto al rischio).

Poiché se A è avverso al rischio occorrerà pagargli un “premio per il rischio”, **il problema diviene un problema di minimo costo per P**, ovvero determinare il contratto avente il minimo costo (atteso) per P, ma tale da poter essere accettato da A e anche tale da far sì che A sia incentivato ad impegnarsi “molto”.

Come si può calcolare allora la remunerazione minima che occorre offrire ad A affinché questi accetti il contratto e si impegni al meglio?

Per questo ridefiniamo le variabili che rappresentano le remunerazioni per A come:

X_0^2 se A non ottiene alcun ordine;

X_1^2 se A ottiene un ordine di 100€;

X_2^2 se A ottiene un ordine di 400€.

Possibili decisioni da parte di A:

- a) rifiutare il contratto, conseguendo il livello di utilità di riserva $U_r = 81$;
- b) accettare il contratto ed impegnarsi **“poco”**, in tal caso la sua utilità attesa sarà $U_A = 0,1 \cdot X_2 + 0,3 \cdot X_1 + 0,6 \cdot X_0 - 0$;
- c) accettare il contratto ed impegnarsi **“molto”**, in tal caso la sua utilità attesa sarà $U_A = 0,1 \cdot X_0 + 0,3 \cdot X_1 + 0,6 \cdot X_2 - 5$.

Il migliore contratto possibile (dal punto di vista di P) deve soddisfare i seguenti requisiti:

-minimizzare $0,1 \cdot X_0^2 + 0,3 \cdot X_1^2 + 0,6 \cdot X_2^2$ (costo atteso da P necessario per incentivare A ad impegnarsi “molto”)

Sotto i vincoli:

- 1) $0,1 \cdot X_0 + 0,3 \cdot X_1 + 0,6 \cdot X_2 - 5 \geq 9$ (altrimenti A non accetterebbe il contratto);
- 2) $0,1 \cdot X_0 + 0,3 \cdot X_1 + 0,6 \cdot X_2 - 5 \geq 0,6 \cdot X_0 + 0,3 \cdot X_1 + 0,1 \cdot X_2 - 0$ (altrimenti A non sarebbe incentivato ad impegnarsi “molto”).

Il vincolo 1) è detto **vincolo di partecipazione** (o di razionalità individuale);
Il vincolo 2) è detto **vincolo di** (compatibilità dell') **incentivo**.

Risolvendo il problema di minimo di cui sopra, si ottiene:

$X_0 = 5,42857 \text{ €}$	$X_0^2 = 29,46 \text{ €}$	(per ordini = 0 €)
$X_1 = 14 \text{ €}$	$X_1^2 = 196 \text{ €}$	(per ordini = 100 €)
$X_2 = 15,42857$	$X_2^2 = 238,0407 \text{ €}$	(per ordini = 400 €)

Costo atteso per il principale:

$0,1 \cdot 29,46 + 0,3 \cdot 196 + 0,6 \cdot 238,0407 = 204,56 \text{ €}$, da cui il guadagno lordo atteso per P diviene $270 - 204,56 = 65,44 \text{ €}$. Se confrontiamo la soluzione in assenza di moral hazard ($270 - 196 = 74 \text{ €}$) troviamo un costo atteso aggiuntivo di $204,56 - 196 = 8,56 \text{ €}$.

Questa è una misura, se vogliamo, del costo che occorre sostenere per trasferire almeno parte del rischio al soggetto avverso al rischio (A).

Questo esempio può essere facilmente generalizzato al caso di un numero finito di azioni e di esiti.

Supponiamo che l'agente, prendendo in considerazione la possibilità di accettare il contratto, possa scegliere un'azione all'interno di un numero finito di azioni possibili $A \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. Le a_i possono essere interpretate come differenti livelli di impegno, ma non necessariamente.

La scelta dell'azione NON è osservata dal principale, che può invece osservare un segnale imperfettamente correlato all'azione prescelta dall'agente.

Principale (P) ed agente (A) possono quindi osservare un segnale s appartenente ad un insieme finito $S \equiv \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$.

Se A sceglie l'azione a_n , la probabilità che venga osservato il segnale s_m è pari a

π_{nm} , con $\sum_{m=1}^M \pi_{nm} = 1$ per ogni n .

A questo punto solitamente si introducono due ipotesi:

- 1) $\pi_{nm} > 0 \quad \forall_{n,m}$ e $U(w,a) = u(w) - d(a)$, ovvero una funzione di utilità VNM addittivamente separabile;
- 2) $u(w)$ è strettamente crescente, differenziabile con continuità e concava (A è avverso al rischio)

Il problema da risolvere, come abbiamo già visto nell'esempio numerico, è quello di determinare lo schema di incentivo ottimo dal punto di vista di P.

È un classico problema “a due stadi” (come nel caso di max profitto, dove prima occorre minimizzare i costi e poi, appunto, massimizzare la differenza ricavi - costi).

Def.: $x_m = u[w(s_m)]$ con $u(\cdot)$ continua e strettamente crescente, per cui possiamo indicare con v l'inversa di u , ovvero $v(z) = w$ se $u(w) = z$, per cui il salario pagato ad A qualora si osservi il segnale s_m , inteso come funzione della variabile x_m , risulta $w(s_m) = v(x_m)$.

Il salario atteso che deve essere corrisposto da P, in corrispondenza dell'azione

a_n intrapresa dall'agente è $\sum_{m=1}^M \pi_{nm} \cdot v(x_m)$.

Se il salario offerto ad A dipende dal segnale osservato (risultato conseguito) secondo la funzione $v(x_m)$ (e con $v(x_m) \geq v_{(0)}$) il problema può essere rappresentato come nella slide seguente

$$\min \sum_{m=1}^M \pi_{n,m} \cdot V(X_m)$$

sotto i vincoli

$$1) \sum_{m=1}^M \pi_{n,m} \cdot X_m - d(a_n) \geq U_n \quad (\text{vincolo di partecipazione})$$

$$2) \sum_{m=1}^M \pi_{n,m} \cdot X_m - d(a_n) \geq \sum_{m=1}^M \pi_{n',m} \cdot X_m - d(a_{n'})$$

$$\forall n' \neq n$$

vincolo di compatibilità degli incentivi

Definendo $C(a_n)$ il costo atteso per P di incentivare A a scegliere l'azione a_n , e con $B(a_n)$ il beneficio lordo atteso da P in conseguenza dell'azione a_n da parte di A , il 2° stadio del problema di ottimo diviene $\max B(a_n) - C(a_n)$

Alcuni risultati fondamentali

Se P potesse stipulare un contratto che prevedesse che A debba scegliere una determinata azione a_n il suo costo minimo sarebbe $C_0(a_n) = v[(U_r + d(a_n))]$.

Formalmente tale valore è la soluzione del problema:

$$\min \sum_{m=1}^M \pi_{n,m} v x_m \quad \text{sotto il vincolo} \quad \sum_{m=1}^M \pi_{n,m} x_m - d(a_n) \geq U_r$$

per cui, avendo eliminato alcuni vincoli, si ha $C_0(a_n) \leq C(a_n)$ e massimizzando $B(a_n) - C_0(a_n)$, dove $B \equiv$ guadagno lordo di P, avremmo una soluzione corrispondente al livello di impegno di “first best” (costo minimo per P).

Noi siamo però interessati al caso in cui P **non** è in grado di formulare un contratto vincolante che imponga ad A la scelta dell'azione/impegno di “first best” poiché tutto il problema nasce dal fatto che si tratta di una **“azione nascosta”**.

In questo caso si può dimostrare che:

Proposizione 1:

Se A è strettamente **avverso** al rischio, $C_0(a_n) < C(a_n)$ per ogni azione a_n che risulta più onerosa di qualche altra azione, tale cioè che $d(a_n) > \min_{a'} d(a')$

Se A è strettamente avverso al rischio, l'unico contratto efficiente sarebbe quello che prevedesse tutto il rischio trasferito a carico di P.

Ma così facendo A sceglierebbe l'azione meno onerosa per lui, ovvero il minimo impegno.

Proposizione 2:

Per A **neutrale** rispetto al rischio, $\max_a B(a) - C_0(a) = \max_a B(a) - C(a)$.

Se a^* è la soluzione di $\max_a B(a) - C_0(a)$, uno schema che incentiva A a scegliere tale azione è quello che prevede che P corrisponda ad A la somma $s_m - [B(a^*) - C_0(a^*)]$ col che P ottiene $B(a^*) - C_0(a^*)$ con certezza e tutto il rischio è trasferito a carico di A .