Lezione 7

Disequazioni con valori assoluti –Equazioni irrazionali

Disequazioni con Valori Assoluti

Definizione: Una disequazione con valore assoluto è una disequazione in cui l'incognita si presenta all'interno di un valore assoluto.

Le forme diverse con cui si può presentare una **disequazione** con | |:

(i) $|A(x)| > k, |A(x)| < k$ con $k \in R$

(ii) $|A(x)| > E(x)$

(iii) $|A(x)| + |B(x)| + \cdots > E(x)$

(Analogamente $\geq, <, \leq$)

Caso (i)

- $|A(x)| > k \quad , \quad k \in R$

  Se $k < 0$ la disequazione è verificata $\forall x \in R$

  Se $k = 0$ la disequazione è verificata $\forall x \in R, A(x) \neq 0$

  Se $k > 0$ $|A(x)| > k \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ -A(x) > k \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > k \end{cases} \Leftrightarrow A(x) < -k \vee A(x) > k$

Esempi:

a. $|x - 8| > -3 \longrightarrow S = R$

b. $|x + 3| > 0 \longrightarrow S = \forall x \in R = \{-3\}$

c. $|x| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -x > 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3 \longrightarrow S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

- $|A(x)| < k$

  Se $k \leq 0$ $S = \emptyset$

  Se $k > 0$ $\begin{cases} A(x) \leq 0 \\ -A(x) < k \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < k \end{cases} \Leftrightarrow -k < A(x) < k$

Esempi:

a. $|x - 7| \leq -3 \longrightarrow S = \emptyset$

b. $|x + 3| \leq 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \longrightarrow S = \{-3\}$

c. $|x| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -x < 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 3 \longrightarrow S = (-3,3)$

Caso (ii)

- $|A(x)| > E(x)$

$$\begin{cases} A(x) \leq 0 \\ -A(x) > E(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > E(x) \end{cases}$$

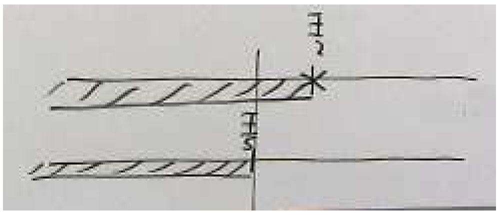
- $|A(x)| < E(x)$

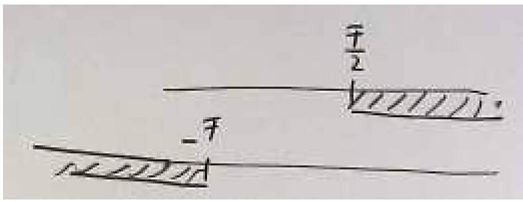
$$\begin{cases} A(x) \leq 0 \\ -A(x) < E(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < E(x) \end{cases}$$

Esempi:

$$|2x - 7| > 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \leq 0 \\ -(2x - 7) > 3x \end{cases} \cup \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ 2x - 7 > 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le \frac{7}{2} \\ x < \frac{7}{5} \end{cases} \cup \begin{cases} x \ge \frac{7}{2} \\ x < -7 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7}{5} \longrightarrow S = \left(-\infty, \frac{7}{5}\right)$$





Equazioni irrazionali

<u>Definizione</u>: Una equazione è detta essere **irrazionale** quando l'incognita *x* compare sotto un segno di radice.

Esempio:
$\sqrt{7x+2} = 3$ Equazione irrazionale

Vogliamo trasformare ogni equazione irrazionale in una equazione razionale in modo da ricavare l'incognita x.
Effettuiamo tale trasformazione attraverso l'operazione di **elevamento a potenza**.
Analizziamo i seguenti casi:

(i) $\sqrt[n]{A(x)} = k \in R$
(ii) $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$
(iii) $\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[m]{B(x)}$
(iiii) $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} = C(x)$

Dove $A(x), B(x), C(x)$ sono delle espressioni nell'incognita *x*.

<u>Vediamo nel dettaglio i vari casi:</u>
Caso (i) $\sqrt[n]{A(x)} = k \in R$
n **pari**: si impongono le C.E. della radice $A(x) \ge 0$ quindi
se $k \ge 0$ si trasforma l'equazione elevando ambo i membri all'indice della radice:

$$\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ A(x) = k^n \end{cases}$$

se $k < 0$ l'equazione è impossibile.
n **dispari**: indipendentemente dal valore assunto da $k \in R$ si eleva all'indice della radice.

Esempio:
$\sqrt[4]{x^2 - 16} = 2$
$\text{C.E.}: x^2 - 16 \ge 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) \ge 0 \ \Leftrightarrow]-\infty, 4] \cup [4, +\infty[$
$(x^2 - 16)^{\frac{1}{4}} = 2$
$\left[(x^2 - 16)^{\frac{1}{4}}\right]^4 = 2^4$
$(x^2 - 16)^{\frac{1}{4} \cdot 4} = 16$
$x^2 - 16 = 16 \Longrightarrow x^2 = 32 \Longrightarrow$ soluzioni $x = \pm 4\sqrt[4]{2}$ accettabili perché soddisfano il C.E.

Caso (ii) $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$

Distinguiamo i seguenti casi:
n **pari:** si impongono le C.E. $A(x) \geq 0$

se $B(x) \geq 0$ si trasforma l'equazione elevando ambo i membri alla potenza n-esima e si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x)^n \end{cases}$$

se $B(x) < 0$ l'equazione è impossibile $\longrightarrow\ S = \emptyset$

n **dispari**: si eleva alla potenza n-esima ambo i membri indipendentemente dal segno di $A(x)$ e $B(x)$

$$A(x) = B(x)^n$$

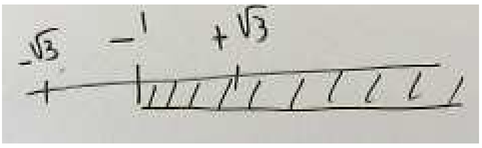
Esempio:

a. $\sqrt{2x+4} = x+1,\ n = 2$ pari

C.E.: $2x + 4 \geq 0$

$$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x+4 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -1 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x = +\sqrt{3} \text{ accettabile; } x = -\sqrt{3} \notin [-1, +\infty[$$



$$S = \{\sqrt{3}\}$$

Caso (iii) $\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[m]{B(x)}$

1. Si stabilisce il C.E. per verificare se l'equazione può avere soluzioni accettabili
2. Si trasforma l'equazione elevando ambo i membri al minimo comune multiplo $\mathrm{m.c.m}(m, n)$ in modo da ottenere un'equazione razionale senza radici
3. Si risolve l'equazione ottenuta che, in generale **non è equivalente** a quella data
4. Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione data per verificare quali sono le soluzioni accettabili.

Esempio:

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$$

1) C.E. : $x \geq 0$
2) $\mathrm{m.c.m.}\,(2{,}3) = 6$ quindi eleviamo a potenza sesta entrambi i membri dell'equazione

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6 \Leftrightarrow x^3 = x^2$$

3) $x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0\,, x = 1$
4) Le uguaglianze $\sqrt{0} = \sqrt[3]{0}$ e $\sqrt{1} = \sqrt[3]{1}$ sono entrambe verificate quindi i due valori trovati sono soluzioni dell'equazione data: $S = \{0{,}1\}$

Caso (iiii) $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} = C(x) \Leftrightarrow \sqrt{A(x)} = C(x) \mp \sqrt{B(x)}$

1. Si stabilisce il C.E. per verificare se l'equazione può avere soluzioni accettabili
2. Si elevano al quadrato i due membri una prima volta eliminando una radice
3. Si isola la radice rimasta e si elevano al quadrato i due membri una seconda
4. Si risolve l'equazione ottenuta che, in generale **non è equivalente** a quella data
5. Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione data per verificare quali sono le soluzioni accettabili.

Esempi:

a. $\sqrt{4x+1} = x + \sqrt{1-x}$

1) C.E. $\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq -1 \\ -x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{4} \\ x \leq 1 \end{cases}$ C.E.: $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$

2) $\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 = \left(x - \sqrt{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow 4x + 1 = x^2 + (1-x) + 2x\sqrt{1-x}$

3) $-2x\sqrt{1-x} = x^2 - 5x \Leftrightarrow x = 0 \vee -2\sqrt{1-x} = x - 5 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4(1-x) = (x-5)^2$

4) Una prima soluzione è $x = 0 \in \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$, le altre si ottengono risolvendo

$$4(1-x) = (x-5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 21 = 0 \longrightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{30}$$

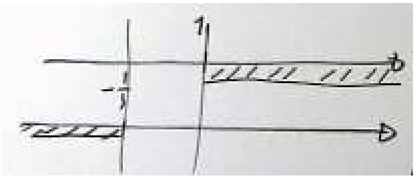
$3 - \sqrt{30} \cong -2.47 \notin \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ quindi non è accettabile,

$3 + \sqrt{30} \cong 8.47 \notin \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ quindi non è accettabile.

5) Sostituiamo nell'equazione $\sqrt{4x+1} = x + \sqrt{1-x}$ l'unico valore trovato che verifica le C.E.:
$x = 0 \rightarrow \sqrt{0+1} = 0 + \sqrt{1-0} \Leftrightarrow 1 = 1$ accettabile $\rightarrow S = \{0\}$.

b. $\sqrt{x-1} = x + \sqrt{-1-4x}$

C.E. $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ -1-4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -4x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{1}{4} \end{cases}$



C.E.$= \emptyset$

Tali condizioni non sono compatibili, $\nexists x \in R$ che soddisfa entrambe le C.E. dei radicali $\Rightarrow S = \emptyset$

Altri quesiti

1. Risoluzione di semplici equazioni irrazionali.
   a. $\sqrt[6]{x^2 - 16} = 0$
   b. $\sqrt[4]{2x+7} = 0$
   c. $\sqrt[8]{x - 8x^3} = -3$
   d. $\sqrt[3]{x+7} = 2$
   e. $\sqrt[5]{2x^4 - 4} = -1$
   f. $\sqrt[2]{2x+4} = x + 1$
   g. $\sqrt[2]{3-4x} = 2x + 1$
   h. $\sqrt[3]{x^3 - 3x} = x - 1$
   i. $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$
   j. $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt{1-x}$
   k. $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3-x} = 2$
   l. $\sqrt{x-1} = x - 5x - \sqrt{-1-4x}$
   m. $\frac{1-\sqrt{5-x}}{x+6} = -1$

2. Risoluzione di equazioni e disequazioni con valori assoluti.
   a. $|7x^2 - 4| = -5$
   b. $3|4x^2 - 2x + 2| + 105 = 0$
   c. $4|x-5| = 0$
   d. $|2x-1| = 1$
   e. $|2x-7| = 1 - 2x$
   f. $3x - |x^2 - 4| = 1$

g. $|x-1|-3|x+2|=x$
h. $|x+3|-\left|\frac{1-x}{2}\right|=3$
i. $|x-8|>-3$
j. $|x+3|>0$
k. $|x|>3$
l. $|x-7|\leq -3$
m. $|x+3|\leq 0$
n. $|x+2|<3$
o. $|x|<5$
p. $|2x-7|>3x$
q. $2x-|x^2-x|\leq 4$