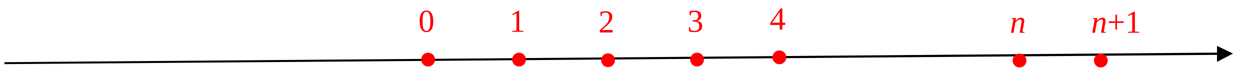
Lezione 1 – Insiemi numerici

1.1 Una domanda per iniziare.
Conosci il significato di questi termini e i rispettivi simboli matematici?
a. Numeri naturali
b. Numeri interi
c. Numeri razionali
d. Numeri irrazionali
e. Numeri reali
f. Valore assoluto di un numero reale

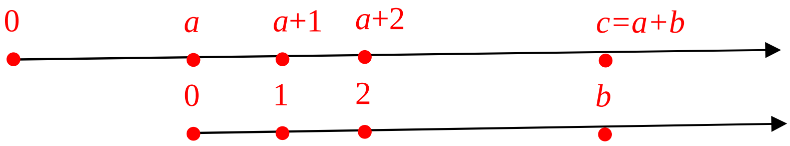
I numeri naturali e le operazioni in N

$N = \{0,1,2,3,4, \dots, n, n+1, \dots\}$ **Naturali**
$N_0 = \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, \dots\}$ **Naturali non nulli**



L'addizione in N

L'addizione è un'operazione che associa ad una coppia ordinata di numeri naturali un numero *c*
$\forall\, a, b \in N \rightarrow c \in N$



1.2 Quesito
Tenendo conto che il successivo di *n* è *n*+1 addizionare 2 a 5.

Risoluzione: $5 + 2 = (5 + 1) + 1 = 6 + 1 = 7$

Proprietà dell'addizione

Commutativa: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
A parole: per ogni coppia di valori a, b appartenenti all'insieme dei numeri naturali, la somma di *a* e *b* è uguale alla somma di *b* e *a*.
Esempio numerico: $2 + 3 = 3 + 2$

Associativa: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{N}\quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
A parole: per ogni terna di valori a, b, c appartenenti all'insieme dei numeri naturali, la somma di *a* e *b* addizionata a *c* è uguale alla somma di *a* addizionata alla somma di *b* e *c*.
Esempio numerico: $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$

Elemento neutro: $\exists\, n \in N \,/\, \forall a \in N\ a + n = a$; $n = 0$
A parole: nell'insieme dei numeri naturali esiste un numero, denominato zero e indicato con 0, tale che, per ogni valore *a* appartenente all'insieme dei numeri naturali, la somma di *a* e 0 è uguale ad *a*.
Esempio numerico: $3 + 0 = 3$

La moltiplicazione in N

La moltiplicazione è un'operazione che associa ad una coppia ordinata di numeri naturali un numero c ottenuto sommando b volte il numero a ossia
$$\forall\, a,b \in N \rightarrow a \cdot b = c = a + a + \cdots + a \qquad (b \text{ volte})$$

1.3 Quesito
Esegui l'operazione $17 \cdot 39 = \cdots$ usando le proprietà della moltiplicazione.

Proprietà della moltiplicazione

Commutativa: $\forall a, b \in N \quad a \cdot b = b \cdot a$
A parole: per ogni coppia di numeri naturali il prodotto di a per b è uguale al prodotto di b per a.
Esempio numerico: $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$.

Associativa: $\forall a, b, c \in N \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
A parole: per ogni terna di numeri naturali a, b, c il prodotto di a per b moltiplicato per c è equivalente al prodotto di b per c moltiplicato per a.
Esempio numerico: $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) \iff 6 \cdot 4 = 2 \cdot 12 \iff 24 = 24$

Distributiva del prodotto: $\forall a, b, c \in N \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
A parole: per ogni terna di numeri naturali a, b, c il prodotto di a per la somma di b e c è uguale alla prodotto di a per b sommato al prodotto di a per c.
Esempio numerico: $3 \cdot (2 + 4) = (3 \cdot 2) + (3 \cdot 4)$

Elemento neutro: $\exists\, n \in N : \forall a \in N \;\; n \cdot a = a\,; \quad n = 1$
A parole: esiste un numero naturale (il numero 1) tale che per ogni a appartenente all'insieme dei numeri naturali il prodotto di n per a è uguale ad a.
Esempio numerico: $9 \cdot 1 = 9$

Elemento assorbente: $\exists\, n \in N \;: \forall a \in N \quad a \cdot n = n \cdot a = 0; \;\; n = 0$
A parole: esiste un numero naturale (lo zero) tale che il prodotto di tale numero per qualsiasi numero naturale è uguale a 0.
Esempio numerico: $3 \cdot 0 = 0$

Legge di annullamento del prodotto: $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$
A parole: il prodotto di due numeri è nullo se e solo se almeno uno dei due è nullo.

Risoluzione del quesito 1.3
Esegui l'operazione $17 \cdot 39 = \cdots\cdots$ usando le proprietà della moltiplicazione.

$17 \cdot 39 = 17 \cdot (30 + 9)$	Associativa dell'addizione
$= (17 \cdot 30) + (17 \cdot 9)$	Distributiva della moltiplicazione
$= (17 \cdot 3) \cdot 10 + (17 \cdot (10 - 1))$	Associativa della moltiplicazione e dell'addizione
$= 510 + 170 - 17$	Distributiva della moltiplicazione
$= 680 - 17 = 663$	

Osservazioni sulle operazioni in *N*

- ***N* è chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione ossia
$$\forall (a, b) \in N \times N \quad \exists\, a + b, a \cdot b \in N$$
- ***N* non è chiuso** rispetto alle operazioni di sottrazione e divisione ossia
$$\exists (a, b) \in N \times N \text{ tale che } a - b, a : b \text{ non esistono}$$

1.4 Una domanda

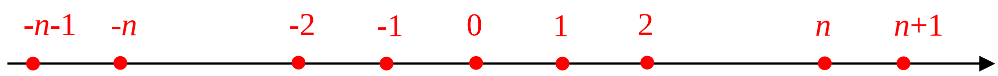
L'equazione $x+2=0$ ha soluzioni in N?

Risposta: No, non esiste un numero naturale che addizionato a 2 dà per somma 0.
Nell'insieme N non esistono infatti coppie di numeri opposti cioè coppie di numeri la cui somma sia 0. L'insieme N non è chiuso rispetto alla sottrazione, l'operazione inversa dell'addizione, non è cioè sempre possibile eseguire la sottrazione tra due qualsiasi numeri naturali: $3-5=-2 \notin N$

Osservazione Per rendere sempre possibile la sottrazione è necessario un insieme numerico ampliato: l'insieme dei numeri interi Z.

I numeri interi

$Z_- = \{-1,-2,-3,-4,\dots,-n,-(n+1),\dots\}$ **Interi negativi**
$Z = N \cup Z_- = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots \pm n,\pm(n+1),\dots\}$ **Interi o Interi relativi**
$Z_0 = \{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots \pm n,\pm(n+1),\dots\}$ **Interi non nulli**



In Z è sempre possibile eseguire oltre all'addizione e alla moltiplicazione anche la sottrazione infatti:
dato $a-b=c$ se $a<b$ allora $c<0$ e $c \in Z$
Esempio numerico: $4-10=0-6=-6 \in Z$

1.5 Una domanda

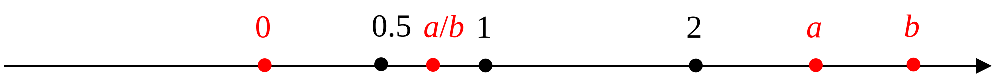
L'equazione $2x=1$ ha soluzioni in N?

Risposta: No, non esiste un numero naturale che raddoppiato fa 1.
Nell'insieme N non esistono infatti coppie di numeri reciproci cioè coppie di numeri il cui prodotto sia 1. L'insieme N non è chiuso rispetto alla divisione, l'operazione inversa della moltiplicazione, non è cioè sempre possibile eseguire la divisione tra due qualsiasi numeri naturali: $5:2=2{,}5 \notin N$

Osservazione. Per rendere sempre possibile la divisione è necessario un insieme numerico ampliato: l'insieme dei numeri razionali Q.

I numeri razionali

$Q = \left\{\frac{a}{b}\middle| a \in Z, b \in Z_0\right\}$ **Razionali**
$Q_0 = \left\{\frac{a}{b}\middle| a, b \in Z_0\right\}$ **Razionali non negativi**



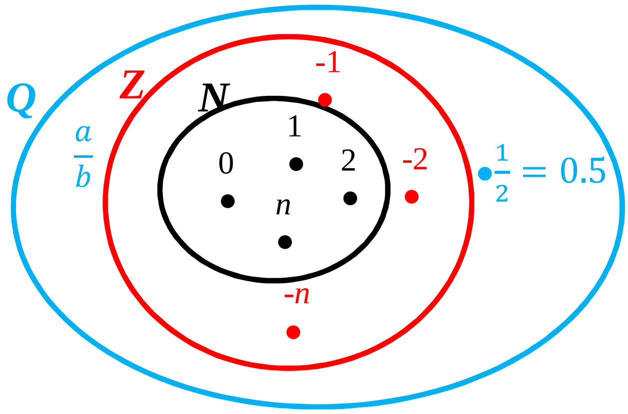
Proprietà degli insiemi *N*, *Z*, *Q*

N*, *Z sono insiemi ***discreti*** ossia

$\forall a, b \in N$ o Z con $a < b$ esiste un numero finito di $c \in N$ o Z tali che $a \le c \le b$

Q è un insieme ***denso*** ossia

$\forall a, b \in Q$ con $a < b$ esiste un numero infinito di $c \in Q$ tali che $a \le c \le b$



$N \subset Z \subset Q$

Osservazione: Per la scrittura dei numeri positivi non si utilizza il segno "+" . Si scrive cioè 2 e non $+2$, $\frac{2}{3}$ e non $+\frac{2}{3}$. Per la scrittura dei numeri negativi, opposti del corrispondente numero positivo, si utilizza il segno meno.

1.6 Un quesito

Calcola la l'espressione $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{10}\right)$

Le operazioni in *Q*:

L'insieme ***Q*** è chiuso oltre che rispetto all'addizione, alla moltiplicazione, alla sottrazione e alla divisione che sono quindi operazioni interne a ***Q*** ossia

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Rappresentazione decimale di numeri razionali:

$$0.13 = 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{10} + \frac{3}{100} = \frac{10}{100} + \frac{3}{100} = \frac{13}{100}$$

Soluzione del quesito

$\frac{5}{2}\left(\frac{7}{5} + \frac{2}{10}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{14+2}{10}\right) = \frac{5}{2}\frac{16}{10} = \frac{5}{2}\frac{8}{5} = 4$ oppure, usando la proprietà distributiva,

$\frac{5}{2}\left(\frac{7}{5} + \frac{2}{10}\right) = \frac{5}{2}\frac{7}{5} + \frac{5}{2}\frac{1}{5} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

Altri quesiti:

Le tre forme dei numeri razionali: frazione, numero decimale e percentuale.

1.7 Quesiti per riflettere

a. Numeri decimali e notazione posizionale

In ogni coppia di numeri, inserisci al posto dei puntini il simbolo giusto: < oppure > oppure =

Per esempio: 2 .<. 5 13 .>. 9 e così via.

4,2 . . . 5,17 5,43 . . . 4,2 3,26. . . 3,28

3,4 . . . 3,39 3,4. . . 3,40 3,38 . . . 3,6

b. Le tre rappresentazioni dei numeri razionali

Ogni numero razionale può essere rappresentato in tre diversi modi equivalenti: come frazione, come numero decimale e come percentuale. Ad esempio: $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$.
Tenendo conto di ciò completa la seguente tabella.

Numeri frazionari	Numeri decimali	Percentuali
		36 %
$\frac{3}{5}$	0.6	60 %
	0,75	

Risoluzione dei quesiti 1.7

L'operazione di potenza nell'insieme dei numeri naturali.

La potenza è un'operazione che associa ad una coppia ordinata di numeri naturali a e b un numero c ottenuto moltiplicando b volte il numero a ossia
$\forall\, a, b \in N \rightarrow a^b = c = a \cdot a \cdot \ldots a \quad (b \text{ volte})$
Il numero a è detto base, il numero b esponente

La potenza è un'operazione che ritroviamo, in forma generalizzata, anche per gli insiemi numerici Z e Q.

Potenza ad esponente relativo

Se l'esponente b è un numero relativo, $b = -n \;\; con \; (n \in N)$ allora si pone $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Potenza ad esponente razionale

Se l'esponente b è un numero razionale, $b = \frac{n}{m} \; e \; a > 0$ e allora si pone $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

1.7 Un quesito
Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere.

a. $4^{x+2} = 2^{2x+4}$ b. $a^{-2} = (\frac{1}{a})^2$ c. $(\sqrt[3]{a^2})^2 = a^{\frac{4}{3}}$

Proprietà formali delle potenze

$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b$ infatti $a^b \cdot c^b = a \cdot a \dots a \cdot a \;\cdot\; c \cdot c \dots . c \cdot c = (a \cdot c) \dots \dots (a \cdot c) = (a \cdot c)^b$

$\frac{a^b}{c^b} = \left(\frac{a}{c}\right)^b$ infatti $\frac{a \cdot a \cdot a \cdots \cdots a}{c \cdot c \cdot c \cdots \cdots c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdots \cdots \frac{a}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^b$

$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ infatti $(a^b)^c = (a^b)(a^b) \dots (a^b) = a \cdot a \dots . a \cdot a$ ($b \cdot c$ volte)

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ infatti $a^b \cdot a^c = a \cdot a \dots a \cdot a$ ($b + c$ volte)

$a^b : a^c = a^{b-c}$

Tali proprietà giustificano le seguenti definizioni:

$a^0 = 1$ infatti $a^b : a^b = a^{b-b} = a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Esempio numerico 1.8

$(2^2)^3 = 2^6$

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

$2^3 \cdot 3^3 = 6^3$

$2^0 = 1$

…

Risoluzione del quesito 1.7

$4^{x+2} = (2^2)^{x+2} = 2^{2x+4}$ l’eguaglianza è vera.

….

…

Altri quesiti:

Semplifica le seguenti espressioni:

$((5^2)^3 \cdot 5^4) : (5^5 \cdot 5^2)$

1.8 Due quesiti
Qual è il massimo comun divisore di 12 e 8?

Qual è il minimo comune multiplo di 5, 10 e 3?

Massimo comun divisore (MCD) associa ad una coppia ordinata di numeri naturali un numero *c* il maggiore dei divisori comuni

Minimo comun multiplo (mcm) associa ad una coppia ordinata di numeri naturali un numero *c* il minore dei multipli comuni

Esempio numerico 1.6

$\text{MCD}(12,8) = 4$

Divisori di 12: $1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 12$

Divisori di 8: $1, 2, \mathbf{4}, 8$

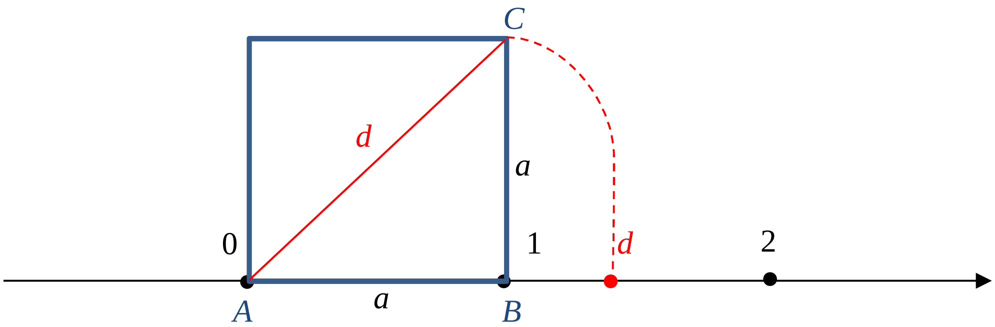
$\text{mcm}(5,10,3) = 30$

1.9 Un quesito

L'equazione $x^2 = 2$ ha soluzioni in Q?

Risposta: No, non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2.

L'assenza di soluzioni in Q dell'equazione $x^2 = 2$ è riconducibile al fatto che la diagonale di un quadrato di lato $a = 1$ non è esprimibile con un numero razionale.



Infatti applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC si ottiene l'uguaglianza $d^2 = 2$ che non è verificata da nessun numero razionale.
Riportando la diagonale d sull'asse reale si determina un punto al quale non corrisponde alcun valore razionale quindi la corrispondenza

punti retta $\leftrightarrow$ insieme Q

non è biunivoca e esistono punti della retta "liberi".

Osservazione. Anche in questo caso si può procedere con un ampliamento numerico passando dall'insieme dei numeri razionali Q a quello dei numeri reali R che oltre ai razionali comprendono anche numeri non razionali.

I numeri reali

L'insieme dei numeri reali è un un'estensione dell'insieme dei numeri razionali nel quale è possibile risolvere qualunque equazione del tipo $x^n = a, a \geq 0$.
Si definisce così:
un numero reale x è un qualunque allineamento finito o infinito di cifre decimali del tipo

$$x = \pm p. a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad \text{con} \quad p, a_1, a_2, \dots a_n \in N$$

Poiché se le cifre di un numero reale x sono infinite non è possibile rappresentarlo completamente nei calcoli si usa una sua rappresentazione simbolica oppure una sua approssimazione:

$$x \cong p \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} \dots a_n \cdot 10^{-n}$$

I numeri reali che non sono razionali si dicono **Numeri irrazionali:**

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$$

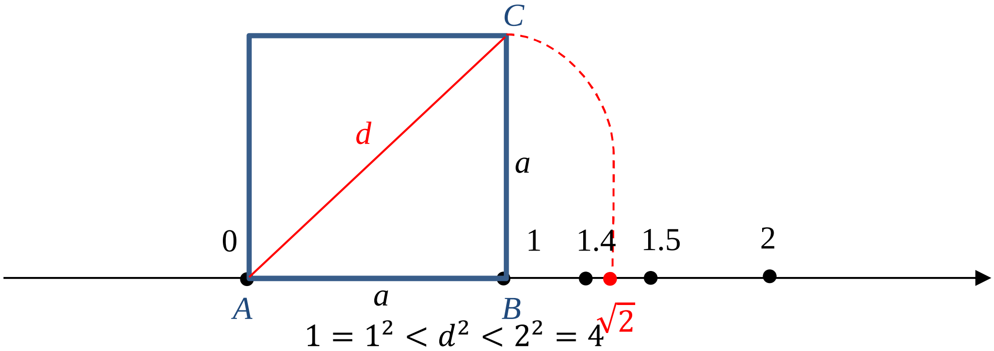
Esempio numerico 1.9

$3 = \sqrt{9} \rightarrow 3^2$

$-3 = -\sqrt{9} \rightarrow (-3)^2 = 9$

Applicazione
Si parte osservando che

$$1 < d < 2$$



$$1 = 1^2 < d^2 < 2^2 = 4$$
$$1.96 = 1.4^2 < d^2 < 1.5^2 = 2.25$$
$$1.988 = 1.41^2 < d^2 < 1.42^2 = 2.0164$$
$$\ldots\ldots.$$
$$\downarrow$$
$$d = \sqrt{2} \cong 1.414213562 \ldots\ldots. \in R$$

Altri quesiti.
È vera o falsa l'uguaglianza $\sqrt{a^2} = a$
È vera o falsa l'uguaglianza $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
La somma di un numero razionale e di un numero irrazionale è un numero razionale o irrazionale?
Quanti sono i valori reali che soddisfano l'uguaglianza $d^2 = 2$?
Esiste un valore reale *x* per cui $x^2 = -1$?

Proprietà di *R*

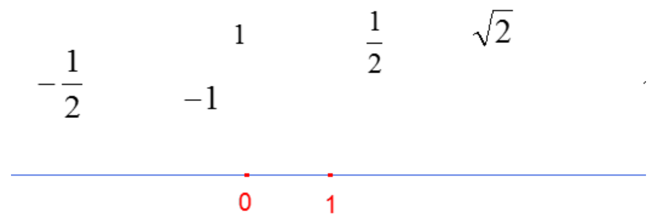
R è ***denso*** come Q e inoltre ha la ***potenza del continuo*** ossia è **biunivoca** la corrispondenza
punti retta $\quad \leftrightarrow \quad R = Q \cup \{numeri\ irrazionali\}$
R è ordinato ossia esistono delle relazioni di ordine totale $(\leq, <)$ per cui
dati due numeri reali si verifica sempre solo uno dei seguenti casi:
$$a < b \ , \qquad b < a \ , \qquad a = b$$
proprietà di tricotomia

Proprietà della relazione di $\leq$ e < nei numeri reali
Riflessiva: $\forall a \in R \wedge a \leq a$ (vale solo per $\leq$)
A parole: per ogni valore a appartenente all'insieme dei numeri naturali,
a è minore o uguale di se stesso
Esempio numerico: $3 \leq 3$
Transitiva: $\forall a, b, c \in R \wedge a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (vale anche per $<$)
A parole: per ogni terna di valori a, b, c appartenenti all'insieme dei numeri naturali,
se a è minore o uguale di b e b è minore di c **allora** a è minore di c.
Esempio numerico: $3 \leq 5 \ \wedge 5 \leq 8 \ \Rightarrow 3 \leq 8$
Antisimmetrica: $\forall a, b \in N \wedge a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ (vale solo per $\leq$)
A parole: per ogni coppia di valori a, b appartenenti all'insieme dei numeri naturali,
se a è minore o uguale a b e b è minore o uguale a a **allora** a è uguale a b.

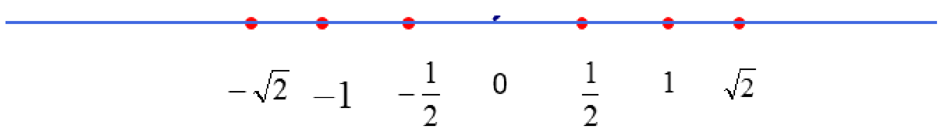
I numeri reali e la retta.

Corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e i punti della retta.
Ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale.

I



II



Valore assoluto (o modulo) di un numero reale

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$$

Per valore assoluto di un numero reale si intende il numero stesso se esso è non negativo, il suo opposto se esso è negativo. Quindi un numero e il suo opposto hanno lo stesso valore assoluto.
Ad esempio**:** $|3| = 3$; $|-4| = 4$; $|-2| = |2|$.

Da un punto di vista geometrico l'eguaglianza $|-a| = |a|$ indica che il valore assoluto può essere definito come la distanza dall'origine di un punto dell'asse per cui le distanze dall'origine di un punto e del suo simmetrico rispetto all'origine sono uguali.