Lezione 5

Funzione quadratica - Equazioni algebriche di II° e superiore.

Equazioni di 2° grado

4.1 Un quesito

Risolvi: $4x^2 + x - 1 = 0$

Un'**equazione algebrica** nella incognita *x* si dice di II grado se ridotta a forma normale è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \in R \wedge a \neq 0$$

Al variare dei coefficienti *a*,*b*, e *c* dell'equazione si presentano i seguenti casi:

Caso $b = 0$

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}, a \neq 0$$

Se $\frac{c}{a} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{c}{a} \geq 0 \quad x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \Rightarrow S = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$

Se $\frac{c}{a} > 0 \Leftrightarrow -\frac{c}{a} < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali $\Rightarrow S = \emptyset$

Per esempio $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$\begin{array}{ccc} x - \sqrt{5} = 0 & \vee & x + \sqrt{5} = 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x_1 = \sqrt{5} & \vee & x_2 = -\sqrt{5} \end{array}$$

Caso $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \Rightarrow S=\left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

Per esempio $5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(5x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{5} \quad \Rightarrow S = \left\{0, -\frac{3}{5}\right\}$

In generale $ax^2 + bx + c = 0$

Indichiamo con $\Delta = b^2 - 4ac$ detto **discriminante**

Si presentano 3 casi:

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow S = \left\{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ due soluzioni reali

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ due soluzioni reali e coincidenti.

$\Delta < 0 \Rightarrow S = \emptyset$ nessuna soluzione reale.

Nel caso in cui $b = 2d$ cioè *b* è PARI, le eventuali soluzioni reali della corrispondente equazione di 2^ogrado sono:

$$x_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - ac}}{a}$$

Osservazione importante: la formula generale per determinare le soluzioni di un'equazione di II grado si può applicare anche quando l'equazione è INCOMPLETA ossia $b = 0 \vee c = 0$, tuttavia **è preferibile** utilizzare i metodi particolari che si sono presentati.

Esempi:

a. $4x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 16 = 17 > 0$ quindi le soluzioni sono 2:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8} = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}; \frac{-1-\sqrt{17}}{8}$$

b. $4x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ quindi non ci sono soluzioni reali.

c. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0$ quindi le soluzioni sono 2 ma coincidenti

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{4} = -\frac{1}{2}$$

d. $\frac{3x}{2x-1} + \frac{1}{x} = -\frac{2}{x-2x^2} \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 2x - 1}{x(2x-1)} = \frac{2}{x(2x-1)}$

$3x^2 + 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 3 = 0$ con $x \neq 0, \frac{1}{2}$

$\Delta = 4 + 36 > 0$ quindi le soluzioni sono 2 e distinte

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3} \qquad \begin{array}{l} x_1 \cong 0.72 \\ x_2 \cong -1.38 \end{array}$$

Proprietà delle soluzioni di un'equazione di II grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in R \wedge a \neq 0$$

Siano x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione, per il teorema di Ruffini si ha:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Sviluppando il prodotto e dividendo per a si ha

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2) = 0$$

quindi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Esempi 4.1

Partendo dall'equazione: $x^2 - 8x + 15 = 0$ il valore delle soluzioni si posso ottenere trovando due numeri la cui somma è 8 e il cui prodotto cioè risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \cdot x_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Gli stessi valori si ottengono usando la formula

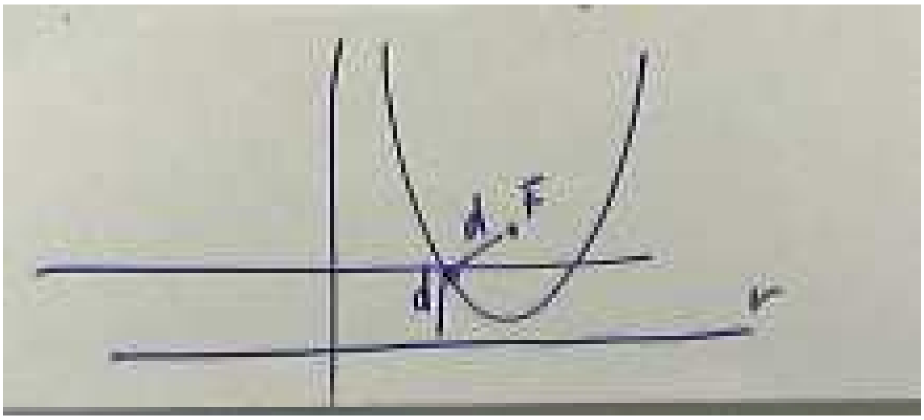
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-15}}{1} = 5; 3.$$

Interpretazione geometrica delle equazioni di II grado

4.1 Un quesito

Considerata la parabola di equazione $y = 2x^2 + 2x - 4$ determina le coordinate del vertice, i punti di intersezione con gli assi cartesiani e rappresentala nel piano cartesiano.

La parabola è il LUOGO GEOMETRICO dei punti equidistanti da un punto detto **fuoco** e una retta *r* detta **direttrice**.



La **parabola con asse di simmetria parallelo all'asse *y*** è l'insieme dei punti del piano che soddisfano un'equazione del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

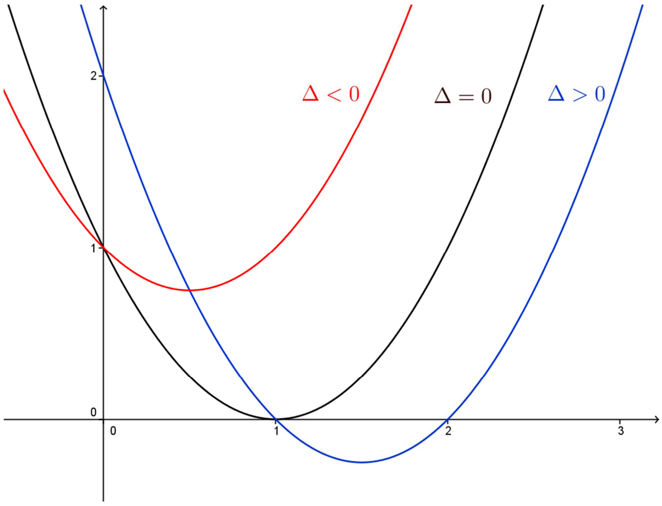
L'asse della parabola interseca la parabola in un punto *V* detto **vertice** di coordinate

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

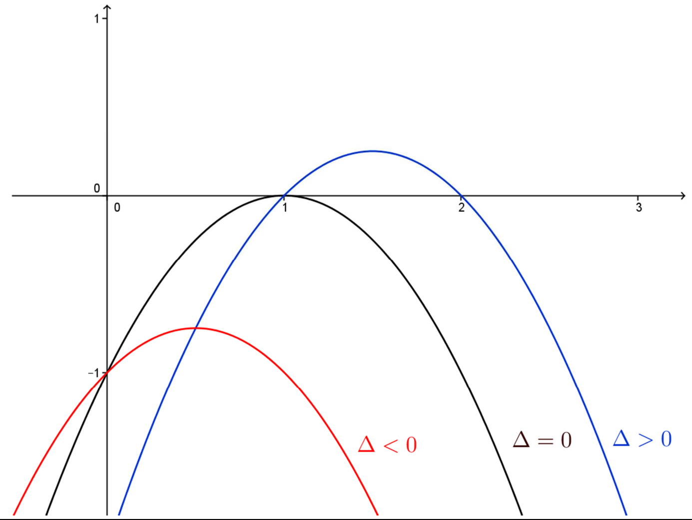
Le soluzioni di un′equazione di 2° grado in una incognita *x* possono essere interpretate come le ascisse dei punti di intersezione, se esistono, della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con l'asse delle ascisse $(y = 0)$; infatti

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ y = 0 \end{cases}$$

· $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto



· $a < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso



Esempio 4.1

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Equazione di grado in *x*, è l'equazione di una parabola, con asse di simmetria parallelo rispetto all'asse *y*. La concavità della parabola è ottenuta guardando il segno del termine di II grado in *x*.
$2 > 0 \Rightarrow$ concavità rivolta verso l'alto. (se è negativo è verso il basso).
Andiamo a determinare le soluzioni dell'equazione di II grado associata:

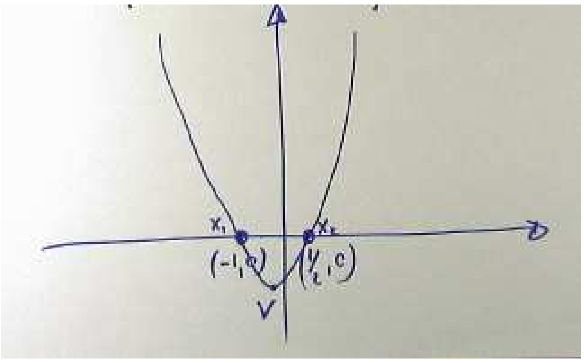
$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Corrisponde a determinare i punti di intersezione della parabola con l'asse *x* ($y = 0$).
Calcoliamo i punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1+3}{4}; \frac{-1-3}{4} = \frac{1}{2}; -1$$

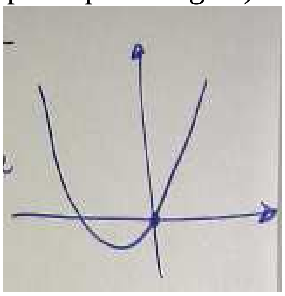
Quindi, la parabola interseca l'asse *x* nei punti: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(-1,0)$
Calcoliamo il vertice della parabola: ($a = 2,\ b = 1,\ c = -1$)

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$$

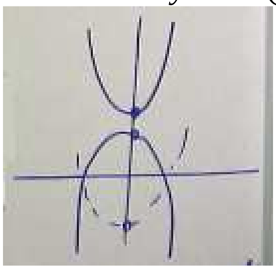


Casi particolari

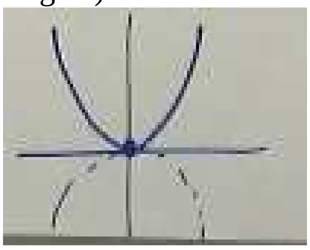
Data una parabola $y = ax^2 + bx + c$
· $c = 0 \Rightarrow\; y = ax^2 + bx$ (la parabola passa per l'origine)



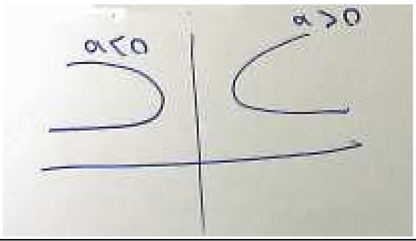
· $b = 0 \Rightarrow y = ax^2 + c$ (il vertice si trova sull'asse y $\;V = (0, c)$)



· $b = c = 0 \Rightarrow y = ax^2$ (il vertice è l'origine)



L'equazione $x = ay^2 + by + c$ rappresenta ancora una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse *x*.



Equazioni di grado superiore al secondo

<u>Definizione</u>: si dice **equazione di grado *n*** in un'incognita *x* ogni equazione riconducibile:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Dove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R \wedge a_n \neq 0$
Se $n = 1$: $a_1 x + a_0 = 0$ equazione di I grado in *x*
Se $n = 2$: $a_2 x^2 + a_1 x + a = 0$ equazione di II grado in *x*
I valori che sostituiti all'incognita *x* verificano l'uguaglianza sono detti **radici** o **soluzioni** dell'equazione.

Quante soluzioni ammette un'equazione di grado *n*?

Teorema fondamentale dell'algebra:
ogni equazione del tipo $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ammette nell'insieme R al massimo n soluzioni.
Per ottenere esattamente *n* soluzioni si dovrà lavorare nell'insieme dei numeri complessi.

Metodo generale

Si procede in tre passi:
1) Si scrive l'equazione in forma normale sommando i termini simili e portandoli al 1° membro
2) Si cerca di scomporre il 1° membro nel prodotto di 2 o più fattori di 1° grado
3) Si applica la legge di annullamento del prodotto, cioè il prodotto di due o più fattori è nullo
4) quando almeno uno dei fattori è nullo ossia $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Esempio

1)
$$x^3 - 1 = 0$$
Equazione di grado 3, differenza di cubi
$(x-1)(x^2+1+x)$
$x^2+1+x \Rightarrow$ falso quadrato $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow \Delta< 0 \quad \nexists\ soluzione \in R$
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
$S = \{1\}$
Altro metodo:
$x^3 = 1$
Porto il termine noto a destra ed estraggo la radice cubica ad ambo i membri:
$\sqrt[3]{x^3} = 1$
$x = 1$

2)
$$(x^2+3x+2)(x+1)^2x^2 = 0$$
Grado:$2+2+2 = 6$
Possiamo applicare la legge di annullamento del prodotto:
$$x^2+3x+2 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
Scomponiamo il 1° fattore:
$$x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3+1}{2}, \frac{-3-1}{2} = -1, -2$$
da cui l'equazione di partenza diventa
$$(x+1)(x+2)(x+1)^2x^2 = 0$$
$$(x+1)^3(x+2)x^2 = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto si ha:
$(x+1)^3 = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = -1$ con molteplicità 3
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ con molteplicità 1
$x^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = 0$ con molteplicità 2
Se sommiamo le molteplicità delle radici otteniamo il grado dell'equazione: $3 + 1 + 2 = 6$.
In questo caso l'equazione ha lo stesso numero di soluzioni del grado dell'equazione.

Si dicono equazioni **binomie** le equazioni del tipo:

$$ax^n + b = 0$$

Costituite da 2 termini di cui uno è il termine noto.

Le equazioni **trinomie** sono costituite da 3 termini di cui, se ordinati, il 1° ha potenza doppia rispetto al 2° e il terzo è il termine noto:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

Esempio

$$2x^6 + 3x^3 + 1 = 0$$

Equazione trinomia di grado 6, è un'equazione della forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ con $n = 3$.
Si risolve ponendo $x^n = t$ e risolvendo

$$at^2 + bt + c = 0$$

la quale è equazione di II grado in t.

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3+1}{4}, \frac{-3-1}{4} = -\frac{1}{2}, -1$$

Risostituendo la variabile iniziale si ottiene:

$$x^3 = -\frac{1}{2} \vee x^3 = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \vee x = -1.$$

Altri quesiti

1. Costruisci, se possibile, un'equazione di secondo grado, una di terzo e una di quarto che non abbiano soluzioni reali.

   Equazione di secondo grado: $x^2 + 5 = 0$;
   Equazione di terzo grado: Da svolgere.
   Equazione di quarto grado: $x^4 + 10 = 0$;

2. Quali relazioni sussistono tra le soluzioni delle seguenti coppie di equazioni (o insiemi di equazioni)?

   a. $x^2 - x = x + 1$ e $x^2 - 2x - 1 = 0$;

   Sono le stesse.

   b. $5x^2 - 3x = \frac{x}{3}$ e $15x^2 - 10x = 0$;

   Sono le stesse.

   c. $\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1 - x} = 0$ e $\begin{cases} x^3 + 2x + 3 = 0 \\ x^2 + 1 - x = 0 \end{cases}$.

   $\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1 - x} = 0$ ha le stesse soluzioni di $x^3 + 2x + 3 = 0$.

3. Costruisci, se possibile:

   a. un'equazione di quarto grado in una incognita che abbia come soluzioni 0, 1, 2, 3.

Soluzione:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

da cui svolgendo i prodotti si ha:

$$-6x+11x^2-6x^3+x^4=0.$$

b. un'equazione di terzo grado che abbia per soluzione -1.
Soluzione:
$(x+1)^3=0,$
da cui svolgendo il cubo di binomio si ha:

$$x^3-3x^2+3x-1=0.$$

c. un'equazione di terzo grado che abbia come unica soluzione -1.
Soluzione:

$$x^3+1=0$$

Da cui svolgendo la somma di cubi si ha:

$$(x+1)(x^2-x+1)=0.$$

4. Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.
   a. $4x^2+x-1=0$
   b. $4x^2+x+1=0$
   c. $4x^2+4x+1=0$
   d. $x^2-5=0$
   e. $3x^2+7=0$
   f. $5x^2+3x=0$
   g. $x^2-8x+15=0$

5. Risolvi le seguenti equazioni fratte.
   a. $\frac{3x}{2x-1}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x-2x^2}$
   b. $\frac{3}{2t^2}-\frac{\sqrt{2}}{t}=4$

6. Risolvi le seguenti equazioni algebriche mediante applicazione della legge di annullamento del prodotto e il metodo di Ruffini.
   a. $x^3-1=0$
   b. $(x^2+3x+2)(x+1)^2x^2=0$
   c. $5x^4-16=0$
   d. $2x^6+3x^3+1=0$

e. $-2x^4 + 2x^2 + 5 = 0$

f. $(x + 4)^5 = 0$

g. $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$