Lezione 8

Geometria - *Luoghi geometrici e coniche*

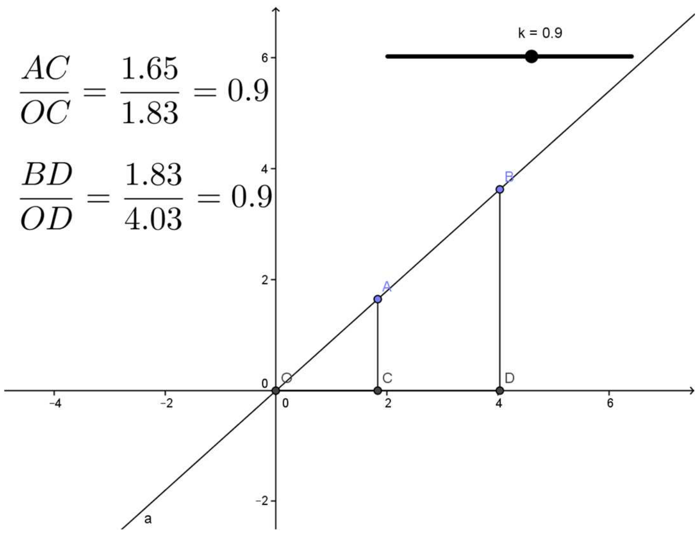
Un quesito
Come fare a determinare una figura geometrica attraverso le proprietà dei sui punti?

Definizione: si dice **luogo geometrico** l'insieme di tutti e soli i punti del piano o dello spazio che soddisfano una determinata proprietà.
Normalmente la proprietà è individuata da una relazione: =, >, <, ≥, ≤.

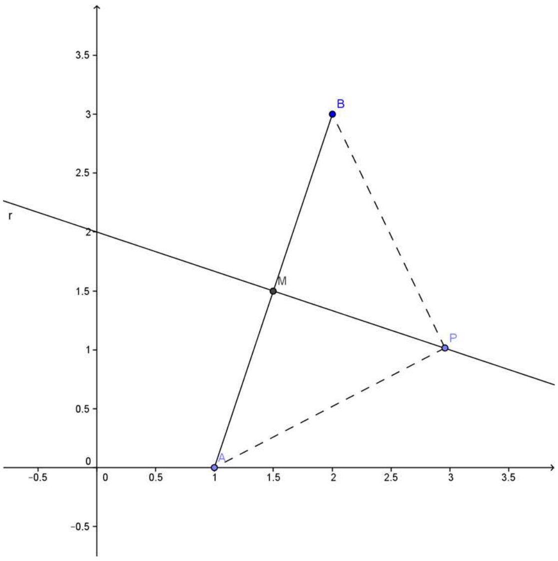
Per esempio, nel piano cartesiano un punto $P(a,b)$ appartiene ad un luogo geometrico se le sue coordinate soddisfano un'uguaglianza del tipo $F(x,y)=0$ ossia $F(a,b)=0$

Esempi

Retta nel piano cartesiano passante per l'origine e diversa da $x = 0$: luogo dei punti per il rapporto fra ordinata e ascissa è costante.
Se si fissa una costante k la retta determinata da k è data dai punti $P(x,y)$ che verificano l'uguaglianza: $\frac{y}{x} = k$



Asse di un segmento AB: luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi.
Se nel piano cartesiano si prende il segmento di estremi A(1,0) e B(2,3), l'asse è determinata dai punti $P(x,y)$ che verificano l'uguaglianza: $PA=PB$



Equazione del luogo geometrico

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$
$$(x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-3)^2$$
$$x^2+y^2-2x+1=x^2+y^2-4x-6y+13$$
$$x+3y-6=0 \leftrightarrow y=-\frac{x}{3}+2$$

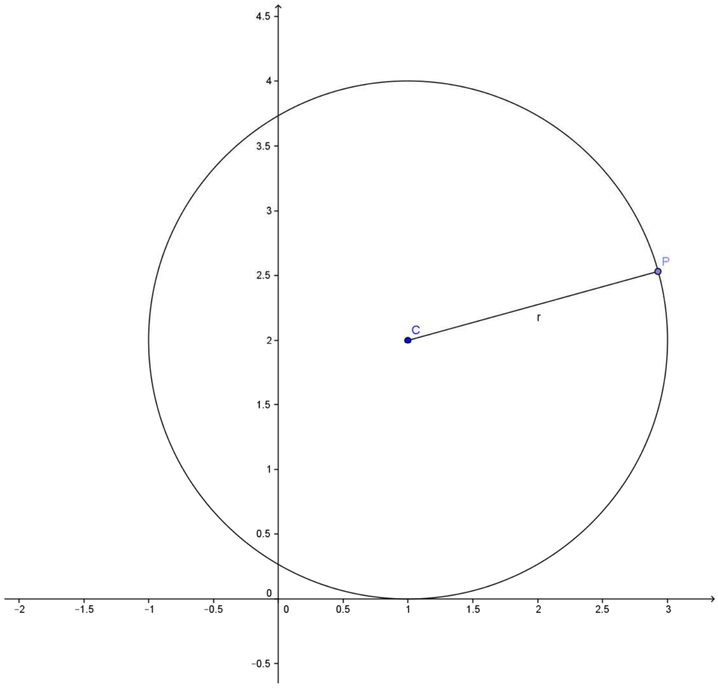
Retta passante per i punti (0,2) e (6,0) con coefficiente angolare -1/3.

Si può dimostrare che l'asse di un segmento AB è la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB.

1) Punto medio di AB: $M\left(\frac{1+2}{2},\frac{0+3}{2}\right)\rightarrow M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$
2) Coefficiente angolare di AB: $m=\frac{3-0}{2-1}=3$
3) Coefficiente angolare delle rette perpendicolari ad AB: $m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{3}$
4) Equazione della retta per $M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ con coefficiente angolare $m'=-\frac{1}{3}$

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\rightarrow y=-\frac{x}{3}+2$$

Circonferenza: luogo dei punti del piano aventi la stessa distanza *r* (raggio) da un punto C (centro). Se nel piano cartesiano si prende *C*(1,2) e *r*=2, la circonferenza è determinata dai punti *P*(*x*,*y*) che verificano l'uguaglianza: ***PC=r***



Equazione del luogo geometrico

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$
$$x^2+y^2-2x+4y-4=0$$

In generale, l'equazione di una circonferenza con centro nel punto *C*(*a*,*b*) e raggio *r* > 0 ha equazione

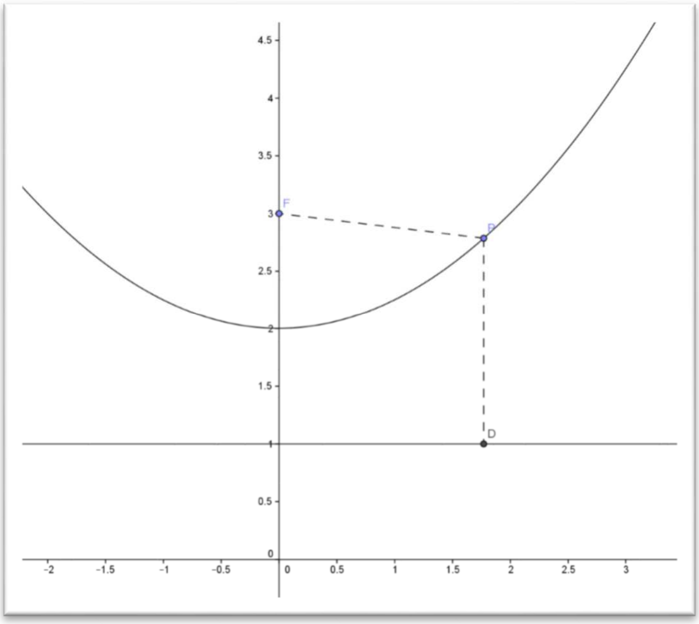
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ossia $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ con $r^2=a^2+b^2-c>0$

Se *r* = 0 la circonferenza si riduce ad un punto, il centro.

Parabola: luogo dei punti del piano aventi la stessa distanza *d* da un punto *F* (fuoco) e da una retta *r* (direttrice).

Se nel piano cartesiano si prende *F*(0,3) e *r*: *y* = 1, la parabola è determinata dai punti *P*(*x*,*y*) che verificano l'uguaglianza: *PF=PD* dove *D* è il punto della retta *r* più vicino al punto *P*.



Equazione del luogo geometrico

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}=y-1$$
$$x^2+y^2-6y+9=y^2-2y+1$$
$$y=\frac{x^2}{4}+2$$

In generale la **parabola con asse di simmetria parallelo all'asse *y*** è l'insieme dei punti del piano che soddisfano un'equazione del tipo:

$$y=ax^2+bx+c$$

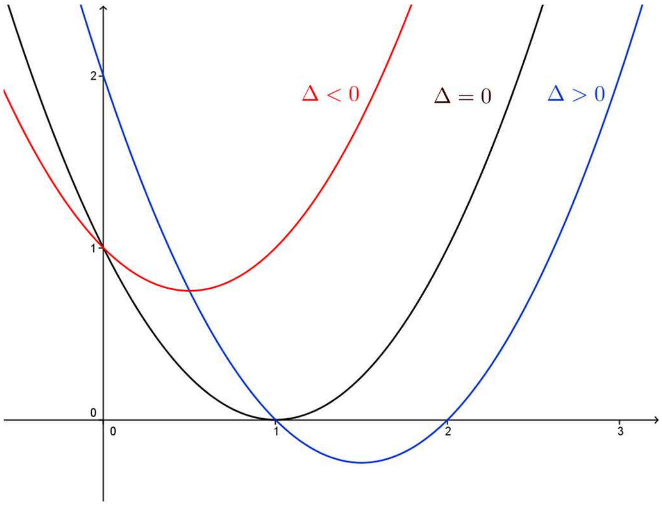
L'asse della parabola interseca la parabola in un punto *V* detto **vertice** di coordinate

$$V=\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$$

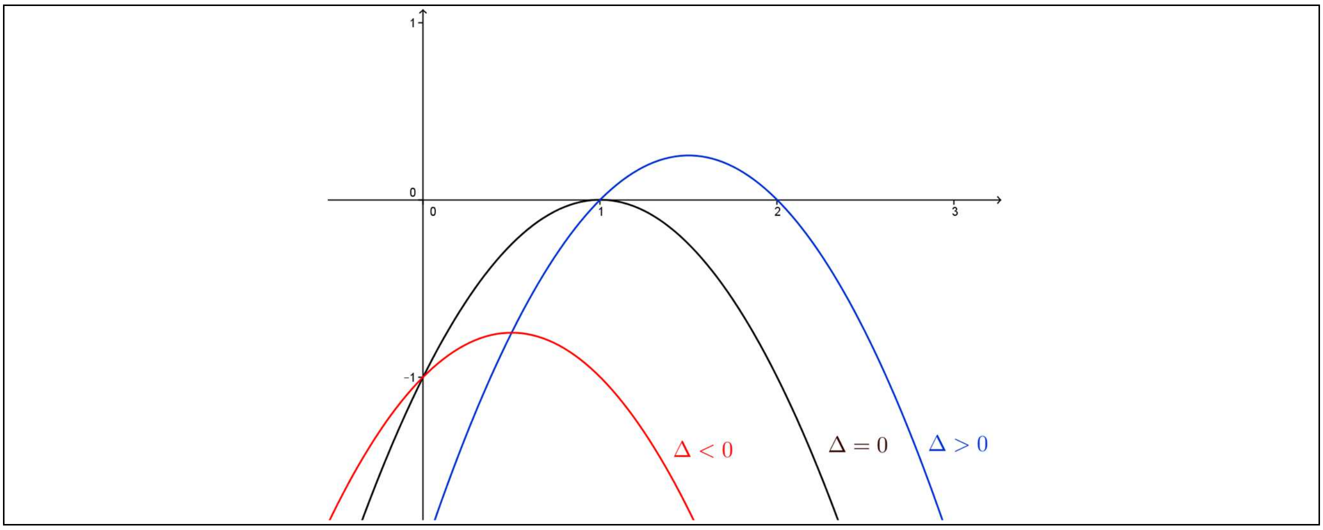
Le ascisse dei punti di intersezione, se esistono, della parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ con l'asse delle ascisse $(y=0)$ sono le soluzioni di un'equazione di 2° grado in una incognita *x*, infatti

$$ax^2+bx+c=0 \iff \begin{cases} ax^2+bx+c=y \\ y=0 \end{cases}$$

Se $a>0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto



se $a<0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso



Esempio

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Equazione di secondo grado in *x*, è l'equazione di una parabola, con asse di simmetria parallelo rispetto all'asse *y*. La concavità della parabola è ottenuta guardando il segno del termine di II grado in *x*. $2 > 0 \Rightarrow$ concavità rivolta verso l'alto. (se è negativo è verso il basso).

Andiamo a determinare le soluzioni dell'equazione di II grado associata:

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Corrisponde a determinare i punti di intersezione della parabola con l'asse *x* $(y = 0)$.

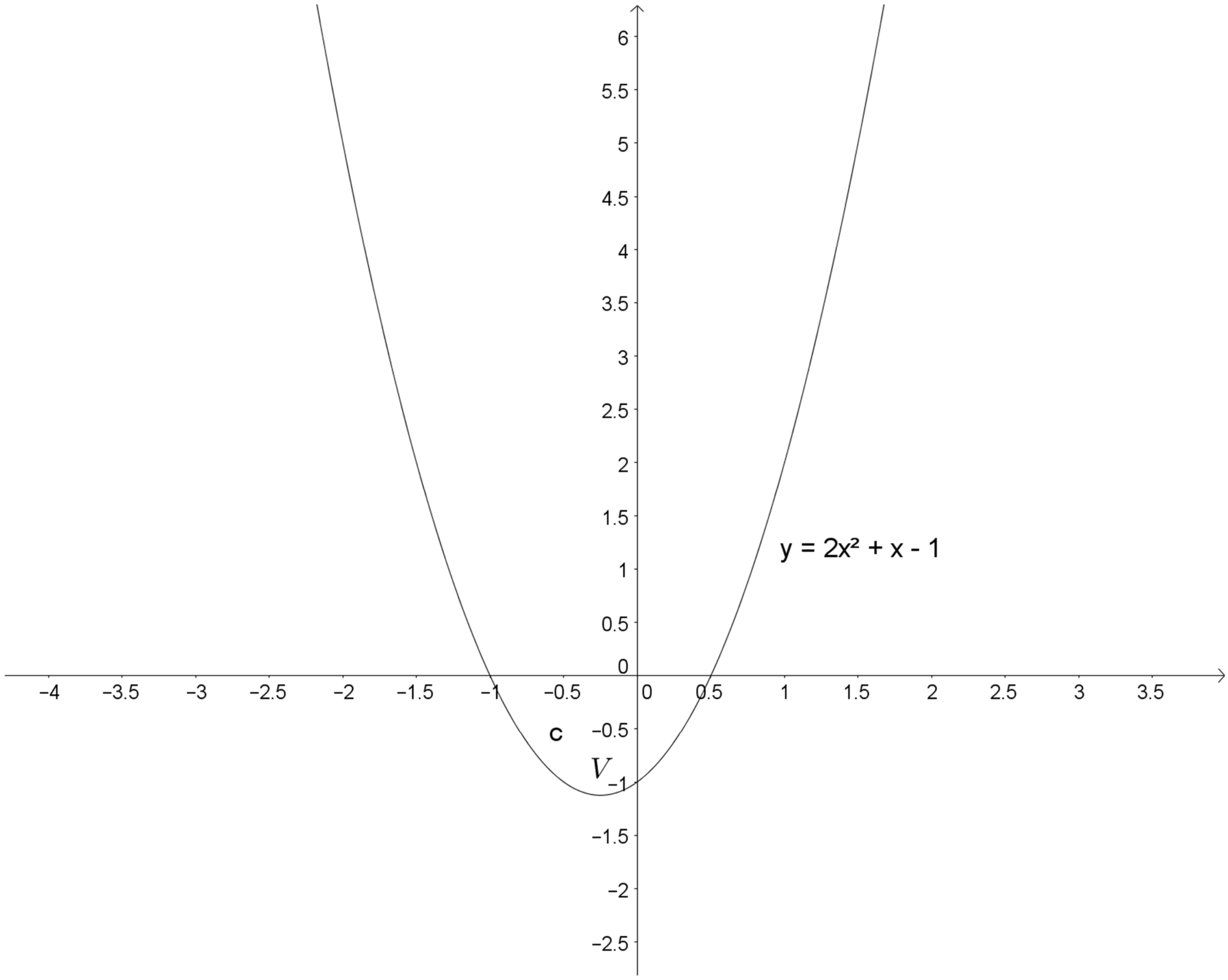
Calcoliamo i punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1+3}{4};\ \frac{-1-3}{4} = \frac{1}{2}; -1$$

Quindi, la parabola interseca l'asse *x* nei punti: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(-1{,}0)$

Calcoliamo il vertice della parabola: ($a = 2,\ b = 1,\ c = -1$)

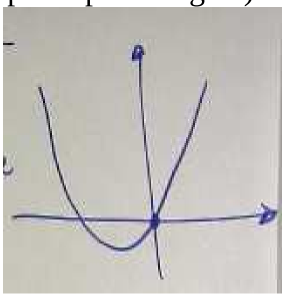
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$$



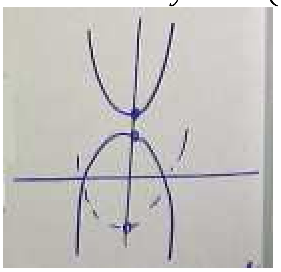
Casi particolari

Data una parabola $y = ax^2 + bx + c$

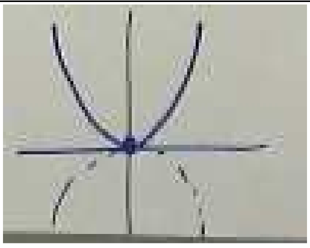
· $c = 0 \Rightarrow\ y = ax^2 + bx$ (la parabola passa per l'origine)



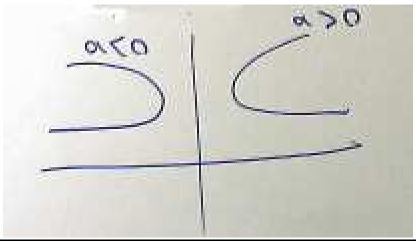
· $b = 0 \Rightarrow y = ax^2 + c$ (il vertice si trova sull'asse y $V = (0, c)$)



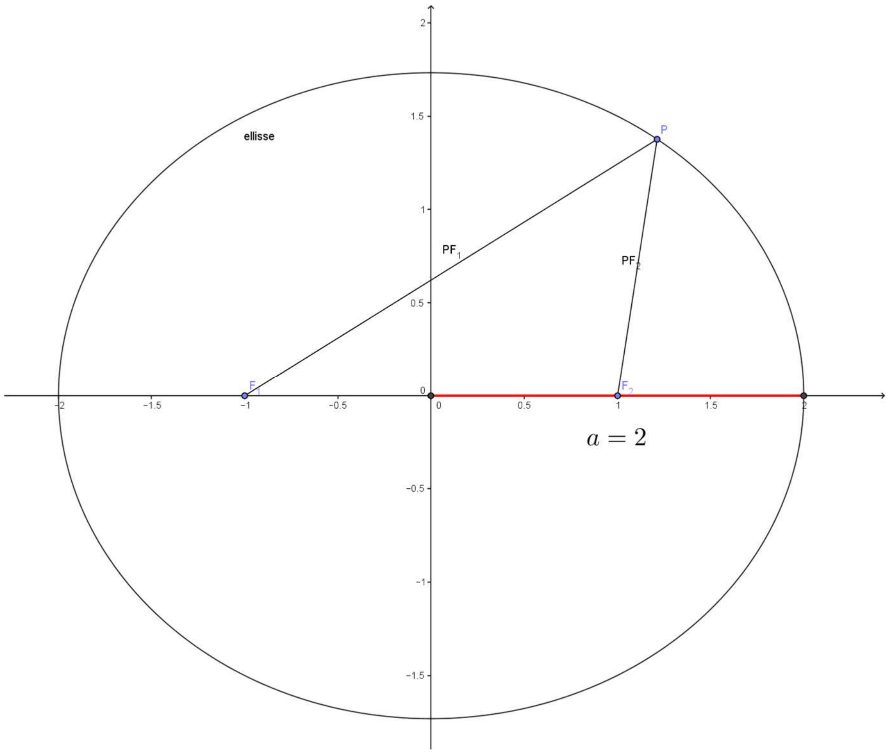
· $b = c = 0 \Rightarrow y = ax^2$ (il vertice è l'origine)



L’equazione $x = ay^2 + by + c$ rappresenta ancora una parabola con asse di simmetria parallelo all’asse *x*.



Ellisse: luogo dei punti del piano per cui la somma delle distanze da due punti fissati F_1 e F_2 (fuochi) è una costante d non negativa.
Se nel piano cartesiano si prende $F_1(-1,0)$ e $F_2(1,0)$ e d=4, l'ellisse è determinata dai punti $P(x,y)$ che verificano l'uguaglianza: $\boldsymbol{PF_1 + PF_2 = 2a}$ dove a è il semiasse.



Equazione del luogo geometrico

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$$
$$\sqrt{(x+1)^2(x-1)^2+(x+1)^2y^2+(x-1)^2y^2+y^4}=7-x^2-y^2$$
posto $7-x^2-y^2>0$
$$(x^2-1)^2+y^2(2x^2+2)+y^4=(7-x^2-y^2)^2$$
$$x^4-2x^2+1+2x^2y^2+2y^2+y^4=x^4+y^4+49+2x^2y^2-14x^2-14y^2$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$
Verifica di $7-x^2-y^2>0$:
$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\7-x^2-y^2>0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x^2=4-\frac{4y^2}{3}\\7-4+\frac{4y^2}{3}-y^2>0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x^2=4-\frac{4y^2}{3}\\3+\frac{y^2}{3}>0\ \text{Vero}\end{cases}$$

In generale, l'equazione di una ellisse con i fuochi $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ ossia appartenenti all'asse x e simmetrici rispetto all'origine ha equazione
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \text{Forma canonica o normale}$$
dove a e b sono i semiassi con $a^2-b^2=c^2$ e $a>b$.
Se i fuochi sono $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$ ossia appartenenti all'asse y e simmetrici rispetto all'origine si ha la stessa equazione con $b^2-a^2=c^2$ e $a<b$.
Se i fuochi coincidono con l'origine si ha $a=b$ ossia una circonferenza con centro l'origine e raggio a.

Esempi

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ è un'ellisse con i fuochi sull'asse x

$$a=2, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{2} \rightarrow F_1(-\sqrt{2},0), F_2(\sqrt{2},0)$$

Vertici: $V_1(-2{,}0), V_2(2{,}0), V_3(0,-\sqrt{2}), V_4(2,\sqrt{2})$

2) $12x^2+8y^2=2 \rightarrow 6x^2+4y^2=1$

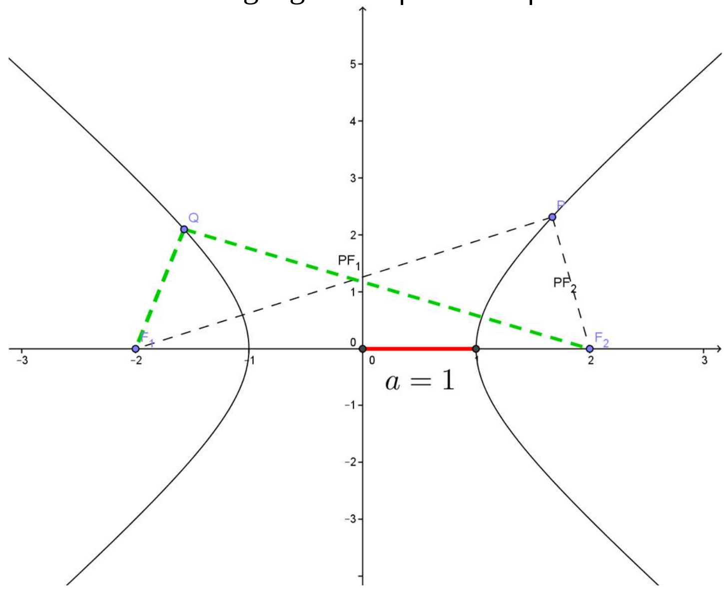
Forma canonica o normale di un'ellisse con i fuochi sull'asse y

$$a=\frac{1}{\sqrt{6}}, b=\frac{1}{2}, c=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow F_1\left(0,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right), F_2\left(0,\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Vertici: $V_1\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},0\right), V_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}},0\right), V_3\left(0,-\frac{1}{2}\right), V_4\left(0,\frac{1}{2}\right)$

Iperbole: luogo dei punti del piano per cui il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissati F_1 e F_2 (fuochi) è una costante d positiva.

Se nel piano cartesiano si prende $F_1(-2,0)$ e $F_2(2,0)$ e d=2, l'iperbole è determinata dai punti $P(x,y)$ che verificano l'uguaglianza: $|PF_1 - PF_2|=2a$ dove a>0



Equazione del luogo geometrico

$$\left|\sqrt{(x+2)^2+y^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right|=2$$

con passaggi algebrici analoghi a quelli per l'ellisse si ottiene

$$3x^2-y^2=3 \rightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

In generale, l'equazione di una iperbole con i fuochi $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ ossia appartenenti all'asse x e simmetrici rispetto all'origine ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ Forma canonica o normale}$$

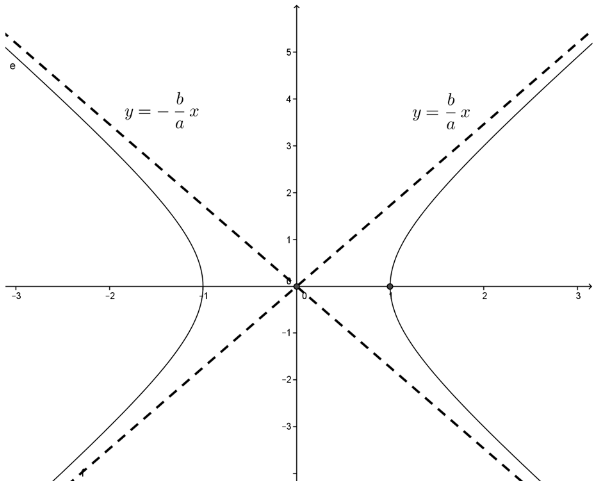
dove a e b sono tali che $a^2+b^2=c^2$.

Vertici: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\pm a\\ y=0\end{cases} \rightarrow V_1(-a,0)\ , V_2\ (a,0)$

Asintoti: $y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) \rightarrow y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm b\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$

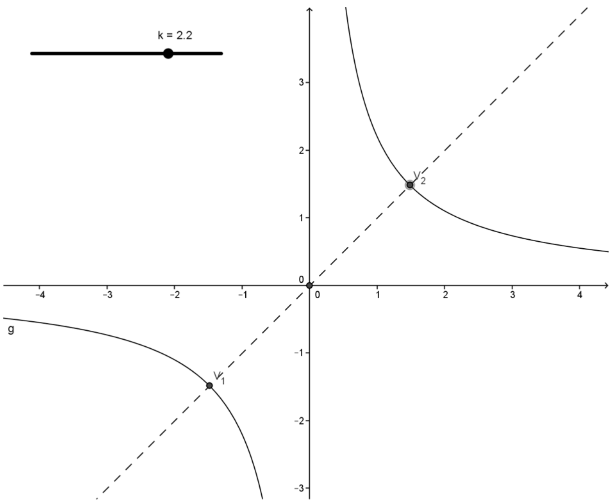
Per x tendente a infinito la radice tende a 1 quindi il grafico dell'iperbole si avvicina alle rette

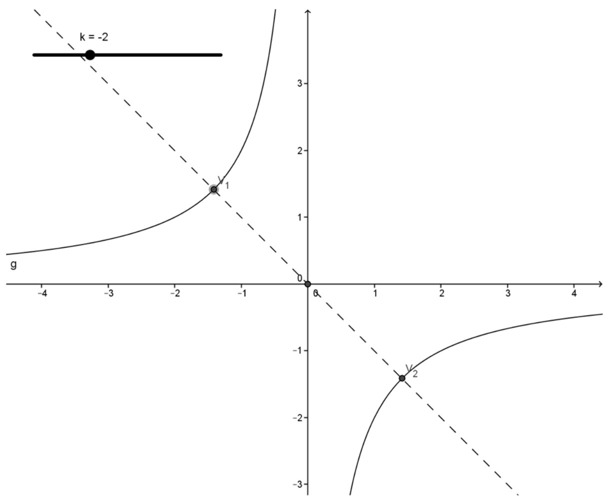
$$y = -\frac{b}{a}x \;\text{ e }\; y = \frac{b}{a}x$$



Iperbole equilatera: $x^2 - y^2 = a^2$, gli asintoti sono le rette $y = -x$ e $y = x$

Iperbole equilatera riferita agli asintoti: $y = \frac{k}{x}, k \in R$





Se i fuochi sono $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$ ossia appartenenti all'asse y e simmetrici rispetto all'origine si ha l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{Forma canonica o normale}$$

sempre con $a^2 + b^2 = c^2$.

Esempi

3) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ è un'iperbole con i fuochi sull'asse x

$$a = 1, b = 2, c = \sqrt{5} \rightarrow F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$$

Vertici: $V_1(-1,0), V_2(1,0)$
Asintoti: $y = -2x$, $y = 2x$

4) $12y^2 - 8x^2 = 2 \rightarrow 6y^2 - 4x^2 = 1$

Forma canonica o normale di un'iperbole con i fuochi sull'asse y

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{6}}, c = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \to F_1\left(0, -\frac{5}{12}\right), F_2\left(0, \frac{5}{12}\right)$$

Vertici: $V_1\left(0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), V_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

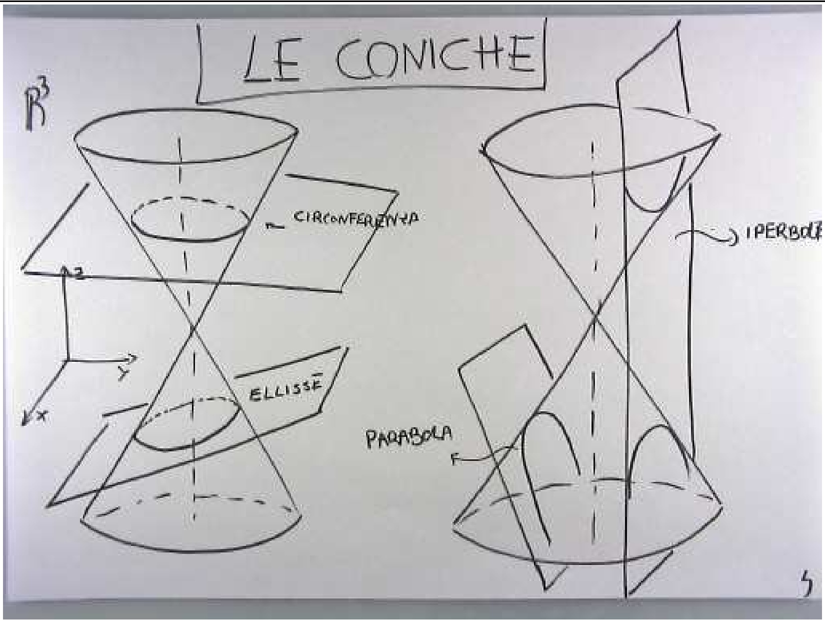
Asintoti: $y = -\frac{2}{\sqrt{6}}x\,, y = \frac{2}{\sqrt{6}}x$

5) $xy = 2 \to y = \frac{2}{x}$ iperbole equilatera con $k = 2$

Vertici: $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = x \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \to V_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})\ , V_2\ (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Asintoti: $y = 0, x = 0$

Le coniche



Definizione: una **sezione conica** o semplicemente **conica** è una curva piana ottenuta dall'intersezione di un cono circolare con un piano.

In generale l'equazione di una conica è del tipo

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

In funzione dei coefficienti a,b,c,d,e,f si hanno i diversi tipi di coniche:

non degeneri: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole ottenute dall'intersezione con un piano che non passa per il vertice del cono.

degeneri: coppie di rette, anche non distinte, ottenute dall'intersezione con un piano passante per il vertice del cono.

Esempi

6) Conica degenere: $y^2 + xy - x - y = 0 \leftrightarrow x(y-1) + y(y-1) = 0$

$$(x + y - 1)(y - 1) = 0 \leftrightarrow x + y - 1 = 0 \vee y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4x) = 0$$

si completano i binomi in modo da ricavare dei quadrati perfetti:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4x + 4) - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

è una circonferenza con centro nel punto (1,2) e raggio $r = \sqrt{5}$.

Quesiti

1. Sai individuare, tra le equazioni di seguito riportate, quali sono rappresentate nel piano cartesiano da rette, parabole, circonferenze, iperboli?

   a. $y-2x+1=0$ b. $x^2-y=1$ c. $x^2+1=0$ d. $x^2+y^2=1$

   e. $\frac{2}{x}-y=0$

   Sapresti rappresentarle nel piano cartesiano?

2. Considerata la parabola di equazione $y=2x^2+2x-4$ determina le coordinate del vertice, il fuoco e la direttrice.

3. Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(2;4)$ e raggio $r=2\sqrt{5}$, determina inoltre le coordinate dei punti d'intersezione della circonferenza con gli assi cartesiani.

4. La funzione di proporzionalità inversa ha equazione $y=\frac{k}{x}$ che nel piano cartesiano è rappresentata da un'iperbole equilatera riferita agli asintoti.
   Rappresenta la funzione di proporzionalità inversa nel caso in cui *k*=3.