Lezione 3

Calcolo letterale - Equazioni e disequazioni di I° grado

3.1 Un quesito per iniziare

Per calcolare il montante, cioè la somma del capitale iniziale e degli interessi maturati, si moltiplica il capitale iniziale per la somma di 1 e dell'interesse percentuale elevata al numero di anni trascorsi.
Esprimi con una formula il montante *M* in funzione del capitale iniziale *C*, dell'interesse percentuale *i* e del numero di anni *n*.
Sviluppa poi il calcolo per $n = 2$ e $n = 3$ applicando i prodotti notevoli.

3.2 Scheda teorica /esempi

Espressione algebrica letterale

Un'espressione si dice algebrica letterale se in essa compaiono solo le quattro operazioni elementari $(+,\ \cdot,\ \div,\ -)$, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice applicate a numeri reali e a lettere che rappresentino numeri reali.
Le operazioni si effettuano iniziando dall'elevamento a potenza e dall'estrazione di radice, poi si procede con le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui sono scritte, e infine le addizioni e le sottrazioni sempre nell'ordine in cui sono scritte. L'ordine delle operazioni può essere modificato usando le parentesi: le operazioni scritte all'interno di una coppia di parentesi hanno priorità rispetto a qualunque operazione e rispetto a quelle applicate a coppie di parentesi più esterne.

Esempi. 3.1

1. La scrittura $(a + 2b)^3 + c^2 + \frac{a+b}{c}$ è un'**espressione algebrica letterale** razionale fratta.
2. La scrittura $\log_{10} ab^2 + 2^c$ **non è** un'**espressione algebrica** perché compaiono il logaritmo e un esponenziale che non sono operazioni algebriche.
3. La scrittura $(a + 2b)^2$, che indica di elevare ad esponente 2 la somma di a con il doppio di b, è un'**espressione algebrica letterale** razionale intera.
4. La scrittura $\sqrt{a + b}$, che indica di estrarre la radice quadrata della somma di a e b è un'**espressione algebrica letterale irrazionale**.

Un'espressione algebrica si dice:
- **razionale** se nelle parti letterali non compaiono estrazioni di radici;
- **razionale intera** se nelle parti letterali oltre a non comparire estrazioni di radici non compaiono divisioni;
- **razionale fratta** se nelle parti letterali non compaiono estrazioni di radici ma non compaiono divisioni;
- **irrazionale** se nelle parti letterali dell'espressione compaiono estrazioni di radice.

Esempi 3.2

$\frac{5}{2}xy^2 + \frac{7}{3}x - 9y^2$ Espressione algebrica razionale intera.

$7xy^2 - \frac{3\,x}{7\,y}$ Espressione algebrica razionale fratta.

$\sqrt{xy^2} - 3x$ Espressione algebrica irrazionale.

Monomio

È un'espressione algebrica in cui compaiono solo moltiplicazioni o divisioni ma non compaiono addizioni o sottrazioni.

Esempio 3.2
$5xy^2$, $\frac{7}{3}x^3y$

3.2 Un quesito
L'espressione $2x^2yx^{-1}y^5$ è un monomio ridotto a forma normale?

Tipi di monomio:
Monomio ridotto a forma normale: se contiene un solo fattore numerico e potenze letterali di basi tutte diverse tra di loro.
Monomio fratto: se contiene anche fattori letterali con esponente negativo
Monomio nullo: se il suo fattore numerico è 0

Esempio 3.3
$-3x^5yx^{-4}y^3 \Rightarrow -3xy^4$ Forma normale
$x^{-4}y^2 = \frac{y^2}{x^4}$ Monomio fratto
$0 \cdot x^4 \cdot y^6 = 0$ Monomio nullo

Applicazione del quesito
L'espressione $2x^2yx^{-1}y^5$ non è un monomio ridotto a forma normale.

Il grado di un monomio: è la somma degli esponenti delle sue lettere
Monomi simili: quando hanno la stessa parte letterale
Monomi opposti: quando sono simili e hanno coefficienti opposti

Esempio 3.4
$3a^3b^2c \Rightarrow 3+2+1=6 \Rightarrow$ Il grado del monomio è 6
$5x^3y$ simile $7x^3y$ Monomi simili
$5x^3y$ opposto $-5x^3y$ Monomi opposti

3.3 Un quesito
Calcola il MCD tra i seguenti monomi $(-12xy^3, 6x^2y, 7xy^4)$

Il **Massimo comun divisore (MCD)** tra monomi è un monomio avente coefficiente numerico arbitrario e parte letterale formata da lettere comuni prese una sola volta e con l'esponente minore con cui figurano engli stessi monomi.
Il **Minimo comun multiplo (mcm)** tra monomi è un monomio avente coefficiente numerico arbitrario e parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni, prese una sola volta con l'esponente massimo con cui compare negli stessi monomi.

Esempio 3.5
MCD $(a^3b^2, 5a^2b^2, 7a^7b^3) = a^2b^2$
mcm $(-7a^2b^3, 2a^3b^4c^7, d) = 14a^3b^4c^7d$

Applicazione al quesito
Il MCD è xy

Altri quesiti:
Indica quali tra questi elencati sono monomi:

$$-\frac{1}{a^2};\ -3ab^2;\ x^{-2}y;\ +\frac{2}{3}x^2y^3$$

Polinomio

Un polinomio è un'espressione algebrica data dalla somma algebrica di più monomi.
Termini del polinomio: sono i monomi che compaiono come addendi del polinomio.

Esempio 3.6
$3x^2y^3 + 2x^3y$

3.4 Un quesito
Scrivi il polinomio i cui termini sono: $3xy^2$; $-5xy^2x^2$; $\frac{1}{2}xy^2$; $-x^3y^2$ e riducilo in forma normale.

Polinomio ridotto a forma normale: se tutti i suoi termini sono monomi ridotti a forma normale e i termini simili sono sommati algebricamente.
Termine noto del polinomio: è il termine di grado zero (se esiste).

Dato un polinomio ridotto a forma normale si dice:
Omogeneo: quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado
Ordinato (rispetto ad una lettera): se i suoi termini sono disposti secondo gli esponenti decrescenti o crescenti di quella lettera, che si dice **lettera ordinatrice del polinomio**
Completo (rispetto ad una lettera): se una volta ordinato rispetto ad una lettera contiene tutte le potenze di essa, da quella di grado più elevato a quella di grado zero.

Esempio 3.7

$$5a^4 - 7a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 - b^4$$

È un polinomio OMOGENEO (grado 4)
È un polinomio ORDINATO rispetto ad *a* in ordine decrescente
È un polinomio ORDINATO rispetto a *b* in ordine crescente
È un polinomio COMPLETO rispetto ad *a* e *b*

Applicazione del quesito
$$3xy^2 - 5xy^2x^2 + \frac{1}{2}xy^2 - x^3y^2 = \frac{7}{2}xy^2 - 6x^3y^2$$

Dato un polinomio non nullo e ridotto a forma normale si dice:
Grado del polinomio rispetto ad una lettera: il grado massimo dei termini rispetto a quella lettera
Grado complessivo del polinomio: è il massimo dei gradi dei monomi che lo compongono.

Esempio 3.8
Grado rispetto ad una lettera: $\frac{7}{2}xy^2 - 6x^3y^2$ rispetto a x: 3; rispetto a x: 3
Grado complessivo, quello del monomio di grado massimo: $3 + 2 = 5$

Altri quesiti:
Il polinomio $7x^3 - \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{5}xy^2 + 5y^3$ è omogeneo?

Operazioni tra polinomi

3.5 Un quesito

Calcolare la seguente somma di polinomi:
$$(4x^3 - 3x^2 + 1) + (-3x^2 + 4x - 5) - (2x - 3).$$

Addizione algebrica: La somma di due polinomi è il polinomio che si ottiene scrivendo i termini dei due polinomi uno dopo l'altro con il loro segno.

Esempio 3.9
$$(2a^2 + 5b^3 + 3ab) - (2ab - 3a^2 + b^3) =$$
$$= 2a^2 + 5b^3 + 3ab - 2ab + 3a^2 - b^3 =$$
$$= 5a^2 + 4b^3 + ab$$

Moltiplicazione: il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine di uno di essi per ogni termine dell'altro.

Esempio 3.10
$$(3a^2x + bx^3)(ab + x) =$$
$$= 3a^2x(ab + x) + bx^3(ab + x) =$$
$$= 3a^3xb + 3a^2x^2 + ab^2x^3 + bx^4$$

Applicazione del quesito

$4x^3 - 3x^2 + 1 - 3x^2 + 4x - 5 - 2x + 3 = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$

Divisione tra polinomi: consideriamo i polinomi $A(x)$ di grado m (dividendo) e $B(x)$ di grado n (divisore) con $m \geq n$ in una sola variabile reale x.
Esistono e sono unici due polinomi interi $Q(x)$ (di grado m - n) e $R(x)$ di grado minore di n, detti rispettivamente quoziente e resto della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$ per i quali vale:
$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Esempio 3.11
$$A(x) = 3x^3 - x + 2, \qquad B(x) = 3x^2 - 1$$
$$3x^3 - x + 2 = x(3x^2 - 1) + 2$$
quindi $Q(x) = x$ e $R(x) = 2$.

Il polinomio $A(x)$ si dice **divisibile** per il polinomio non nullo $B(x)$ se $\exists$ un polinomio $Q(x)$ tale che $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$ (cioè $R(x) = 0$) e la divisione si dice esatta.

Esempio 3.12
$$A(x) = 3x^3 - x, \qquad B(x) = 3x^2 - 1$$
$$3x^3 - x = x(3x^2 - 1)$$
quindi $Q(x) = x$ e $R(x) = 0$ e $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Un caso particolare della divisione tra polinomi è quella in cui il divisore $B(x)$ è un polinomio del tipo $x + a$. In questo caso si può stabilire se il dividendo $A(x)$ è un multiplo di $B(x)$ andando a verificare se $A(-a) = 0$.
Teorema di Ruffini: $A(x) = (x + a) \cdot Q(x) \Leftrightarrow A(-a) = 0$

Altri quesiti:
La somma algebrica di due o più polinomi può essere un monomio?
La somma algebrica di due o più polinomi di 3° grado è sempre un polinomio di 3° grado?

Scomposizione di un polinomio

1.4 Un quesito

Scomponi in fattori: $4x^2y^3 - 6xy^2z + 12x^5y^2z^2$

Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo sotto forma di un prodotto di 2 o più polinomi di grado minore.
Quando ciò è possibile si dice che il polinomio è **riducibile** altrimenti è **irriducibile.**

METODI DI SCOMPOSIZIONE:
Raccoglimento a fattor comune (totale o parziale):
Totale: $ka + kb + kc = k(a + b + c)$
Parziale: $ka + kb + ha + hb \Rightarrow k\,(a + b) + h\,(a + b)$
Trinomio di 2° grado:
$x^2 + (a + b)x + a \cdot b = (x + a)(x + b)$
Utilizzo teorema di Ruffini: gli eventuali zeri razionali vanno ricercati tra i numeri del tipo $a = \pm\frac{p}{q}$ dove p è un divisore del termine noto a_0 e $q = a_n$ coefficiente del termine di grado massimo:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

Esempio 3.13
Raccoglimento totale: $3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$
Trinomio di 2° grado: $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = (x + 2)(x + 3)$
Teorema di Ruffini: $A(x) = 2x^3 + 13x^2 + 18x + 6$, $p = 1,2,3$ e $q = 2$ quindi i possibili valori di a sono: $\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}$.
Poiché $A(-1/2) = -\frac{1}{4} + \frac{13}{4} - \frac{18}{2} + 6 = 0$ il polinomio $A(x)$ è divisibile per $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ e sarà $A(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)Q(x)$, dove il polinomio di secondo grado $Q(x)$ si ottiene eseguendo la divisione: $Q(x)$=$A(x)$:$\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 + 12x + 12$. In conclusione

$$A(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 12x + 12)$$

Applicazione del quesito

$$2xy^2(2xy - 3z + 6x^4z^2)$$

Altri quesiti:

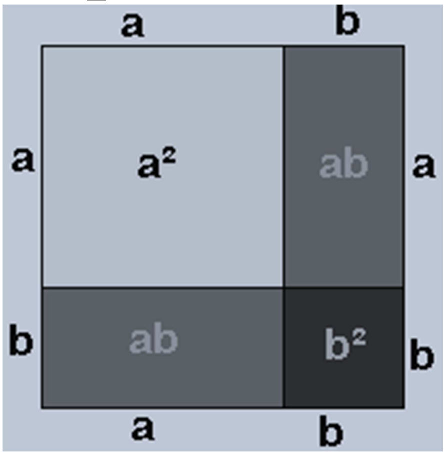
Scomponi: $2y^3 - 4xy^3z + 6x^6y^3z^2$

Prodotti notevoli

1.4 Un quesito

Sommare le tre frazioni: $\frac{1}{9a^2-49}, \frac{1}{3x+7}, \frac{1}{3x-7}$

Dati due generici numeri $A(x)$ e $B(x)$ allora:
Differenza di quadrati: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
Quadrato di binomio: $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$



Quadrato di trinomio: $(A \pm B \pm C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 \pm 2AB \pm 2AC \pm 2BC$
Cubo di binomio: $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2 \cdot B + 3AB^2 + B^3$
In generale la potenza n-esima di un polinomio si determina utilizzando i coefficienti dell'n-esima riga del triangolo di TARTAGLIA.

$$(A+B)^n = A^n + q_1 A^{n-1}B + q_2 A^{n-2}B^2 + \cdots + q_{n-1}AB^{n-1} + B^n$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Somma/Differenza di cubi: $(A^3 \pm B^3) = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$

Esempio 3.14
$16a^4 - 81 = (4a^2-9)(4a^2+9) = (2a-3)(2a+3)(4a^2+9)$ differenza di quadrati
$(3x-7)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x + 49 = 9x^2 - 42x + 49$ quadrato di binomio

Applicazione del quesito
Si scompone $9a^2 - 49 = (3a-7)(3a+7)$ quindi

$$\text{mcm}(9a^2-49, 3a-7, 3a+7) = (3a-7)(3a+7)$$

$$\frac{1}{9a^2-49} + \frac{1}{3x+7} + \frac{1}{3x-7} = \frac{1+(3a-7)+(3a+7)}{(3a-7)(3a+7)} = \frac{1+6a}{(3a-7)(3a+7)}$$

Altri quesiti:
Risolvi: $(2x+7)^3$; $(2x-y+3z)^2$; $(x-1)(x^2+x+1)$

3.3 Risposta al quesito iniziale

Per calcolare il montante, cioè la somma del capitale iniziale e degli interessi maturati, si moltiplica il capitale iniziale per la somma di 1 e dell'interesse percentuale elevata al numero di anni trascorsi.
Esprimi con una equazione il montante *M* in funzione del capitale iniziale *C*, dell'interesse percentuale *i* e del numero di anni *n*.
Sviluppa poi il calcolo per $n = 2$ e $n = 3$ applicando i prodotti notevoli.
Determina il montante per due anni e tre anni di deposito per un capitale iniziale di 1000 € e un interesse annuo del 2%.

L'equazione richiesta è: $M = C \cdot (1+i)^n$.
Per $n = 2$ si ottiene $M = C \cdot (1+i)^2 = C \cdot (1 + 2i + i^2) = C + 2ci + Ci^2$.

Per $n = 3$ si ottiene $M = C \cdot (1+i)^3 = C \cdot (1 + 3i + 3i^2 + i^3) = C + 3Ci + 3Ci^2 + Ci^3$.

$M_2 = 1000 \cdot (1 + 0.02)^2 = 1000 \cdot 1.0404 = 1040.40$ €

$M_3 = 1000 \cdot (1 + 0.02)^3 = 1000 \cdot 1.061208 = 1061.21$ €

Equazioni lineari

Un quesito
L'equazione $3x^2 - x = 4x + 1$ è equivalente a $3x^2 - x - 1 = 4x + 1 - 1$?

Dati due polinomi $A(x) e\ B(x)$ la relazione $A(x) = B(x)$ si dice EQUAZIONE ALGEBRICA nell'incognita x.

Risolvere un'equazione significa determinare l'insieme *S* delle soluzioni, cioè dei valori che attribuiti ad x soddisfano l'uguaglianza $A(x) = B(x)$.
Se $S = R$, cioè se le soluzioni sono infinite, l'equazione si dice **INDETERMINATA**
Se $S = \emptyset$ l'equazione si dice **PRIVA DI SOLUZIONI** (IMPOSSIBILE)
Due equazioni si dicono **EQUIVALENTI** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Un'equazione algebrica si dice **LINEARE** se il massimo grado a cui è elevata la variabile incognita è 1:
$ax = b$; con $a, b \in R$.
se $a \neq 0$ la soluzione è $x = \frac{b}{a}, a \neq 0$
se $a = 0$ l'equazione diventa $0x = b$ quindi
se $b = 0$ si ha $0x = 0$ verificata per ogni x reale ossia $S = R$ (equazione **INDETERMINATA**)
se $b \neq 0$ si ha $0x \neq 0$ per ogni x quindi $S = \emptyset$ (equazione **IMPOSSIBILE**)

Esempio 3.15
$x - 3 = 0;\ 2x - 15 = -3x \Rightarrow$ equazioni equivalenti

Per trasformare un'equazione in un'altra equazione si applicano i **principi di EQUIVALENZA**:
- **principio** di **addizione**: $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) + M(x) = B(x) + M(x)$
- **principio** di **moltiplicazione**: $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot M(x) = B(x) \cdot M(x)$

$$\frac{P(x)}{M(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \wedge M(x) \neq 0$$

Esempio 3.16
$x^2 + 5x = 3x$ è equivalente a $x^2 + 5x + 2 = 3x + 2$

Applicazione del quesito
Sì, le due equazioni sono equivalenti

Altri quesiti:
Le equazioni $2x - 3 = 5\ ed\ x = 4$ sono equivalenti?
Sì perché entrambe ammettono la soluzione $x = 4$.

Disequazioni algebriche

Definizione:
Si dice **DISEQUAZIONE** in una incognita *x* ogni disuguaglianza del tipo:

$$A(x) > B(x)$$

al posto di > potrebbe presentarsi anche $\geq, <, \leq$.

I valori di *x* che soddisfano tale relazione vengono detti **soluzioni della disequazione**.

Tipi di disequazione:
Numerica: se non compaiono altre lettere oltre alle incognite (= coefficienti numerici)
Letterale: se i coefficienti sono letterali
Razionale: se entrambi i membri sono espressioni razionali rispetto all'incognita
Intera: se entrambi i membri sono interi rispetto all'incognita
Fratta: se almeno uno dei membri non è intero rispetto all'incognita
Grado di una disequazione: massimo grado con cui compare l'incognita.

Esempio 4.1
$x^3 - 3x + 4 > 0$
È una disequazione numerica, intera, razionale, di grado 3.

$3at + t - \frac{4}{a} < 0$ (Incognita *t*)
È una disequazione letterale, intera, razionale, di grado 1 in *t*.

Disequazioni equivalenti

Si dice che due disequazioni sono equivalenti se ogni soluzione della prima è soluzione della seconda e viceversa.

Otteniamo una disequazione a partire da un'altra disequazione applicando i **principi di equivalenza**:
- **Addizionando** ad ambo i membri di una disequazione una stessa espressione (che può contenere o meno l'incognita) si ottiene una disequazione equivalente a quella data:

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$$

Esempio 4.1

$$4x + 9 > 0 \Leftrightarrow 4x + \cancel{9} - \cancel{9} > -9 \Leftrightarrow 4x > -9$$

- **Moltiplicando** i due membri di una disequazione per uno stesso
  fattore positivo si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

$$C(x) > 0 \Longrightarrow A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot C(x) > B(x) \cdot C(x)$$

fattore negativo si ottiene una disequazione equivalente solo **cambiando** il **“>”** in **“<”** e viceversa.

$$C(x) < 0 \Longrightarrow A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot C(x) < B(x) \cdot C(x)$$

Osservazione importante

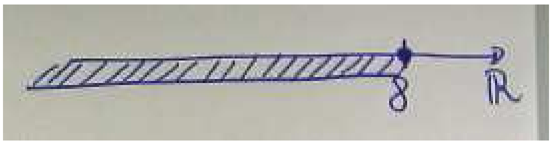
Nelle disequazioni fratte, se l’incognita compare al denominatore, applicando il principio di equivalenza, il segno del denominatore risulta avere la stessa importanza del segno del numeratore.

Esempi

a. $32 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow 32 - 32 - 4x \geq -32 \Leftrightarrow x \leq \frac{32}{4} \Leftrightarrow x \leq 8$

$S = \{x \in R | x \leq 8\}$

$S = \{-\infty, 8\}$



Disequazioni di I grado in un’incognita

Definizione: si dice DISEQUAZIONE di I grado in un’incognita *x* ogni disequazione del tipo:

$$ax + b > 0 \text{ con } a, b \in R, a \neq 0$$

(Analoga trattazione $\geq, <, \leq$)

se $a > 0$ la disequazione è equivalente a: $x > -\frac{b}{a}$

se $a < 0$ la disequazione è equivalente a: $x < -\frac{b}{a}$

Esempi

a. $\dfrac{2x-5}{2} - \dfrac{3x-4}{3} < 0$

$\dfrac{3(2x-5) - 2(3x-4)}{6} < \dfrac{0}{6}$

$6x - 15 - 6x + 8 < 0$

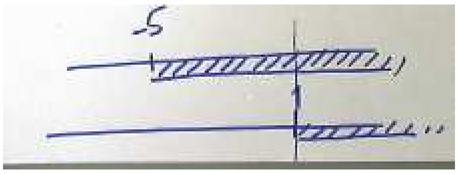
$-7 < 0 \Rightarrow$ verificata $\forall x \in R$; $S = R$; $S = (-\infty, +\infty)$

Sistemi di disequazioni

Determinare le soluzioni che sono comuni a 2 o più disequazioni nella stessa incognita *x* equivale a risolvere un sistema composto da più disequazioni.

Esempio

a. $\begin{cases} 2x + 3 > x - 2 \\ x + 2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x > 1 \end{cases}$



$S_1 = \{x \in R | x > -5\}$ e $S_2 = \{x \in R | x > 1\}$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in R | x > 1\} = (1, +\infty)$