Lezione 4 – Piano cartesiano, retta, equazioni e sistemi lineari

Piano cartesiano e equazioni lineari

4.1 Un quesito per iniziare

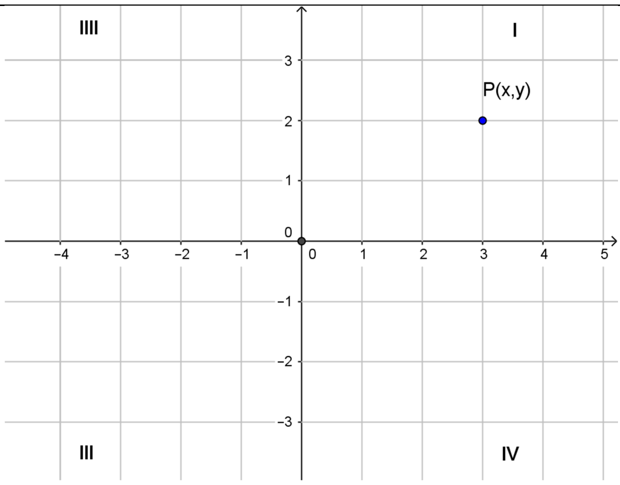
I tre gestori Telecon, Telefon e Teleson offrono i seguenti piani tariffari (prezzi in €, IVA inclusa)

Gestore	Scatto alla risposta	Costo al minuto
Telecon	0.1	0.20
Telefon	0.5	0.15
Teleson	0	0.25

Qual è la tariffa più conveniente in relazione alla durata di una telefonata?

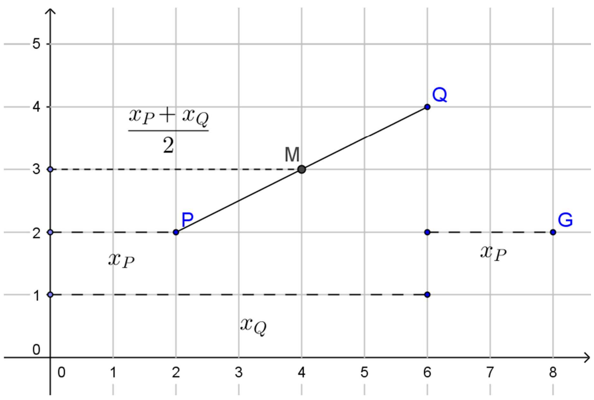
4.2 Il piano cartesiano

Associa gli oggetti matematici rappresentati nella figura alle rispettive denominazioni ed enunciane il significato: piano cartesiano, origine, assi cartesiani, asse delle ascisse, asse delle ordinate, quadranti, punto, ascissa, ordinata.



Il piano cartesiano è il piano geometrico euclideo in cui è stato definito un sistema di riferimento Oxy formato da due rette perpendicolari orientate e dotate di una unità di misura.
In questo modo ad ogni punto del piano è associata una coppia di numeri reali e viceversa.

4.2.1 Punto medio di un segmento e distanza tra due punti nel piano cartesiano

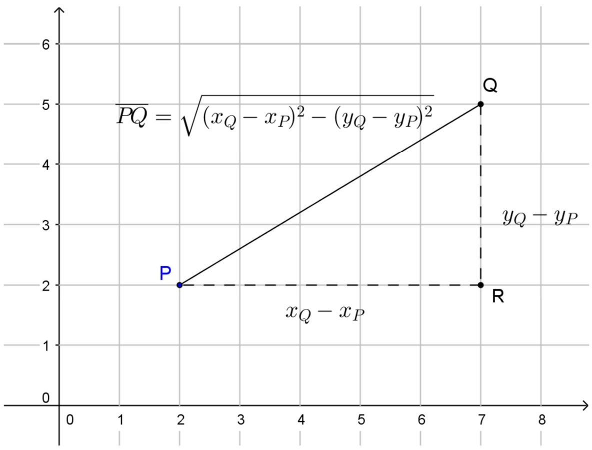


La figura mostra che l'ascissa del punto medio di un segmento si calcola facendo la media delle ascisse degli estremi del segmento stesso:

$$x_m = \frac{x_P + x_Q}{2}$$

Analogamente per l'ordinata si ottiene

$$y_m = \frac{y_P + y_Q}{2}$$



La distanza di due punti nel piano cartesiano si determina applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il segmento PQ e i cateti paralleli agli assi cartesiani.

$$\overline{\boldsymbol{PQ}} = \sqrt{(\boldsymbol{x_Q} - \boldsymbol{x_P})^2 + (\boldsymbol{y_Q} - \boldsymbol{y_P})^2}$$

Casi particolari per il calcolo della distanza tra due punti:
- A e B hanno la medesima ascissa $x_A = x$: $\overline{AB} = |y_B - y_A|$
- A e B hanno la medesima ordinata $y_A = y_B$: $\overline{AB} = |x_B - x_A|$

4.2.2 La retta nel piano cartesiano

L'equazione $y = mx$ è soddisfatta da tutte le coppie ordinate di numeri reali (x, y) tali che $y = mx$. I punti del piano cartesiano le cui coordinate $P(x, y)$ soddisfano questa condizione appartengono ad una retta del piano cartesiano passante per l'origine e viceversa tutti i punti di questa retta soddisfano l'equazione $y = mx$. Questa retta è il grafico della funzione $y = mx$, la funzione di proporzionalità diretta.

Esempio

$$y = 2x$$

Le ordinate dei punti della retta sono il doppio delle corrispondenti ascisse.

Viceversa, tutti i punti del piano che hanno un'ordinata doppia dell'ascissa appartengono alla retta

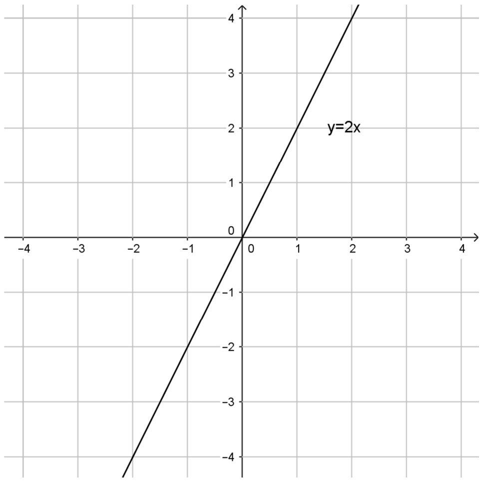


Grafico della funzione $y = 2x$

Più in generale tutte le rette del piano cartesiano, con l'eccezione di quelle parallele all'asse y, sono rappresentate dall'equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$.

Scelti due qualsiasi punti P_1 e P_2 della retta, il parametro m, detto ***pendenza,*** è definito come il rapporto tra la variazione delle ordinate dei due punti e la variazione delle corrispondenti ascisse.

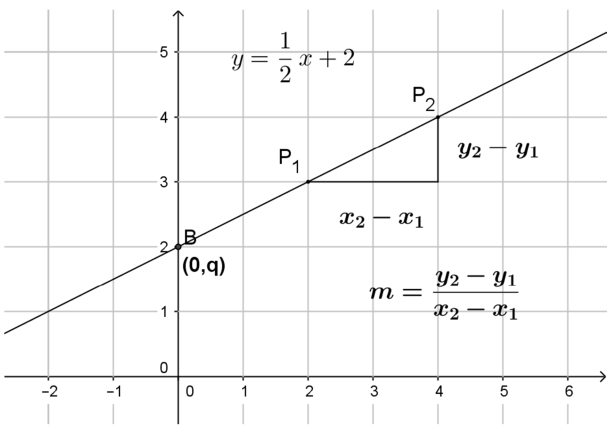
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Il parametro q, detto ***ordinata all'origine***, è l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse delle y.

La pendenza è pari alla variazione delle ordinate per una variazione delle ascisse pari ad uno: per $\Delta x = 1, m = \Delta y$.

La pendenza è positiva se le ordinate crescono al crescere delle ascisse, negativa se decrescono al crescere delle ascisse.

Per $m = 0$ l'equazione diventa $y = q$, funzione costante. Il grafico è una retta parallela all'asse *x* delle ascisse.



$\boldsymbol{y = mx + q}$

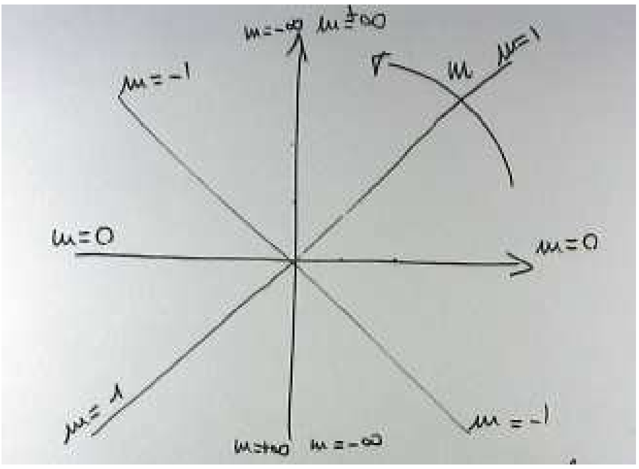
Osservazione

La pendenza ha il significato di "*velocità di variazione della grandezza y rispetto alla grandezza x*", velocità di variazione che nel caso della retta (funzione lineare) è una costante.

Esempio:

Nella legge lineare: $\boldsymbol{p = m \cdot t + p_0}$ che descrive l'andamento di un prezzo *p* al variare del tempo t, p_0 rappresenta il prezzo al tempo zero (ordinata all'origine) e m la rapidità di variazione del prezzo nel tempo $\frac{\Delta p}{\Delta t}$.

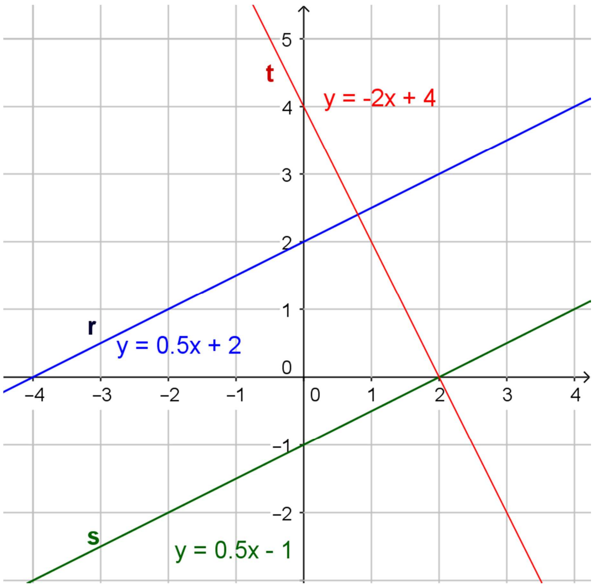
La pendenza di una retta è funzione dell’inclinazione della retta cioè dell’angolo che essa forma con il semiasse positivo delle ascisse, può quindi assumere qualsiasi valore reale tra $-\infty$ e $+\infty$.



Parallelismo e perpendicolarità tra rette

Metti a confronto le rette in figura
Le rette r e s sono parallele e hanno quindi la stessa pendenza, hanno però ordinate all’origine diverse perché intersecano l’asse delle ordinate in punti diversi.
In generale se la retta r’ è parallela alla retta r le pendenze sono uguali: $\boldsymbol{m' = m}$
La retta t è perpendicolare ad r e a s se ha una pendenza pari all’opposto del reciproco delle comune pendenza di r e s: $m_t = -\left(\frac{1}{0.5}\right) = -2$.
In generale la pendenza della perpendicolare r’ alla retta r è:

$$\boldsymbol{m' = -\frac{1}{m}}$$



Osservazione

L’equazione più generale di una retta nel piano cartesiano è del tipo $ax + by + c = 0$. Tale equazione è detta forma implicita e rappresenta tutte le rette del piano, anche quelle parallele all’asse delle ordinate. Dall’equazione generale della retta, considerando $b \neq 0$ da essa si ottiene la forma esplicita $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ e ponendo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ si ottiene l’equazione della retta in forma esplicita: $y = mx + q$.

Equazioni di rette particolari:

$y = 0$ Asse ascisse

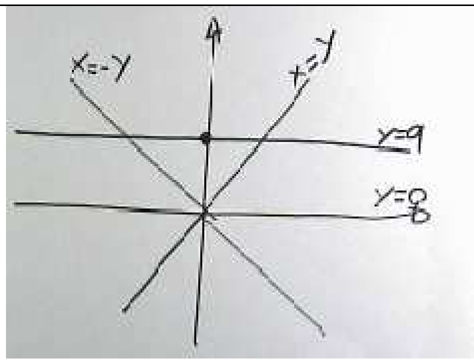
$x = 0$ Asse ordinate

$y = q$ Retta ∥ asse ascisse

$x = k$ Retta ∥ asse ordinate

$x = y$ Bisettrice 1° - 3° quadrante

$x = -y$ Bisettrice 2°- 4° quadrante



Fascio di rette proprio e improprio

Per assegnare una retta è sufficiente fissare due punti (un assioma della geometria euclidea afferma che "per due punti passa una e una sola retta") oppure assegnare i due coefficienti m (pendenza) e q (ordinata all'origine)

Assegnando un solo punto o un solo coefficiente si ottiene una famiglia di infinite rette detto fascio.

Assegnando un punto si ottiene un cosidetto **fascio proprio**, costituito da tutte le rette che passano per il punto assegnato $P_0(x_0, y_0)$, di equazione: $\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$**.**

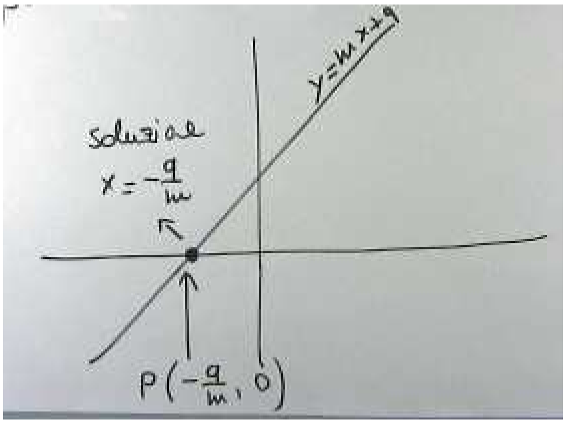
Assegnando il coefficiente $\boldsymbol{m}$**,** ad esempio $m = k$, si ottiene un cosidetto **fascio improprio**, costituito da tutte le rette del piano di pendenza k, di equazione: $\boldsymbol{y = kx + q}$**.**

Interpretazione geometrica della risoluzione delle equazioni di primo grado.

La risoluzione di un'equazione di 1° grado in una incognita x ($mx + q = 0$) può essere vista come la ricerca del punto d'intersezione della retta $y = mx + q$ con l'asse delle ascisse $y = 0$

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{q}{m} \\ y = 0 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è l'ascissa del punto di intersezione, se esiste, delle due rette.



6.3 Risposta al quesito iniziale

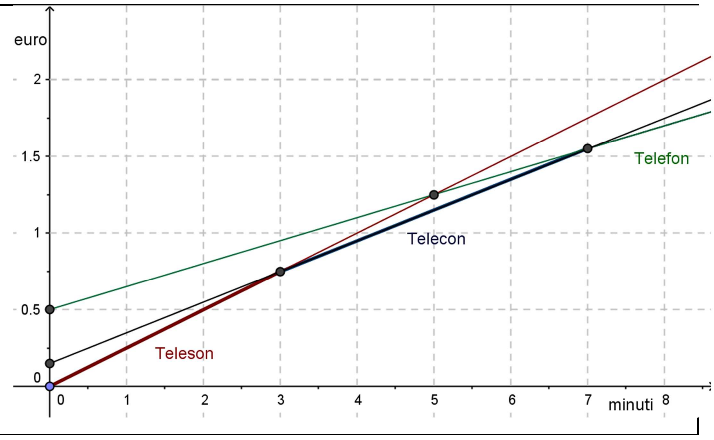
$\boldsymbol{Teleson}: \boldsymbol{y = 0.25x}$

$\boldsymbol{Telecon}: \boldsymbol{y = 0.1 + 0.2x}$

$\boldsymbol{Telefon}: \boldsymbol{y = 0.5 + 0.15x}$

Equazione della retta in forma esplicita, $y = f(x)$ y funzione di *x*:

$\boldsymbol{y = mx + q}$



4.1 Un quesito
Rappresenta sul piano cartesiano i seguenti punti: A$(-2{,}1)$; B $(3{,}1)$; C $(3{,}7)$ e verificare che determinino un triangolo rettangolo.

Esempi 4.1
A: $(2{,}1)$; B: $(2{,}3) \Rightarrow \overline{\mathrm{AB}} = |1-3| = |-2| = 2$ (Punti A e B con medesima ascissa)
A: $(1{,}3)$; B: $(5{,}3) \Rightarrow \overline{\mathrm{AB}} = |5-1| = 4$ (Punti A e B con medesima ordinata)
A: $(2{,}2)$; B: $(6{,}5) \Rightarrow \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(6-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ (Caso generale)

4.1 Un quesito
Rappresenta le seguenti rette:

$$A)\ 3y - 1 = 0;\ \mathrm{B})\ 5x - 10 = 0;\ \mathrm{C})\ y = 2x - 3;\ \mathrm{D})\ x + y - 3 = 0$$

Altri quesiti

1. La retta r ha equazione $y = mx + q$, la retta s equazione $y = m'x + q'$.
   Quali condizioni devono soddisfare i coefficienti *m*, *m'*, *q* e *q'*, perché esse risultino parallele, perpendicolari, incidenti?

2. Considera nel piano cartesiano il segmento di estremi A (1;2) e B (5;4) e determina l'equazione dell'asse del segmento AB come retta perpendicolare al segmento, condotta nel punto medio.

Sistemi di equazioni

Si dice **sistema di equazioni** nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ una struttura del tipo:

$$\begin{cases} A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ A_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ A_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

Dove $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono espressioni nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Definizione:
Si dice SOLUZIONE di un sistema con *n* incognite una *n*-upla ordinata $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di valori che soddisfa le equazioni del sistema.

Il sistema può essere:
-**Determinato**: ammette un numero finito di soluzioni
-**Indeterminato**: ammette infinite soluzioni
-**Impossibile**: non ammette soluzioni

Il **grado di un sistema di equazioni** è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.

Sistemi di 1° grado in 2 incognite

Sono sistemi riconducibili alla forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y - c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y - c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Incognite} \rightarrow (x, y)$$

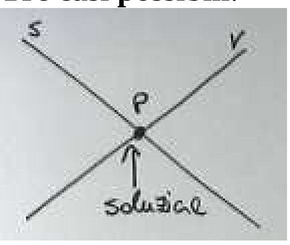
o equivalentemente

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{(Forma normale)}$$

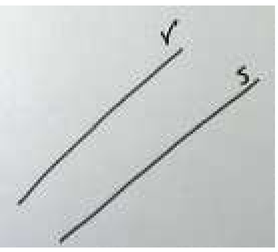
Soluzione di un sistema di 1° grado in 2 incognite ogni coppia ordinata (x, y) che verifica le equazioni del sistema.
Geometricamente: risolvere un sistema di 1° grado in 2 incognite (x, y) significa determinare il o i punti di intersezioni tra le 2 rette:

$$r: \quad a_1x + b_1y = c_1$$
$$s: \quad a_2x + b_2y = c_2$$

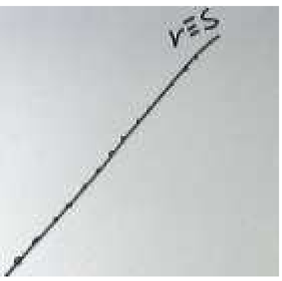
Tre casi possibili:



SISTEMA DETERMINATO
(una e una sola soluzione)
Significa che le rette sono incidenti in un punto $P(x_p, y_p)$



SISTEMA IMPOSSIBILE
(∄ soluzioni)
Le due rette sono parallele, hanno lo stesso coefficiente angolare (*m*)



SISTEMA INDETERMINATO
(Infinite soluzioni)
Le due rette sono coincidenti

Caso particolare: **sistema omogeneo** $c_1 = c_2 = 0$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

Metodi di Risoluzione di Sistemi Lineari

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Consiste nell'andare a isolare un'incognita ($x \ o \ y$) in una delle 2 equazioni e sostituirla nell'altra.
Ad esempio, isoliamo la *x* nella 1° equazione:

$$x = -\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}$$

E sostituirla nella 2° equazione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-b_1y + c_1}{a_1} \\ a_2\left(\dfrac{-b_1y + c_1}{a_1}\right) + b_2y - c_2 = 0 \end{cases}$$

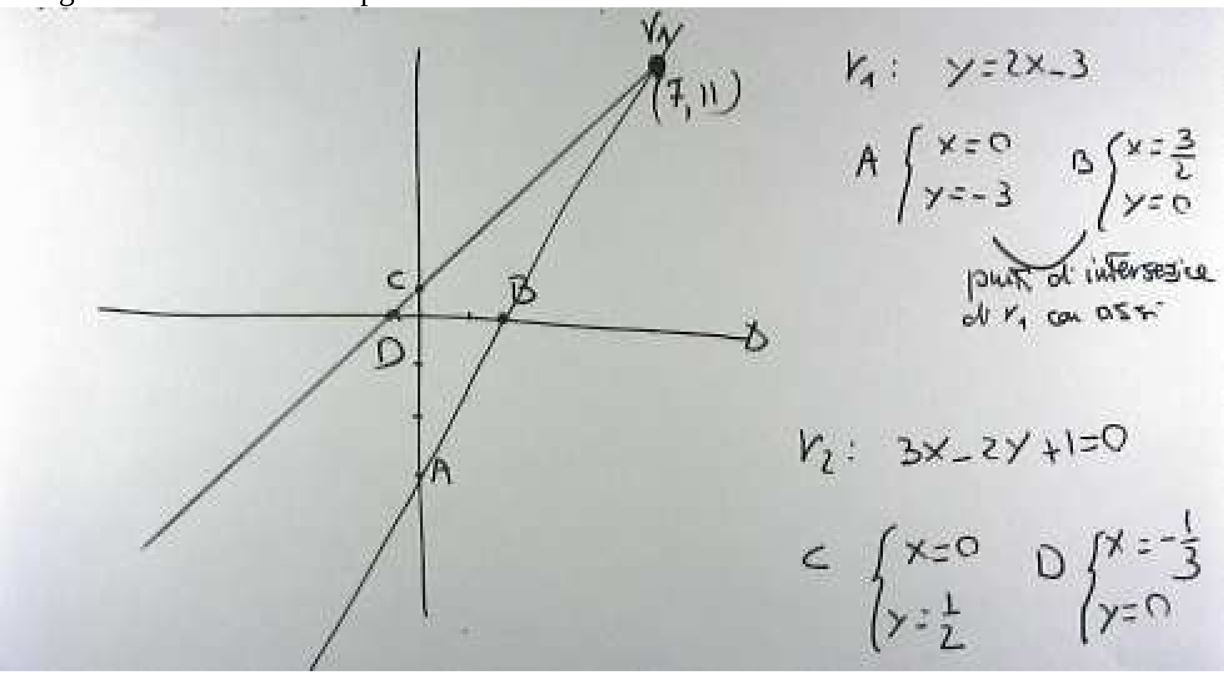
Esempio

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 2(2x - 3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 4x + 6 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 11 \\ x = 7 \end{cases}$$

Graficamente:

Disegniamo le due rette nel piano cartesiano:



Metodo della combinazione lineare:
Consiste nel sostituire una delle due equazioni con una combinazione lineare delle due equazioni in modo che contenga al più una delle incognite.

Esempio

$$\begin{cases} x + \mathbf{2y} + 3 = 0 \\ 5x - \mathbf{2y} + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ (\boldsymbol{x} + \cancel{\mathbf{2y}} + \mathbf{3}) + (\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \cancel{\mathbf{2y}} + \mathbf{7}) = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{10} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{3} + 2y + 3 = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \frac{5}{3} - 3 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \frac{5-9}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -\frac{4}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

S=$\left\{\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$ quindi il sistema è determinato

Metodo del confronto: consiste nell'isolare in entrambe le equazioni la medesima incognita ed eguagliare poi le due espressioni ottenute.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b_1y+c_1}{a_1} \\ x = \frac{-b_2y+c_2}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b_1y+c_1}{a_1} = \frac{-b_2y+c_2}{a_2} \\ x = \frac{-b_1y+c_1}{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ x = \frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 5x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - 3 \\ x = \frac{2y-7}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y - 3 = \frac{2y-7}{5} \\ x = -2y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10y - 15 = 2y - 7 \\ x = -2y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12y = 8 \\ x = -2y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = -2\left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

S=$\left\{\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$ quindi il sistema è determinato

Sistemi lineari in 3 incognite

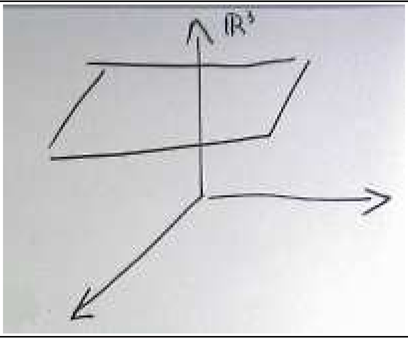
4.1 Un quesito

Risolvi il seguente sistema lineare in tre equazioni in tre incognite, interpretando graficamente la soluzione:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite *x*, *y*, *z*
Risolvere un sistema di questo tipo significa andare a determinare i punti di intersezione tra 3 piani



Esempio:

$$\begin{cases}4x+3y+5z=1\\8x+6y+10z=2\\x+z=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{4(3-z)+3y+5z=1}\\8x+6y+10z=2\\\mathbf{x=3-z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{3y+z=-11}\\8x+6y+10z=2\\x=3-z\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{y=\frac{-11-z}{3}}\\\mathbf{8(3-z)+\cancel{6}^2\left(\frac{-11-z}{\cancel{3}}\right)+10z=2}\\x=3-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{-11-z}{3}\\\mathbf{24-\cancel{8z}-22-\cancel{2z}+\cancel{10z}=2}\\x=3-z\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=\frac{-11-z}{3}\\\mathbf{2=2}\\x=3-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{-11-z}{3}\\x=3-z\end{cases}$$

Il sistema è indeterminato perché ha infinite soluzioni del tipo $\left(3-z,\frac{-11-z}{3},z\right), z\in R$.

Altri quesiti

3. Risolvi i seguenti sistemi lineari di due equazioni in due incognite, interpretando graficamente la soluzione, e di tre equazioni in tre incognite.

   a. $\begin{cases}y=2x-3\\3x-2y+1=0\end{cases}$

   b. $\begin{cases}\frac{2}{x-y}+\frac{3}{x+y}=\frac{5}{x^2-y^2}\\x-\frac{4}{y}=\frac{x(y+2)}{y}+2\end{cases}$

   c. $\begin{cases}x+2y+3=0\\5x-2y+7=0\end{cases}$

   d. $\begin{cases}4x+3y+5z=1\\8x+6y+10z=2\\x+z=3\end{cases}$