Lezione di Teoria delle Aste[*]

Economia della regolazione

Paolo Balduzzi[†]
Università di Milano-Bicocca

Ottobre, 2005

Contents

[*]La presente lezione è impostata su McAfee e McMillan (1987) e sugli appunti del Dr Ahmed Anwar (Università di Edimburgo), con l'aggiunta di qualche formalizzazione o semplificazione. Si suggerisce la (piacevole, peraltro) lettura del paper per una più completa presentazione del fenomeno.

[†]Università di Milano-Bicocca, Dipartimento di Economia politica, Edificio U6 (III piano), ufficio 337, piazza dell'Ateneo Nuovo, 1, 20126 Milano. Email: paolo.balduzzi@unimib.it; tel. +39.02.6448.6551. Orario di ricevimento: mercoledì dalle 14.30 alle 16.00.

1 Introduzione

Un'asta (*auction*) è una modalità di determinazione del prezzo di un bene. Nelle parole di McAfee e McMillan [1987]:

> "An auction is a market institution with an explicit set of rules determining resource allocation and prices on the basis of bids from the market participants" [p. 701]

Solitamente un'asta prevede un monopolista (il *seller*) e un numero più o meno ampio di possibili acquirenti (*buyers* o *bidders*)[1]. L'asta è un meccanismo che permette di sopperire ad un problema di asimmetria informativa: il venditore non conosce infatti quanto ogni singolo possibile acquirente valuti il bene in vendita. Se conoscesse queste valutazioni, potrebbe vendere il bene al *bidder* con valutazione più elevata. L'asta è dunque un meccanismo che permette di estrarre, perlomeno parzialmente, questa informazione.

Vedremo che due sono gli aspetti più rilevanti in questo campo. Il primo è quello della pareto-efficienza dell'asta: il bene in vendita dovrebbe andare all'individuo che lo valuta maggiormente. Il secondo è quello della massimizzazione del profitto del *seller* e degli strumenti che permettono tale operazione.

La letteratura teorica sulle aste è ormai molto vasta e tale vastità è il risultato dell'imponente utilizzo pratico di questo strumento. Gli esempi sono numerosissimi: opere d'arte, diritti di sfruttamento del sottosuolo, utilizzo di spettri elettromagnetici, acquisto di immobili, fornitura privata di beni pubblici. In questa lezione cercheremo di capire quali sono i meccanismi d'asta più diffusi, come funzionano e quali siano le ottime strategie di offerta dei *bidder*s (paragrafo 2); introdurremo poi il maggiore risultato di questa letteratura, cioè il *Revenue equivalence Theorem* (paragrafo 3); scopriremo il migliore meccanismo d'asta

[1] In realtà, spesso nel settore pubblico il governo o l'agenzia governativa che organizzano un'asta sono monopsonisti.

per il venditore (problema dell'*optimal auction design*: paragrafo 4); e rilasseremo infine alcune ipotesi semplificatrici del modello di base (paragrafo 5)[2].

Per una analisi sulla diffusione e il successo dei meccanismi d'asta nell'attività economica di tutti i giorni, rimandiamo ai lavori di Klemperer [2000, 2001] e McMillan [2002]. Quest'ultimo, in particolare, ci offre un'ottima esposizione della diffusione di aste negli anni recenti, soffermandosi specialmente sulle problematiche - pratiche più che teoriche - delle aste online e di quelle per le onde elettromagnetiche. Bajari e Hortaçsu [2005] invece testano la robustezza dei risultati teorici, che ora andremo a scoprire, disegnando opportuni esperimenti.

2 Il modello di base

2.1 Tipi di asta

I tipi di asta che prenderemo in considerazione sono i seguenti:

- Asta inglese (al rialzo, orale o aperta): probabilmente la più nota delle aste: il venditore annuncia un prezzo di partenza e i *bidder*s rilanciano fino a che nessuna nuova offerta viene superata. Il proponente dell'offerta si aggiudica il bene pagando un prezzo uguale all'ultima offerta sottoposta.

- Asta olandese (al ribasso): il venditore stabilisce un prezzo di partenza che viene abbassato fino a che un *bidder* annuncia la propria intenzione all'acquisto. Tale compratore acquista il bene pagando un prezzo uguale alla propria offerta.

- First-price sealed-bid (FPSB): ogni *bidder* sottopone la propria offerta in busta chiusa e senza comunicare con gli altri *bidder*s. Risulta vincitore il *bidder* con l'offerta più alta. Il prezzo di vendita è pari a questa offerta.

- Second-price sealed-bid (Vickrey[3]): ogni *bidder* sottopone la propria offerta in busta chiusa e senza comunicare con gli altri *bidder*s. Risulta vincitore il *bidder* con l'offerta più alta. Il prezzo di vendita è pari all'offerta immediatamente inferiore a quella vincente (in altre parole, la seconda maggiore offerta).

[2] Ci limiteremo a presentare i risultati e le intuizioni, senza soffermarci troppo a lungo sulla dimostrazione dei risultati. Gli studenti più curiosi e motivati possono, ovviamente, utilizzare le letture consigliate e l'appendice per approfondire i temi che più interessano.

[3] Vickrey studiò per primo questo tipo di asta nel suo paper del 1961 "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", Journal of Finance, 16 (1), pp. 8-37.

2.2 Ipotesi iniziali del modello di base

Come anticipato, ipotizziamo che ci sia un monopolista e un numero n di possibili compratori. Tali compratori:

(A1) sono neutrali al rischio;

(A2) sono simmetrici: le valutazioni personali dei compratori sono distribuite tutte rispetto ad una medesima distribuzione $F(v)$. Per semplicità ipotizziamo che $F(v)$ sia uniforme nell'intervallo $[0, 1]$ cosicchè $F(v) = v$;

(A3) hanno valutazioni personali v che sono indipendenti da quelli degli altri compratori (*indipendent private values*); ciò significa che ogni *bidder* assegna un valore soggettivo al bene in vendita e tale valore dipende esclusivamente dai propri gusti personali.

Rilasseremo in seguito ognuna di queste ipotesi, per capirne maggiormente la rilevanza. Altre ipotesi importanti e che manterremo sono le seguenti: ogni *bidder* i (con $i = 1, 2, ..., n$) conosce la propria valutazione v_i ma non quella di tutti gli altri; egli conosce però la distribuzione di probabilità di tali valutazioni, $F(v)$; per comodità, le valutazioni sono ordinate cosicchè:

$$v_1 > v_2 > ... > v_n;$$

i *bidders* conoscono inoltre perfettamente le regole dell'asta e il numero di partecipanti; il venditore assegna al bene un valore v_0 che, per comodità, assumiamo essere pari a 0.

2.3 Le strategie ottime

Un'asta è, di fatto, un gioco sequenziale dove il venditore agisce per primo, decidendo le regole di partecipazione, e i *bidder*s per secondi, annunciando le proprie offerte. Come tutti i giochi di questo tipo, il venditore ha un vantaggio strategico: egli può anticipare le strategie dei *bidder*s e decidere quindi le più profittevoli regole di partecipazione.

Poichè dunque tale gioco si risolve partendo dalla fine, cerchiamo per prima cosa di capire quali sono le strategie ottime da parte dei *bidders.* Va da sè che l'intenzione di ogni possibile compratore è quella di appropriarsi del bene se il prezzo di vendita è inferiore o uguale al valore assegnato allo stesso bene. Nel caso il prezzo sia inferiore, il *bidder* può godere di una cosiddetta rendita informativa (*informational rent*).

Asta inglese Cominciamo dall'asta più semplice. Ogni *bidder* resta nell'asta fino a che il prezzo di vendita rimane al di sotto della propria valutazione, dopodichè esce dall'asta. In questo modo, è evidente che risulterà vincitore il *bidder* con valutazione v_1 (la più elevata) ed il prezzo di vendita sarà pari a v_2 (o una quantità leggermente maggiore).

Second price sealed-bid In quest'asta la strategia ottima è quella di dichiarare onestamente la propria valutazione v_i. Anche in questo caso, il vincitore è il *bidder* con valutazione v_1, che paga un prezzo di vendita pari a v_2.

La dimostrazione è semplice e può essere affrontata in questa sede. Chiamiamo b_i l'offerta del *bidder* con valutazione v_i e definiamo b^* l'offerta più alta tra quelle degli altri *bidders*.

Supponiamo inizialmente che il *bidder* dichiari $b_i < v_i$. Abbiamo tre possibilità:

- $b^* < b_i < v_i$: l'offerta b_i è vincente ma lo stesso risultato si sarebbe ottenuto dichiarando $b_i = v_i$;
- $b_i < b^* < v_i$: l'offerta b_i è perdente ma il *bidder* i avrebbe potuto vincere e godere di *informational rent* (in altri termini, fare meglio) dichiarando $b_i = v_i$;
- $b_i < v_i < b^*$: l'offerta b_i è perdente ma lo stesso risultato si sarebbe ottenuto dichiarando $b_i = v_i$;

Rispetto a una dichiarazione $b_i < v_i$, essere onesti non avrebbe mai peggiorato la situazione e l'avrebbe anzi migliorata in un caso.

Supponiamo ora che il *bidder* dichiari $v_i < b_i$. Abbiamo tre possibilità:

- $b^* < v_i < b_i$: l'offerta b_i è vincente ma lo stesso risultato si sarebbe ottenuto dichiarando $b_i = v_i$;
- $v_i < b^* < b_i$: l'offerta b_i è vincente ma il *bidder* i ha una perdita pari a $b^* - v_i$! egli avrebbe potuto fare meglio dichiarando $b_i = v_i$ (nessuna perdita);
- $v_i < b_i < b^*$: l'offerta b_i è perdente ma lo stesso risultato si sarebbe ottenuto dichiarando $b_i = v_i$;

Rispetto a una dichiarazione $v_i < b_i$, essere onesti non avrebbe mai peggiorato la situazione e l'avrebbe anzi migliorata in un caso.

Ne segue che la strategia migliore da seguire è quella di dichiarare esattamente $b_i = v_i$.

First-price sealed-bid (e asta olandese) In entrambi i casi, ogni *bidder* cercherà di mascherare in qualche modo la propria valutazione, dato che il prezzo da pagare viene stabilito pari alla propria offerta. Poichè la strategia è la stessa in entrambe le aste, analizzeremo solo il caso dell'asta FPSB.

La strategia di offerta in questo caso fa leva sulle congetture di ogni *bidder* rispetto alle dichiarazione degli altri *bidder*s e non è più dunque indipendente da esse. Ipotizziamo che in equilibrio ogni *bidder* determini la propria offerta b attraverso una funzione di offerta $B(v)$. In altre parole, in equilibrio il *bidder* i sceglie la propria offerta b_i secondo tale funzione, che ipotizziamo crescente in v (a valutazione più elevata segue offerta più elevata) e derivabile. Definiamo l'utilità attesa del *bidder* i come:

$$E(U_i) = (v_i - B(v_i))v_i^{n-1}$$

Ciò significa che l'utilità attesa del *bidder* è una funzione lineare dell'*informational rent* (la differenza tra valutazione personale, v_i, e prezzo pagato, $B(v_i)$), pesata dalla probabilità di vittoria[4], v_i^{n-1}.

Otteniamo che[5]:

$$b_i = B(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$$

Equilibri e commento Una notazione sugli equilibri dei giochi. Nell'asta di Vickrey dichiarare la verità è una strategia dominante per il giocatore i. Ciò significa che *qualunque* strategia stiano seguendo gli altri giocatori, quella di i è una scelta ottima. Questo ragionamento vale ovviamente per ogni giocatore e dunque si dice che l'equilibrio nell'asta di Vicrey è un *equilibrio a stretegia dominante*. Anche nell'asta inglese esiste un equilibrio a stretegia dominante. Tale strategia consiste nel restare nell'asta finchè il prezzo di vendita non ha raggiunto la propria valutazione personale. Nell'asta olandese e in quella FPSB, il concetto di equilibrio utilizzato è invece quello di *Bayes-Nash* per giochi a informazione incompleta: ogni *bidder* sottopone un'offerta ottima, date le sue credenze (che sono corrette in equilibrio) sulle offerte ottime sottoposte da tutti gli altri giocatori. Dal punto di vista pratico, è lecito attendersi che gli individui sappiano più facilmente realizzare le proprie strategie dominanti rispetto a equilibri di Bayes-Nash. Il risultato teorico appare dunque

[4] All'espressione manca ovviamente un termine, cioè il valore della sconfitta (0), pesato dalla probabilità di perdere l'asta.

[5] Lasciamo la dimostrazione in appendice, con l'invito a leggerla in quanto non eccessivamente difficile (richiede solo una minima conoscenza di elementi di teoria dei giochi e di calcolo integrale).

più credibile nelle aste inglese e di Vickrey.

La Tabella 1 riassume i risultati di questo paragrafo.

Tabella 1: Aste a confronto

Tipo di asta	Pareto-efficienza	Informational rent
Inglese	Sì	$v_1 - v_2$
Vickrey	Sì	$v_1 - v_2$
Olandese e FPSB	Sì	$v_1 - \frac{n-1}{n}v_1 = \frac{1}{n}v_1$

Tutti i meccanismi d'asta analizzati sono efficienti. Il *bidder* con la valutazione più elevata v_1 ottiene sempre il bene (pareto efficienza). Egli gode inoltre sempre di una certa *informational rent*. Nel prossimo paragrafo, mostreremo che il valore di tale rendita è lo stesso in tutte e quattro le aste.

3 Il Revenue equivalence Theorem

Questo paragrafo risponde a una delle domande più interessanti in questo ambito di ricerca: quale meccanismo d'asta produce il prezzo di vendita atteso più alto? La risposta è fornita dal Revenue equivalence Theorem. Presentiamo prima il teorema e un breve commento, e di seguito una sua dimostrazione.

Revenue equivalence Theorem (RET) *In ogni meccanismo d'asta efficiente e che assegna al bidder con valutazione più bassa una rendita nulla, il venditore ottiene lo stesso prezzo atteso di vendita.*

Questo risultato stabilisce che le quattro aste da noi analizzate finora risultano equivalenti dal punto di vista del prezzo di vendita atteso. Ciò non significa certo che i prezzi di vendita realizzati siano identici. In particolare, in un'asta inglese o di Vicrey il prezzo di vendita sarà la seconda valutazione più elevata, mentre in un'asta olandese o FPSB sarà pari ad una certa funzione della valutazione più alta.

Rimandiamo all'appendice per una dimostrazione più generale del RET. Per ora, ci accontentiamo di una dimostrazione nel caso particolare di distribuzione uniforme delle valutazioni nell'intervallo $[0, 1]$.. Per fare questo, abbiamo innanzitutto bisogno di introdurre il concetto di *order statistic*. Definiamo il k-esimo *order statistic* di una distribuzione ordinata il k-esimo valore di tale distribuzione. Nel caso in esame, il k-esimo *order statistic* è la k-esima valutazione nella distribuzione in esame.

Noi siamo interessati nel valore atteso dei primi due *order statistics*. Per determinarli, abbiamo bisogno delle rispettive distribuzioni di probabilità. Ricordiamo che abbiamo già ordinato le valutazioni dei *bidders*:

$$v_1 > v_2 > ... > v_n$$

Chiamiamo dunque $G_1(v)$ e $G_2(v)$ rispettivamente le distribuzioni del primo e del secondo *order statistic*. $G_1(v)$ è la probabilità che tutte le valutazioni osservate siano inferiori a $v : \Pr(v_1 < v) = v^n$, quando il numero di valutazioni è n. La densità di probabilità della $G_1(v)$ è semplicemente $g_1(v) = G_1'(v) = nv^{n-1}$. Quindi il valore atteso di v_1 è:

$$\begin{aligned} E(v_1) &= \int_0^1 vg_1(v)dv = n\int_0^1 v^n dv \\ &= n\left[\frac{v^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

In maniera simile, è possibile determinare $E(v_2)$. $G_2(v)$ è la probabilità che almeno $n-1$ valutazioni siano inferiori a v. Quindi:

$$G_2(v) = nv^{n-1}(1-v) + v^n$$

e

$$g_2(v) = G_2'(v) = n(n-1)v^{n-2}(1-v)$$

Infine:

$$\begin{aligned} E(v_2) &= \int_0^1 vg_2(v)dv = n(n-1)\int_0^1 (v^{n-1} - v^n)dv \\ &= n(n-1)\left[\frac{v^n}{n} - \frac{v^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

Il prezzo pagato in un'asta inglese o di Vickrey è pari al valore atteso della seconda maggiore valutazione, $E(v_2)$:

$$\frac{n-1}{n+1},$$

mentre il prezzo pagato in un'asta olandese o FPSB è pari a una certa funzione della valutazione più elevata. In termini di valore atteso, abbiamo determinato nel paragrafo secondo che:

$$B(E(v_1)) = \frac{n-1}{n} E(v_1) = \frac{n-1}{n+1}$$

Come stabilito dal RET, dunque, il venditore ottiene lo stesso prezzo atteso di vendita, $\frac{n-1}{n+1}$.

Nel caso di una distribuzione uniforme delle valutazioni nell'intervallo più generico $[0, \bar{v}]$, il prezzo di vendita atteso è pari a:

$$\frac{n-1}{n+1} \bar{v},$$

dove n è il numero dei *bidder*s partecipanti e $\bar{v}$ è il valore massimo possibile nella della valutazione più elevata (nel caso precedente, $\bar{v} = 1$).

A questo punto, sorge spontanea la seconda delle maggiori domande in questo campo: cosa può fare il venditore per massimizzare il proprio profitto, dato il risultato stabilito dal RET? Il prossimo paragrafo fornirà la risposta.

4 L'optimal auction

Il venditore ha il vantaggio di conoscere le reazioni dei *bidder*s e può quindi sperare di modificare le regole dell'asta in modo da massimizzare il proprio profitto. Il risultato del RET, tuttavia, è che in tutte le quattro aste che abbiamo presentato ogni giocatore si aspetta di pagare lo stesso prezzo per il bene. Cosa può quindi fare il venditore per determinare un meccanismo di vendita ottimo?

Innanzitutto, possiamo semplificare la ricerca utilizzando il *Revelation Principle*. Per fare ciò introduciamo alcune utili definizioni.

Definizione 1: Meccanismo *Un meccanismo è un processo che raccoglie le offerte sottoposte dai bidders e le trasforma in una decisione riguardo il soggetto che si aggiudica il bene e il prezzo che è tenuto a pagare. Un meccanismo si dice diretto quando richiede che l'offerta sottoposta sia pari alla valutazione personale del singolo bidder.*

Tecnicamente, un meccanismo diretto $\Lambda : \{P, E\}$:

- richiede che ciascun *bidder i* sottometta come offerta la propria valutazione v_i;
- stabilisce che tale *bidder i* vinca l'asta con probabilità $P(v_i)$;
- fissa il prezzo di vendita con una funzione $J(v_i)$.

In questo modo, il surplus atteso di ogni *bidder* i, S_i, è pari a:

$$S_i = E(U_i) = v_i P(v_i) - J(v_i),$$

cioè alla differenza tra il valore ottenuto in caso di vittoria e il prezzo pagato.

Definizione 2: Incentive compatibility *Un bidder con valutazione v_i trova ottimale sottoporre un'offerta pari a v_i.*

Tecnicamente, un meccanismo diretto $\Lambda : \{P, E\}$ è detto "incentive compatible" (IC) se vale:

$$S_i = v_i P(v_i) - J(v_i) \geq v_i P(w_i) - J(w_i),\ \forall i, v_i, w_i$$

dove w_i è un'offerta alternativa sottomessa dal *bidder i* e diversa dalla sua valutazione v_i.

A questo punto siamo pronti per introdurre il *Revelation Principle*:

Revelation Principle *Per ogni meccanismo è possibile trovare un meccanismo diretto e "incentive compatible" che produca lo stesso risultato, vale a dire la stessa probabilità di vittoria $P(\bullet)$ e gli stessi pagamenti attesi $J(\bullet)$.*

Seguendo McAfee e McMillan [1987], possiamo vedere come le quattro aste che abbiamo studiato obbediscano a questo principio. L'asta inglese e quella di Vickrey hanno già in equilibrio una strategia dominante che permette proprio la rivelazione onesta della propria valutazione. Per quanto riguarda le aste olandese e FPSB, sappiamo che ogni *bidder* con valutazione v_i sottometterà un'offerta $B(v_i) \neq v_i$. Immaginiamo ora che il venditore chieda a tutti i *bidder*s di sottomettere un'offerta esattamente pari alla loro valutazione v_i e prometta al vincitore che pagherà un prezzo uguale a $B(v_i)$. Il risultato ottenuto è quello desiderato.

Una volta accettato questo principio, possiamo limitare la ricerca dell'ottimo meccanismo a uno che sia, appunto, diretto e "incentive compatible". Il risultato (di cui dimostreremo solo un caso particolare) è che il prezzo atteso di vendita può essere incrementato dal venditore semplicemente introducendo un prezzo di riserva, r, sotto il quale nessuna offerta è accettata.

Tale prezzo di riserva è determinato attraverso la seguente formula:

$$r = v_0 + \frac{1 - F(r)}{F'(r)}$$

Una dimostrazione generale è oltre gli scopi della presente lezione. Valga però il seguente caso particolare per fissare le idee.

Ipotizziamo che $n = 1$: all'asta partecipa un singolo *bidder*. Con l'introduzione di r, fintantoché $r < v_1$, il prezzo di riserva è anche il prezzo di vendita, non essendoci competizione alcuna. La condizione si realizza con probabilità $1 - F(r)$; quindi il profitto atteso del venditore è:

$$\pi(r) = r(1 - F(r)) + v_0 F(r),$$

cioè la somma, ponderata dalle rispettive probabilità di realizzazione, del prezzo incassato in caso di vendita, r, e del valore assegnato al bene dal venditore stesso, realizzato in caso di mancata vendita (v_0). Obiettivo del venditore è massimizzare il proprio profitto scegliendo r:

$$\max_r \pi(r) = r(1 - F(r)) + v_0 F(r),$$

con condizione di primo ordine:

$$\frac{\partial \pi(r)}{\partial r} = 1 - F(r) - rF'(r) + v_0 F'(r) = 0$$

Riarrangiando i termini otteniamo esattamente ciò che cerchiamo:

$$r = v_0 + \frac{1 - F(r)}{F'(r)}$$

Nel nostro caso, sappiamo che la $F(\cdot)$ è una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 1]$; dunque $F(r) = r$ e $F'(r) = 1$, da cui:

$$r = \frac{1}{2}$$

quando $v_0 = 0$. Da notare che il valore di r non dipende dal numero di partecipanti all'asta, n.

Un ultimo appunto sull'efficienza dell'asta ottima. L'introduzione del prezzo di riserva ha il vantaggio indubbio di massimizzare il profitto atteso del venditore senza ricorrere a ulteriori e più complicate regole (ad esempio: costo di entrata, ripetizioni, tempo limitato per i rilanci, ecc.). Tale scelta non è tuttavia priva di svantaggi. Quando infatti abbiamo che $v_0 < v_1 < r$, il bene non è venduto, anche se un criterio di pareto-efficienza richiederebbe il contrario. In altre parole, l'asta ottima può non essere efficiente.

5 Altri modelli

Abbandoniamo ora alcune ipotesi semplificatrici che abbiamo adottato nel modello di base.

5.1 *Bidder*s avversi al rischio

L'avversione al rischio non influenza i comportamenti nelle aste inglese e di Vickrey. Ci attendiamo però una differenza per quanto riguarda le aste FPDB e olandese.

L'avversione al rischio può essere introdotta come parametro che modifica la funzione di utilità attesa del *bidder* i:

$$E(U_i) = (v_i - B(v_i))^\alpha v_i^{n-1},$$

con $0 < \alpha \leq 1$[6]. La strategia ottima si determina analogamente al caso di neutralità al rischio. Si trova che:

$$B(v_i) = \frac{n-1}{n-(1-\alpha)} v_i$$

All'aumentare dell'avversione al rischio (α decresce), la funzione di offerta ottima prevede una proporzione sempre maggiore della propria valutazione: il giocatore avverso al rischio teme di perdere l'asta e quindi tende a sottomettere offerte più elevate che in assenza di rischio.

L'asta ottima è molto complicata da determinare e prevede, in alcuni casi, pagamenti e sussidi da e verso *bidders* perdenti. Per questo motivo, difficilmente in pratica si tiene conto di questo elemento.

Un ultimo risultato importante riguarda il numero dei *bidders*: con avversione al rischio assoluta costante o decrescente, il prezzo di vendita atteso è più alto quando i *bidders* non conoscono n. Questo risultato è utilizzato spesso nelle aste di enti pubblici, che non rendono accessibile l'informazione riguardo il numero dei partecipanti proprio per rendere l'asta più competitiva.

5.2 *Bidder*s asimmetrici

*Bidder*s asimmetrici significa che questi possono essere suddivisi in diverse tipologie; tecnicamente, si ipotizza che ogni tipologia di *bidder*s abbia valutazioni distribuite secondo una propria distribuzione di probabilità. Il rilassamento dell'ipotesi di simmetria non influenza

[6] L'uguaglianza corrisponde alla neutralità al rischio.

i comportamenti nelle aste inglese e di Vickrey: l'individuo con la valutazione maggiore vincerà ancora l'asta. Ci attendiamo però una differenza per quanto riguarda le aste FPDB e olandese.

Ipotizziamo due tipologie di *bidder*s, 1 e 2, con distribuzioni F_1 e F_2 e numerosità n_1 e n_2. Le funzioni ottime di offerta, $B_1(v)$ e $B_2(v)$ saranno generalmente diverse, in quanto un giocatore di tipo 1 si trova a competere con $n_1 - 1$ giocatori di tipo 1 e n_2 giocatori di tipo 2, mentre un giocatore di tipo 2 si trova a competere con $n_2 - 1$ giocatori di tipo 1 e n_1 giocatori di tipo 1. Quindi, mentre varrà ancora che:

$$v_a > v_b \rightarrow B_1(v_a) > B_1(v_b)$$

non sarà necessariamente vero che:

$$v_a > v_b \rightarrow B_1(v_a) > B_2(v_b)$$

L'efficienza delle aste olandese e FPSB non è dunque garantita.

L'esistenza di tipologie diverse di *bidders* ricorda un mercato dove il venditore monopolista può cercare di praticare discriminazione di secondo grado sul prezzo del bene. In questo caso, una delle due tipologie viene favorita rispetto all'altra. Nel caso delle aste con giocatori asimmetrici, distribuiti secondo due distribuzioni identiche ma con medie diverse, è profittevole favorire la tipologia con la media inferiore. L'intuizione è che in questo modo si forza la tipologia con valutazione maggiore a essere più aggressiva. Lo svantaggio è che l'esito potrebbe essere inefficiente in senso paretiano. Per esempio (McAfee e McMillan [1987]), molti governi spesso favoriscono fornitori nazionali a quelli stranieri: il rilancio di questi ultimi deve essere infatti superiore di una percentuale minima rispetto al prezzo dei primi perchè sia accettato. Tale scelta, evidentemente politica, è però efficiente solo nel caso in cui i costi di produzione delle imprese straniere siano inferiori, in quanto tale politica spinge le imprese che possono permetterselo ad offrire prezzi più elevati[7].

5.3 *Bidders* con valutazioni interdipendenti e aste a valore comune

In alcuni casi, il valore del bene in vendita potrebbe non essere noto nemmeno ai compratori. Tipici esempi sono quelli dell'assegnazione dei diritti per lo sfruttamento di miniere; oppure

[7] Per i contratti di fornitura, sarebbe meglio scrivere "più bassi"; ma il messaggio sembra comunque chiaro.

le aste per comprare i diritti di un libro. O infine - perchè no? - le aste per l'assegnazione dei diritti sulla Champions' League! se si potessero mettere insieme le informazioni di tutti i *bidders* (aggregazione dell'informazione), le singole offerte sarebbero rivedute e corrette. Per questo si dice che queste aste sono a valutazioni interdipendenti (o affiliate), di cui quelle a valore comune e quelle a valori indipendenti sono solo due casi estremi.

Abbiamo già analizzato le aste con valori indipendenti. Nelle aste a valore comune, il bene in vendita ha un valore oggettivo che i *bidder*s non conoscono perfettamente ma possono congetturare. Il noto problema di queste aste è il cosiddetto "winner's curse" (la maledizione del vincitore): scoprire di essere vincitori implica essere il giocatore che ha fornito un'offerta maggiore. Ma se le informazioni sul valore oggettivo del bene in vendita sono distribuite equamente, ciò significa che la valutazione del vincitore, proprio per il fatto di essere la più alta, risulta eccessiva! ed è infatti possibile trovare evidenze di "winner's curse" in molte aste di questo tipo.

Il risultato teorico più rilevante e generale, valido per tutte le aste a valutazioni interdipendenti, si deve a un paper di Milgrom e Weber[8]: il prezzo atteso di vendita più elevato si ottiene con un'asta inglese. Intuitivamente, il risultato è dovuto al fatto che, in quest'asta, ogni giocatore è costretto a rivelare la propria valutazione e dunque fornisce importanti segmenti di informazione. I restanti *bidders* possono dunque utilizzare queste informazioni per rivedere le proprie stime e dunque offerte, che saranno più vicine al valore reale del bene in vendita. Nelle altre aste, la paura del "winner's curse" porta probabilmente a scalare maggiormente le offerte, che dunque risultano inferiori. Lo stesso paper fornisce un ordinamento completo di profittabilità delle aste: l'asta di Vickrey domina le aste olandese e FPSB, che ottengono lo stesso prezzo atteso.

Un ultimo risultato è riportato nell'esercizio 3, che richiede un commento.

6 Appendice: Revenue equivalence Theorem e funzione di offerta in aste FPSB

Per queste due dimostrazioni, possiamo utlizzare la medesima impostazione. Tale impostazione sfrutta il concetto di meccanismo diretto "incentive compatible", definito nel paragrafo 4. Supponiamo che tale meccanismo esista e definiamo il valore atteso della

[8] "A theory of auctions and competitive bidding", Econometrica, 50, pp. 1089-1122.

rendita di un generico *bidder* la seguente funzione $S(v)$:

$$S(v) = vP(v) - J(v),$$

già incontrata nel testo. Ipotizziamo che un *bidder* riporti w invece che v quando invece tutti gli altri si comportano onestamente. Nel caso il *bidder* in questione stia massimizzando la propria rendita attesa, abbiamo:

$$\max_w S(v, w) = vP(w) - J(w)$$

da cui:

$$\frac{\partial S(v, w)}{\partial w} = vP'(w) - J'(w)$$

Ma la caratteristica di *incentive compatibility* del meccanismo impone proprio che tale condizione sia nulla (e quindi w ottima) solo quando $w = v$:

$$vP'(v) - J'(v) = 0$$

$$vP'(v) = J'(v)$$

Vogliamo ora trovare un'espressione per $S(v)$ che sia meglio utilizzabile e che non dipenda da $J(v)$. Integriamo i due lati dell'espressione precedente:

$$\int_{v_n}^{v} vP'(v)dv = \int_{v_n}^{v} J'(v)dv,$$

dove v_n è il valore minimo delle valutazioni. Utilizzando le tecniche di integrazione per parti per il lato sinistro, abbiamo che:

$$vP(v) - v_n P(v_n) - \int_{v_n}^{v} P(v)dv = J(v) - J(v_n)$$

Riarrangiando i termini:

$$S(v) = S(v_n) + \int_{v_n}^{v} P(v)dv$$

Questa espressione formalizza il RET: il valore atteso della rendita del *bidder* con valutazione v dipende solamente dalla funzione di distribuzione delle valutazioni (uguale in tutte le aste considerate) e dalla rendita attesa del *bidder* con valutazione più bassa (in tutte pari a 0). In particolare, tale valore atteso non dipende dalla regola di pagamento $J(v)$. Ricordando che la probabilità di vittoria nelle quattro aste è la probabilità che la propria valutazione sia la più alta, otteniamo finalmente:

$$S(v) = \int_0^v (F(v))^{n-1} \, dv,$$

6.1 Funzione di offerta in aste FPSB con distribuzione uniforme

Sappiamo che in un'asta FPSB, il valore atteso della rendita del bidder generico è pari a:

$$S(v) = (v - B(v)) (F(v))^{n-1},$$

cioè alla differenza tra valore assegnato al bene e offerta sottoposta nel caso di vittoria. Ma grazie alla discussione precedente, sappiamo anche che:

$$S(v) = \int_0^v (F(v))^{n-1} \, dv$$

Quindi per la proprietà transitiva:

$$(v - B(v)) (F(v))^{n-1} = \int_0^v (F(v))^{n-1} \, dv$$

Isolando $B(v)$ abbiamo che:

$$B(v) = v - \frac{\int_0^v (F(v))^{n-1} \, dv}{(F(v))^{n-1}}$$

e ricordando che, nel nostro caso, $F(v) = v$, otteniamo:

$$B(v) = \frac{n-1}{n} v$$

7 Esercizi

- Dimostrare che con avversione al rischio:

$$B(v_i) = \frac{n-1}{n-(1-\alpha)} v_i$$

Determinare inoltre il valore atteso del prezzo di vendita in questo caso. Commentare.

- Un'altra asta molto diffusa è chiamata *all-pay auction*: ogni *bidder* sottopone la propria offerta e, indipendendemente dalla vittoria o meno dell'asta, è tenuto a pagare un prezzo di partecipazione pari alla propria offerta. Il RET è ancora valido? Determinare la funzione ottima di offerta $B(v)$ e commentare i risultati.

- L'effetto positivo di rivelare informazioni porta anche a un risultato abbastanza sorprendente: il venditore stesso deve rendere pubblica tutta la propria informazione sul valore del bene in vendita. Commentare. Perchè questo è vero anche quando la valutazione del venditore è molto bassa?

References

[1] Bajari, P. e Hortaçsu, A. [2005]. **Are Structural Estimates of Auction Models reasonable? Evidence from Experimental Data**, *Journal of Political Economy*, 113 (4), pp. 703-741.

[2] Klemperer, P. [2000]. **Why Every Economist Should Learn Some Auction Theory**, mimeo.

[3] Klemperer, P. [2001]. **What really matters in auction design**, mimeo.

[4] McAfee, R. P. e McMillan, J. [1987]. **Auctions and Bidding**, *Journal of Economic Literature*, vol. XXV (June), pp. 699-738.

[5] McMillan, J. [2002]. *Come Bid!*, chapter from **"Reinventing the Bazaar. A natural history of markets"**, Norton, London.