Lezione 6

Disequazioni algebriche – Equazioni con valori assoluti

6.1 Un quesito

Giovanni ha sostenuto 4 test che ha superato con le seguenti valutazioni: 76, 78, 79 e 81. Quale votazione deve ottenere nell'ultimo test al fine di avere una media superiore ad 80?

Disequazioni algebriche

Definizione:
Si dice **DISEQUAZIONE** in una incognita *x* ogni disuguaglianza del tipo:

$$A(x) > B(x)$$

Tra due espressioni nella lettera *x*, dove al simbolo > possono presentarsi $\geq, <$ e $\leq$.

I valori di *x* che soddisfano tale relazione vengono detti **soluzioni della disequazione**.

Tipi di disequazione:
Numerica: se non compaiono altre lettere oltre alle incognite (cioè i coefficienti sono numerici)
Letterale: se i coefficienti sono letterali
Razionale: se entrambi i membri sono espressioni razionali rispetto all'incognita
Intera: se entrambi i membri sono interi rispetto all'incognita
Fratta: se almeno uno dei membri non è intero rispetto all'incognita
Grado di una disequazione: massimo grado fra i gradi dei suoi termini, considerando solo gli esponenti dell'incognita.

Esempio 4.1

$x^3 - 3x + 4 > 0$

È una disequazione numerica, intera, razionale, di grado 3.

$3at + t - \frac{4}{a} < 0$

È una disequazione letterale, intera, razionale, di grado 1 nell'incognita *t*.

Disequazioni equivalenti

Si dice che due disequazioni sono equivalenti se ogni soluzione della prima è soluzione della seconda e viceversa.

Otteniamo una disequazione a partire da un'altra disequazione applicando i **principi di equivalenza**:
- **Addizionando** (o sottraendo) ad ambo i membri di una disequazione una stessa espressione (che *può contenere o meno l'incognita) si ottiene una disequazione equivalente a quella data:*

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$$

Esempio 4.1

$$4x + 9 > 0 \Leftrightarrow 4x + \cancel{9} - \cancel{9} > -9 \Leftrightarrow 4x > -9$$

- **Moltiplicando** i due membri di una disequazione per una stessa **espressione positiva** si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot C(x) > B(x) \cdot C(x) \ \wedge C(x) > 0$$

Se l'**espressione** è **negativa** si ottiene una disequazione equivalente solo **cambiando** il ">" in "<" e viceversa.

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot C(x) < B(x) \cdot C(x) \wedge C(x) < 0$$

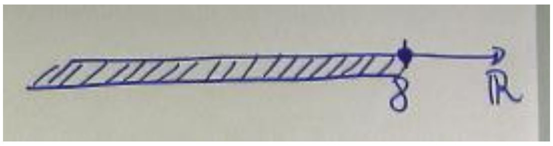
Osservazione importante
Dalla seconda condizione, detta anche **secondo principio di equivalenza**, segue che non è possibile eliminare il denominatore di una disequazione fratta come si è fatto per le equazioni, anche dopo aver posto la condizione che sia diverso da zero, perché in questo caso la soluzione dipende anche dal segno del denominatore.

Esempi

a. $32 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow 32 - 32 - 4x \geq -32 \Leftrightarrow x \leq \frac{32}{4} \Leftrightarrow x \leq 8$

$S = \{x \in R | x \leq 8\}$

$S = (-\infty, 8]$



b. $\frac{x-3}{37} > 0 \Leftrightarrow \; x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

$S = (3, \infty)$.

c. $\frac{x-3}{x-5} > 0 \not\Leftrightarrow x - 3 > 0$ anche ponendo $x \neq 5$

Infatti se si vuole moltiplicare ambo i membri della disequazione per l'espressione $x - 5$ è necessario considerarne il suo segno: se $x > 5$ l'espressione è positiva e quindi la disequazione è equivalente a $x - 3 > 0$, ma se $x < 5$ l'espressione è negativa e la disequazione è equivalente a $x - 3 < 0$. Vedremo in seguito come risolvere una disequazione di questo tipo.

Disequazioni di I grado in un'incognita

Definizione: si dice DISEQUAZIONE di I grado in un'incognita x ogni disequazione del tipo:

$$ax + b > 0 \text{ con } a, b \in R, a \neq 0$$

(Analoga trattazione $\geq, <, \leq$)

se $a > 0$ la disequazione è equivalente a: $x > -\frac{b}{a}$

se $a < 0$ la disequazione è equivalente a: $x < -\frac{b}{a}$

Esempi

a. $\frac{2x-5}{2} - \frac{3x-4}{3} < 0$

$\frac{3(2x-5) - 2(3x-4)}{6} < \frac{0}{6}$

$6x - 15 - 6x + 8 < 0$

$-7 < 0 \Rightarrow$ verificata $\forall x \in R$; $S = R$; $S = (-\infty, +\infty)$

b. $\frac{1}{2}(4x + 3) \geq 7 + 2x - \sqrt{3}$

$2x + \frac{3}{2} \geq 7 + 2x - \sqrt{3}$

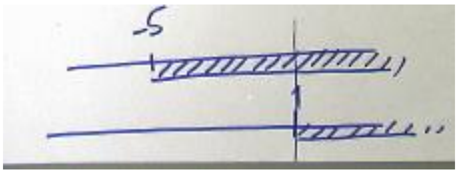
$-\frac{11}{2} + \sqrt{3} \geq 0$ *La disuguaglianza è falsa* $\forall x \in R$; $S = \emptyset$.

Sistemi di disequazioni

Determinare le soluzioni che sono comuni a 2 o più disequazioni nella stessa incognita *x* equivale a risolvere un sistema composto da più disequazioni.

Esempio

a. $\begin{cases} 2x+3>x-2 \\ x+2>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x>1 \end{cases}$



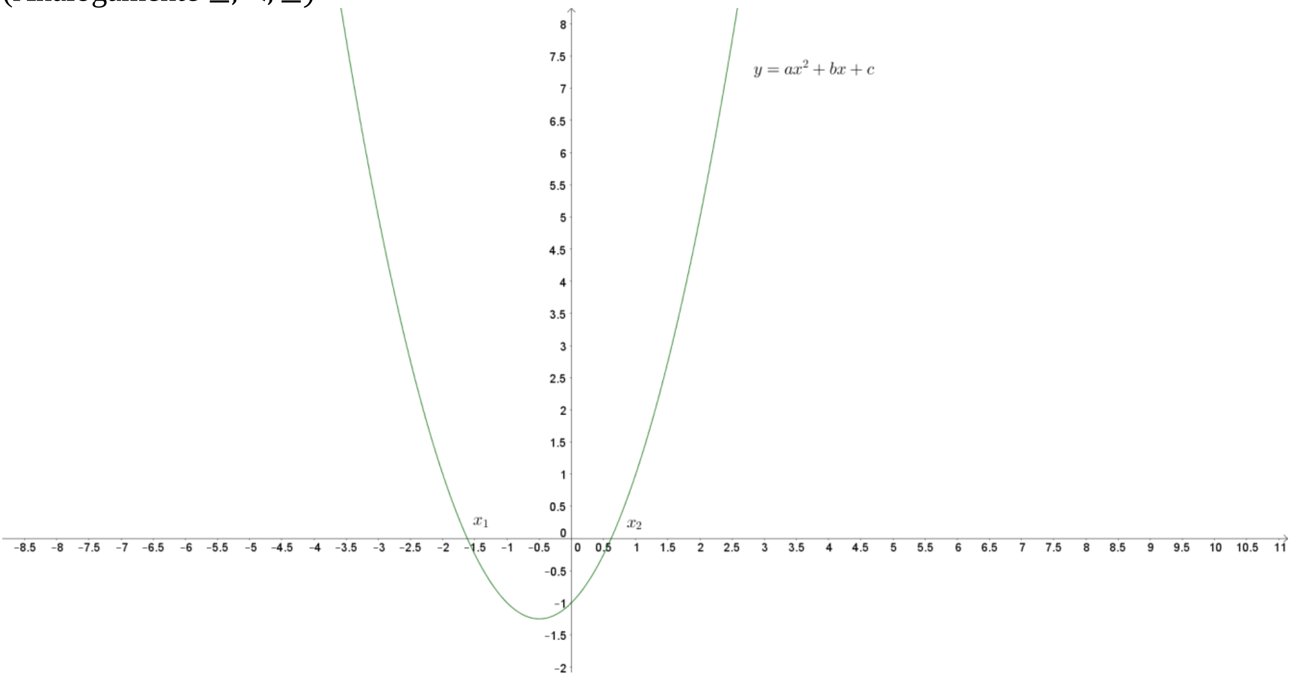
$S_1 = \{x \in R | x > -5\}$ e $S_2 = \{x \in R | x > 1\}$
$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in R | x > 1\} = (1, +\infty)$

Disequazioni di II grado in un'incognita

Definizione: si dice DISEQUAZIONE di II grado in un'incognita *x* ogni disequazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ con } a, b, c \in R, a \neq 0$$

(Analogamente $\geq, <, \leq$)



Possiamo risolvere una disequazione di II grado in diversi modi: uno di questi è il cosiddetto **metodo grafico** che consiste nell'associare alla disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ e delineare per quali valori di *x*, l'immagine *y* della parabola risulta essere positiva se ">", negativa se "<".

Esempio

a. $-x^2 + 7x < 0$ Disequazione di II grado, intera, razionale

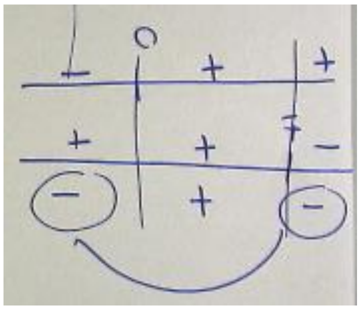
1° modo:

$-x^2 + 7x < 0$ è equivalente a $x(-x+7) < 0$ verificata quando i due fattori sono discordi ossia

$$\begin{cases} x>0 \\ -x+7<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ -x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>7 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x<7 \end{cases} \Leftrightarrow x > 7 \vee x < 0$$

I valori di *x* che soddisfano l'unione dei due sistemi si possono anche trovare

1) rappresentando sulla retta reale gli intervalli dove vale



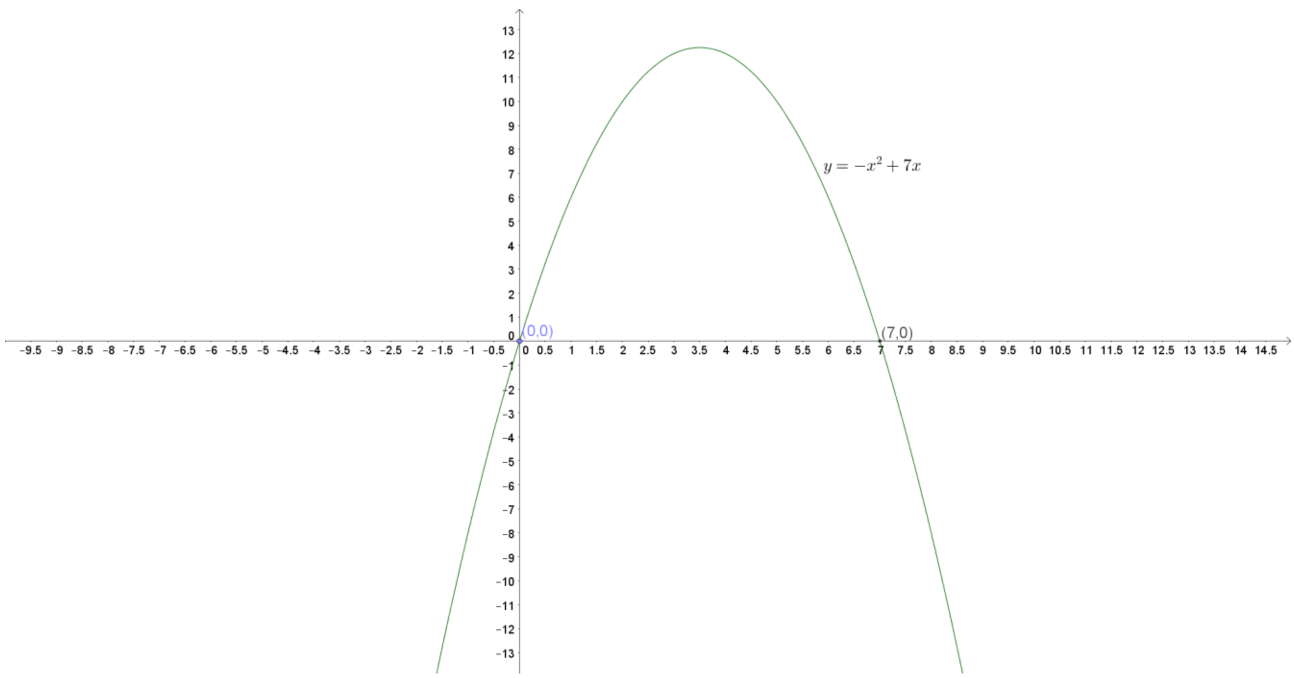
1° fattore positivo: $x > 0$
2° fattore positivo: $-x + 7 > 0 \Leftrightarrow -x > -7 \Leftrightarrow x < 7$

2) eseguendo il prodotto con la regola dei segni.

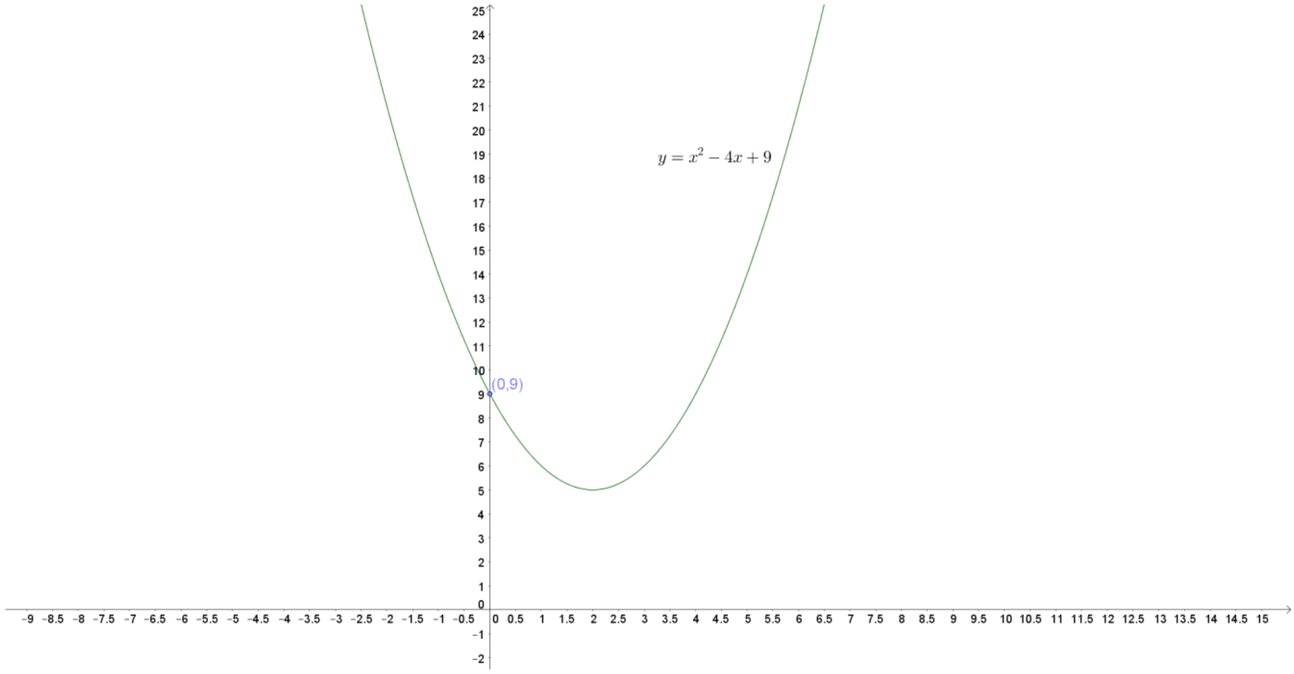
$$S = \{x \in R | x < 0 \vee x > 7\}$$

2° modo:
risolvere la disequazione $-x^2 + 7x < 0$ considerando la parabola associata $y = -x^2 + 7x$ quindi
1) trovare le intersezioni con l'asse x risolvendo l'equazione $-x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0{,}7$
2) rappresentare graficamente la parabola tenendo conto che $a = -1 < 0$ (concavità verso il basso).
La soluzione è

$$S = \{x \in R | x < 0 \vee x > 7\}$$

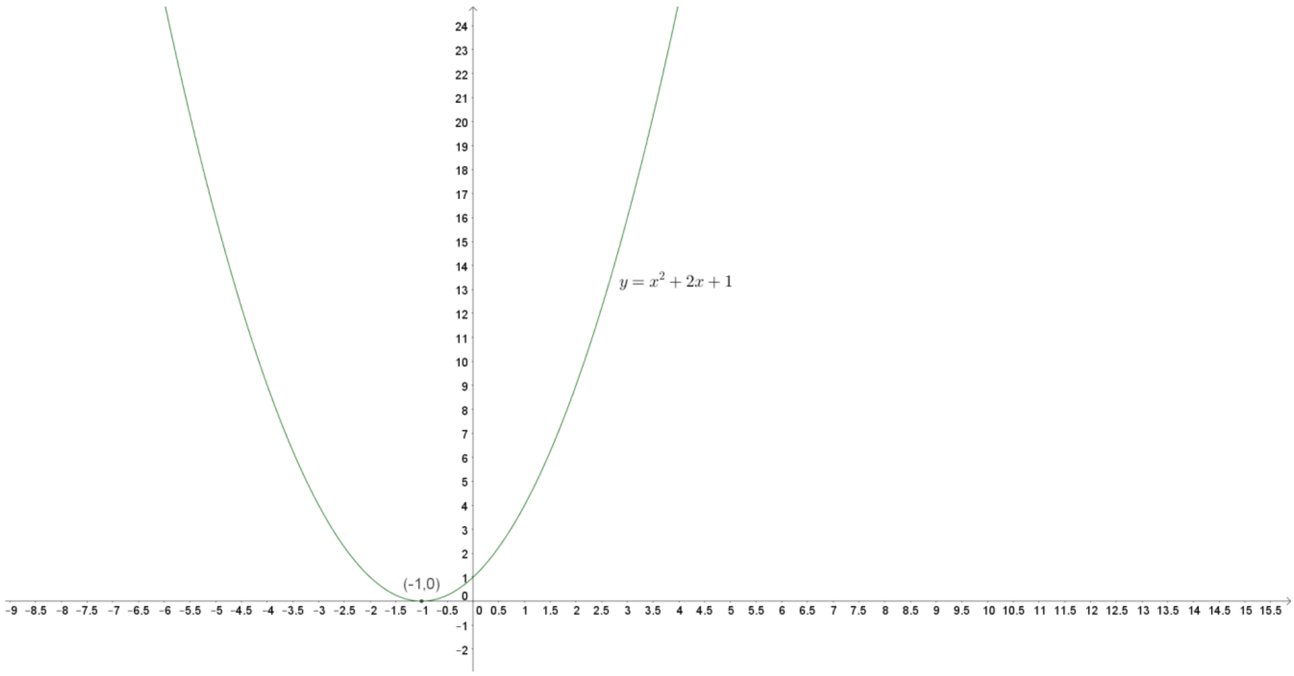


b. $2x^2 - 4 < 4(x-1) + (x+3)(x-3)$
Eseguendo le operazioni e semplificando si ha
$2x^2 - 4 < 4x - 4 + x^2 - 9$
$x^2 - 4x + 9 < 0$
Le soluzioni dell'equazione associata
$x^2 - 4x + 9 = 0$ non sono reali e la parabola associata di equazione $y = x^2 - 4x + 9$ è negativa per nessun valore reale di x.



La soluzione è S=∅.

c. $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ L'equazione associata ammette due soluzioni reali e coincidenti $x_{1,2} = -1$.
La disequazione è pertanto equivalente a $(x+1)^2 \leq 0$ e la parabola associata di equazione $y = (x+1)^2$ è negativa o nulla solo se $x = -1$.



La soluzione è S= $\{x \in R | x = -1\}$.

Disequazioni di grado qualsiasi o fratte

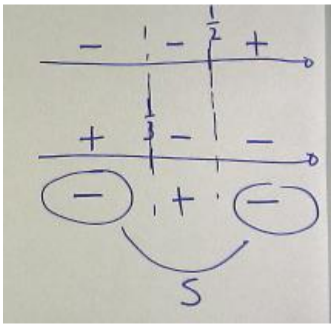
In generale una disequazione di grado maggiore di 1 si risolve in tre passi: 1) Riduzione alla forma $A(x) > 0 (<, \geq, \leq)$ usando i principi di equivalenza 2) Scomposizione $A(x)$ in fattori irriducibili: $A(x) > 0 \iff A_1(x) \cdot ... \cdot A_k(x) > 0 \quad (<, \geq, \leq)$

3) Studio del segno dei fattori e del loro prodotto
o risolvendo più sistemi (**sconsigliato**)
o per via grafica rappresentando sulla retta reale i segni dei fattori (**consigliato**)

Esempio

$$(2x-1)(1-3x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1>0\\1-3x<0\end{cases} \vee \begin{cases}2x-1<0\\1-3x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \vee x<\frac{1}{3}$$

In alternativa si può analizzare il segno dei due fattori



1° fattore positivo $\longrightarrow 2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

2° fattore positivo $\longrightarrow 1-3x>0 \Rightarrow -3x>-1 \Rightarrow x<\frac{1}{3}$

$$S=\left\{x\in R \mid x<\frac{1}{3} \vee x>\frac{1}{2}\right\}=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

In generale una disequazione fratta si tratta come una di grado maggiore di 1 seguendo i passi:

1) Riduzione alla forma $\frac{A(x)}{B(x)}>0(<,\geq,\leq)$ usando i principi di equivalenza
2) Studio del segno del numeratore e del denominatore
o risolvendo più sistemi (**sconsigliato**)
o per via grafica rappresentando sulla retta reale i segni di $A(x)$ e di $B(x)$ (**consigliato**)

Osservazione importante: la differenza con una disequazione non fratta si ha solo nei casi di $\geq,\leq$ per i quali il denominatore, non potendo essere nullo, è sempre comunque ">0" o "<0".

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}A(x)>0\\B(x)>0\end{cases} \vee \begin{cases}A(x)<0\\B(x)<0\end{cases}, \quad \frac{A(x)}{B(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}A(x)\geq 0\\B(x)>0\end{cases} \vee \begin{cases}A(x)\leq 0\\B(x)<0\end{cases}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}A(x)>0\\B(x)<0\end{cases} \vee \begin{cases}A(x)<0\\B(x)>0\end{cases}, \quad \frac{A(x)}{B(x)}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}A(x)\geq 0\\B(x)<0\end{cases} \vee \begin{cases}A(x)\leq 0\\B(x)>0\end{cases}$$

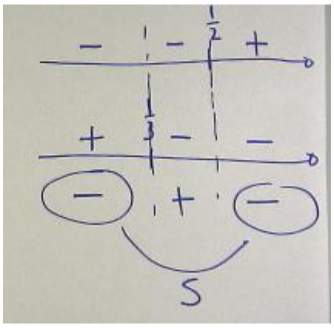
Esempio

$$\frac{2x-1}{1-3x}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1>0\\1-3x<0\end{cases} \vee \begin{cases}2x-1<0\\1-3x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{3}\end{cases} \vee \begin{cases}x<\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \vee x<\frac{1}{3}$$

In alternativa si può analizzare il segno dell'espressione razionale

$$\frac{2x-1}{1-3x}$$

studiando il segno del numeratore e del denominatore attraverso la rappresentazione sulla retta reale.



Numeratore positivo: $A(x)>0 \quad \longrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Denominatore positivo: $B(x)>0 \quad \longrightarrow 1-3x>0$
$-3x>-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$

$$S=\left\{x\in R \mid x<\frac{1}{3} \vee x>\frac{1}{2}\right\}=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

Applicazione del quesito 6.1

Per determinare il quinto voto necessario per far sì che Giovanni abbia una media superiore ad 80, calcoliamo la somma dei quattro voti più il quinto, che scriviamo sotto forma di variabile *x:*

$\frac{76+78+79+81+x}{5} > 80$

ossia

$\frac{314+x}{5} > 80$

ossia $314 + x > 400$

da cui $x > 86$.

Sistemi di disequazioni in due incognite e interpretazione grafica

6.2 Un quesito

Un'impresa produce due tipi di **televisori A e B**. La capacità della linea di produzione **A** è di **60 pezzi/giorno** e quella della linea **B 50 pezzi/giorno**. Un televisore di tipo **A** richiede **1 ora di manodopera**, quello di tipo **B** richiede **2 ore**. E' a disposizione un **massimo** di **120 ore di manodopera/giorno** da utilizzare per la produzione di A e B.

Rappresentare graficamente le possibili soluzioni di produzione giornaliera dell'impresa.

Sistema di *n* disequazioni lineari in due incognite x e y

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_n \geq 0 \end{cases}$$

(al posto di $\geq$ ci può essere anche per $>$, $<$, $\leq$)

Esempio

$$3x + 2y + 1 \geq 0$$

Disequazione di I grado nelle incognite *x* e *y*.

Possono associare l'equazione della retta *r*: $3x + 2y + 1 = 0$ che è la frontiera della regione ***S*** i cui punti risolvono il soluzioni.

Disegniamo la retta $3x + 2y + 1 = 0$, troviamo i punti di intersezione con gli assi coordinati:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Prendiamo un qualunque punto, ad esempio O(0,0), e verifichiamo se soddisfa la disequazione:

$$x = 0 \quad y = 0$$

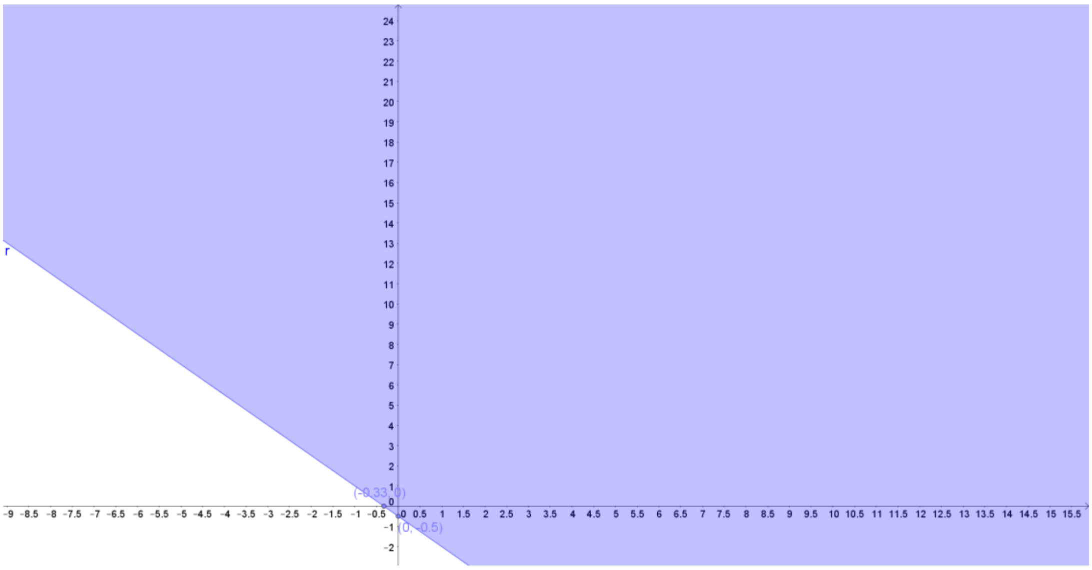
$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \geq 0$$

$6 \geq 0$ è VERA

quindi la disequazione $3x + 2y + 1 \geq 0$ individua

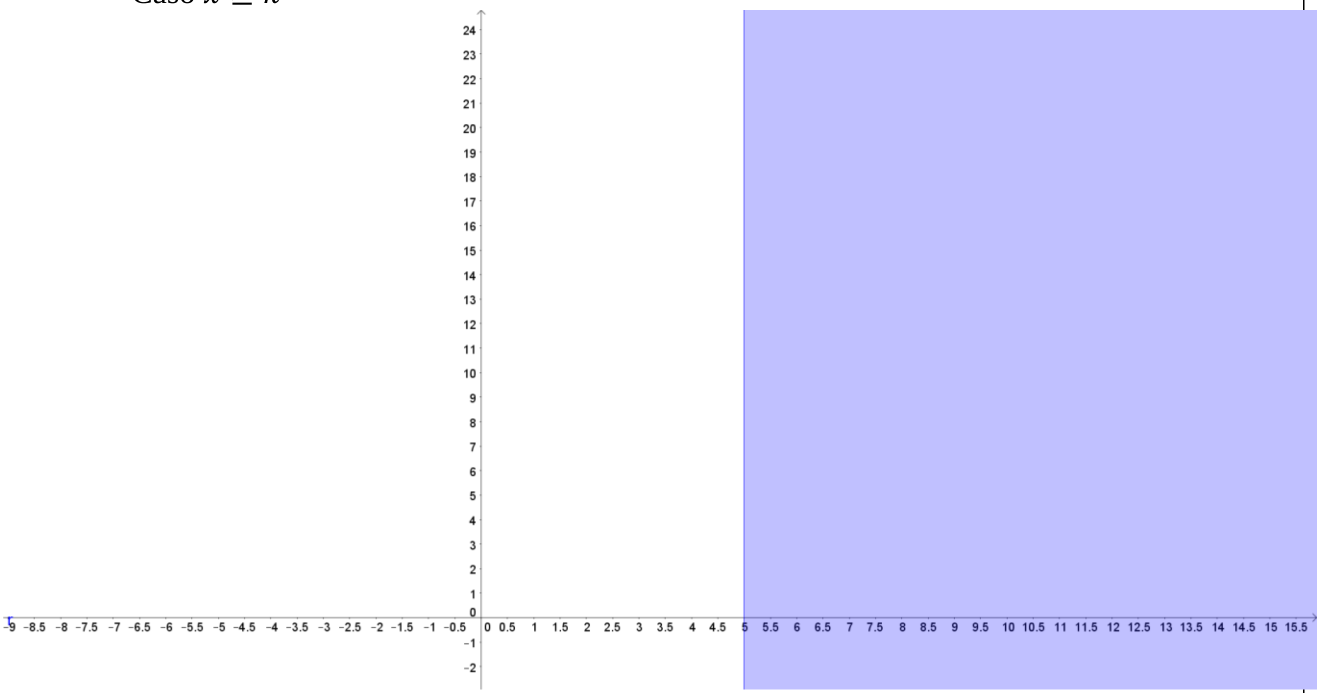
il semipiano determinato dalla retta $3x + 2y + 1 = 0$ e contenente l'origine O(0,0)



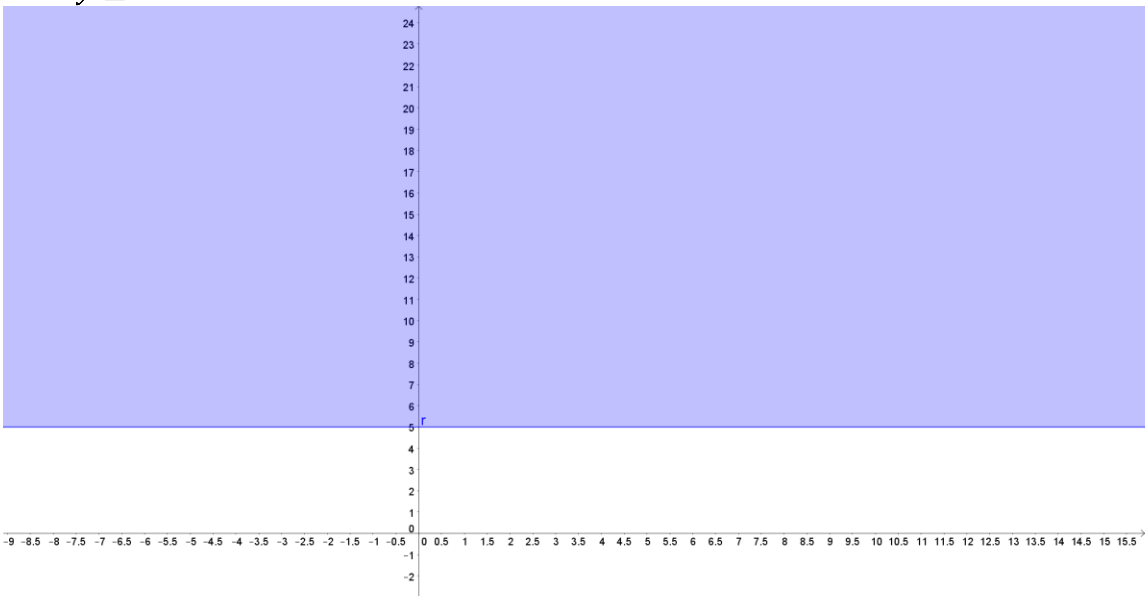
Essendo presente nella disequazione $\geq$, allora soddisfano la disequazione anche tutti i punti appartenenti alla retta $3x + 2y + 1 = 0$.

Casi particolari

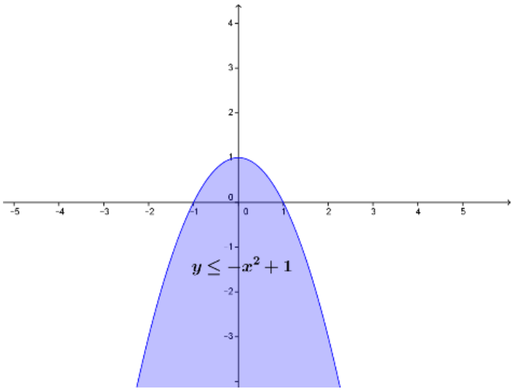
Caso $x \geq k$



Caso $y \geq k$



Caso $y \leq ax^2 + bx + c$



Esempio

a. $y \geq 3x^2 + 2x + 1$

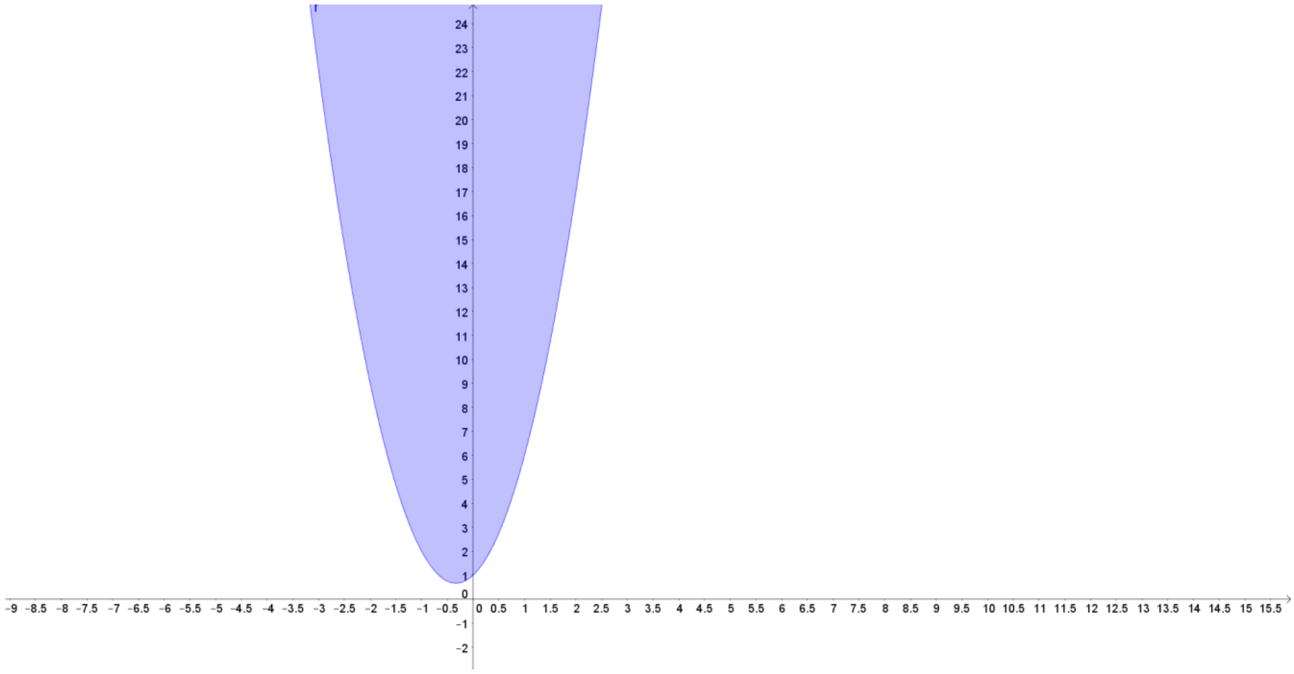
Passiamo all'equazione associata $y = 3x^2 + 2x + 1$ (equazione parabola)

$\Delta < 0$ quindi la parabola non interseca l'asse x; essendo il coefficiente $a = 3 > 0$, la concavità è verso l'alto quindi la parabola giace nel semipiano positivo delle y.

Per capire quale regione soddisfa la disequazione, prendiamo un punto qualsiasi, per esempio (0,0), e verifichiamo se soddisfa la relazione $y \geq 3x^2 + 2x + 1$ ossia

$$y = 0 \qquad x = 0$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$0 \geq 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \quad NO \quad 0 \ngeq 1$$

quindi la regione che soddisfa la relazione $y \geq 3x^2 + 2x + 1$ è quella che non contiene (0,0).



b. $\begin{cases} y \le -x^2+1 \\ x+y \le 3 \\ x \ge 1 \end{cases}$

Si rappresentano le soluzioni delle diverse disequazioni separatamente o poi si confrontano in un unico grafico finale.

1) $y \le -x^2+1$ regione piano delimitata dalla parabola di equazione

$$y = -x^2+1 \Leftrightarrow y = (1-x)(1+x)$$

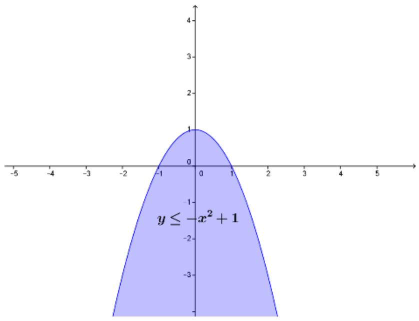
quindi la parabola

- interseca l'asse delle *x* nei punti $x = \pm 1$
- ha l'asse di simmetria parallelo all'asse *y*
- ha la concavità rivolta verso il basso poiché $a = -1$

Per determinare la regione di piano prendiamo un punto qualsiasi, per esempio (0,0), e sostituiamo le sue coordinate nella relazione $y \le -x^2+1$:

$$\begin{array}{cc} y = 0 & x = 0 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$0 \le -0+1 \quad \text{SI}$$

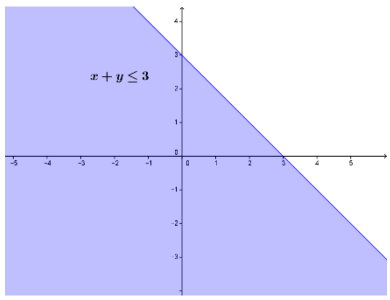
quindi la regione che soddisfa la relazione $y \le -x^2+1$ è quella che contiene (0,0).



2) $x+y \le 3$ regione piano delimitata dalla retta di equazione :

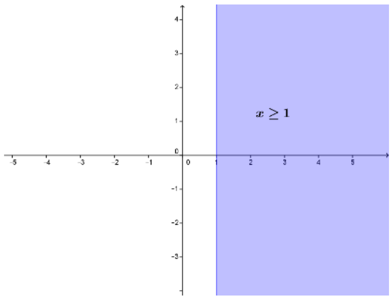
$$x+y = 3 \;\Leftrightarrow\; y = -x+3$$

La retta è la bisettrice 2°- 4° quadrante traslata verso l'alto di 3.
Quale semipiano soddisfa la condizione?
Sostituiamo un qualsiasi punto, per esempio il punto (0,0), in $x+y \le 3$ è otteniamo che la relazione è VERA;
infatti $0+0 \le 3$.

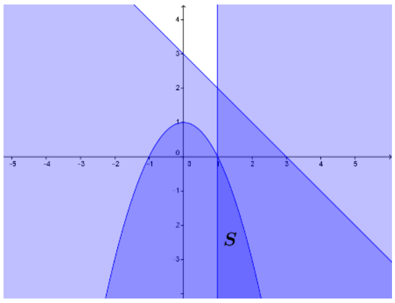


3) $x \geq 1$ regione piano delimitata dalla retta di equazione:

$$x = 1$$



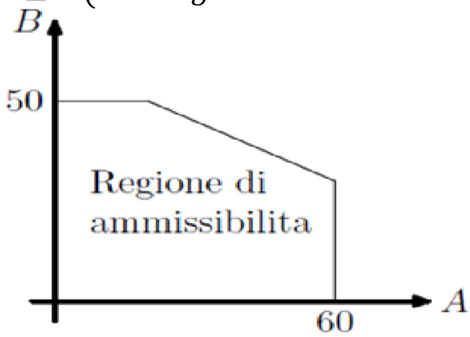
Riportando in un unico grafico le tre regioni si trova la loro intersezione ***S*** i cui punti verificano il sistema in quanto tutte e tre le relazioni sono verificate.



Applicazione del quesito 6.2

Dette *A* e *B* le produzioni giornaliere di televisori A e B si ha:

$$A \leq 60 \ (vincolo\ di\ capacità\ della\ linea\ A)$$
$$B \leq 50 \ (vincolo\ di\ capacità\ della\ linea\ B)$$
$$A + 2B \leq 120 \ (vincolo\ di\ manodopera)$$
$$A, B \geq 0 \ (non\ negatività\ delle\ variabili)$$



Quesiti

1. Risoluzione di disequazioni algebriche di 1° e 2° grado a coefficienti numerici.
    a. $4x + 9 > 0$
    b. $32 - 4x \geq 0$
    c. $\frac{x-3}{37} > 0$
    d. $14x + 7 < 0$
    e. $\frac{2x-5}{2} - \frac{3x-4}{3} < 0$
    f. $\frac{1}{2}(4x + 3) \geq 7 + 2x - \sqrt{3}$
    g. $-x^2 + 7x < 0$
    h. $x^2 - x \leq 2$
    i. $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$
    j. $2x^2 - 4 < 4(x - 1) + (x + 3)(x - 3)$

2. Risoluzione di disequazioni fratte

a. $\frac{x-3}{x-5} > 0$
b. $\frac{2x-1}{1-3x} < 0$
c. $2x + 1 \geq 3 + \frac{4x^2}{2x+5}$
d. $\frac{2}{x-1} \geq -1$
e. $\frac{2x+x^2+1}{x^2-1} > 0$
f. $\frac{x}{x-6} - \frac{x+3}{5} \leq \frac{6+x}{6-x}$

3. Risoluzione di semplici sistemi di disequazioni algebriche in 1 o 2 variabili

a. $\begin{cases} 2x + 3 > x - 2 \\ x + 2 > 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 1 \geq 4x - 3 \\ x < 2x + 4 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x^2 + x - 5 < 0 \\ \frac{2}{1-2x} \geq 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y \leq -x^2 + 1 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y \leq 3 \\ 4 - y^2 > 0 \\ 8x + 2y + 8 > 0 \end{cases}$

Equazioni con valore assoluto

Equazioni con valore assoluto

Definizione: $\forall x \in R$ si dice **valore assoluto** o **modulo** di x il numero non negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In una equazione o disequazione è necessario applicare questa definizione quando la x compare all'interno di valori assoluti.

Definizione: Una equazione con valore assoluto è una equazione in cui l'incognita si presenta all'interno di un valore assoluto.

Esempi

a. $|x + 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 5 & \text{se } x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3) = 5 & \text{se } x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{se } x \geq -3 \longrightarrow x = 2 \\ x = -8 & \text{se } x < -3 \longrightarrow x = -8 \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è $S = \{2,8\}$.

b. $|x+3| = x^2-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = x^2-5 & \text{se } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) = x^2-5 & \text{se } x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-8=0 & \text{se } x \geq -3 \\ x^2+x-2=0 & \text{se } x < -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \cong -2.37\,, 3.37 \;\; \text{se } x \geq -3 \longrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = 1\,, -2 \quad \text{se } x < -3 \qquad \longrightarrow x = 1\,, -2 \text{ non accettabili} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è $S = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$.

c. $|7x^2-4| = -5$

Poiché $|7x^2-4| \geq 0$ l'equazione è impossibile $\Rightarrow S = \emptyset$

d. $3|4x^2-2x+2| + 105 = 0$

$3|4x^2-2x+2| = -105 \Leftrightarrow |4x^2-2x+2| = -\dfrac{105}{3}$

Poiché $|4x^2-2x+2| \geq 0$ l'equazione è impossibile $\Rightarrow S = \emptyset$

e. $4|x-5| = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5\}$

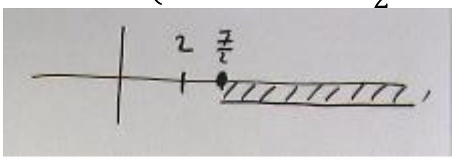
f. $|2x-1| = 1$

$\begin{cases} 2x-1 = 1 & \text{se } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) = 1 & \text{se } 2x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \longrightarrow x = 1 \\ x = 0 & \text{se } x < \frac{1}{2} \longrightarrow x = 0 \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è $S = \{0,1\}$

g. $|2x-7| = 1-2x$

$\begin{cases} 2x-7 = 1-2x & \text{se } 2x-7 \geq 0 \\ -2x+7 = 1-2x & \text{se } 2x-7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{se } x \geq \dfrac{7}{2} = 3.5 & \longrightarrow x = 2 \text{ non è accettabile} \\ 7 = 1 & \text{se } x < \dfrac{7}{2} = 3.5 & \longrightarrow \text{impossibile} \end{cases}$



L'equazione non ha soluzione $\Rightarrow S = \emptyset$

Nel caso che i valori assoluti siano più di due:

$$|A(x)| + |B(x)| + \cdots = E(x)$$

si procede nel seguente modo:

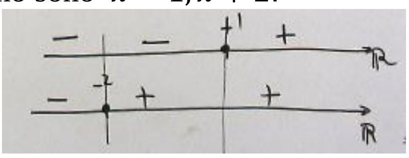
1. Si studiano i segni delle espressioni in | | stabilendo quando
$$A(x) > 0, < 0, = 0$$
$$B(x) > 0, < 0, = 0$$
2. Si riportano i segni sulla retta reale confrontano i segni nei diversi intervalli
3. Si risolvono in ciascun intervallo le equazioni ottenute togliendo i valori assoluti.
4. L'insieme delle soluzioni è data dall'unione delle soluzioni ottenute in ciascun intervallo.

Esempio:

$$|x-1| - 3|x+2| = x$$

Le espressioni di cui studiare il segno sono $x-1, x+2$:

$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$



$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

La retta reale risulta divisa in 3 intervalli quindi si devono risolvere 3 equazioni:

se $x \leq -2$ bisogna cambiare di segno ad entrambe le espressioni

$$-(x-1)+3(x+2)=x$$
$$-x+1+3x+6=x$$
$$x=-7 \in]-\infty,-2] \quad x=-7 \text{ è accettabile}$$

se $-2 \leq x \leq 1$ bisogna cambiare di segno all'espressione $x-1$

$$-(x-1)-3(x+2)=x$$
$$-x+1-3x-6=x$$
$$-5x=5$$
$$x=-1 \in [-2,1] \text{ è accettabile}$$

se $x \geq 1$ non si cambia nessun segno

$$(x-1)-3(x+2)=x$$
$$x-1-3x-6=x$$
$$-3x=7$$
$$x=-\frac{7}{3} \notin [1,+\infty[\text{ non è accettabile}$$

L'insieme delle soluzioni è $S=\{-1,-7\}$.