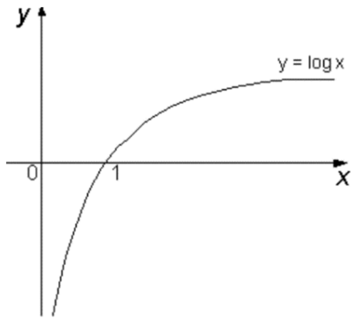
La Funzione esponenziale e la funzione logaritmica

Un quesito

1. Il seguente grafico è il grafico della funzione $y = \log_b x$, per $b > 0$?



Potenze con base reale ed esponente razionale

Una potenza a^x con $x \in Q, a \in R$ è definita per $a > 0$ perché, qualora si scegliesse $a \leq 0$, la potenza $a^{\frac{n}{m}}$ può non esistere.
Per esempio: per $a = 4$ la potenza $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} = \sqrt{4} = 2$ ma per $a = -4$ la potenza non esiste.
Un altro esempio: per $a = 0$ la potenza $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ non esiste.

Proprietà delle potenze

Consideriamo la potenza a^x $x \in Q$, $a \in R_0^+$ (reali positivi). Valgono le seguenti proprietà:

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $n \in N_0, m \in Z$ quindi per $m = 1$ si ha $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Esempi

a. $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[4]{2^{-3}}$

c. $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$ quindi $x^{\frac{2}{4}} = |x|^{\frac{1}{2}}$

d. $4^{x+2} = (2^2)^{x+2} = 2^{2x+4} = 16 \cdot 2^{2x}$

e. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 3^{-2x+1} = 3 \cdot 3^{-2x} = \frac{3}{3^{2x}} = \frac{3}{9^x}$

Funzione esponenziale

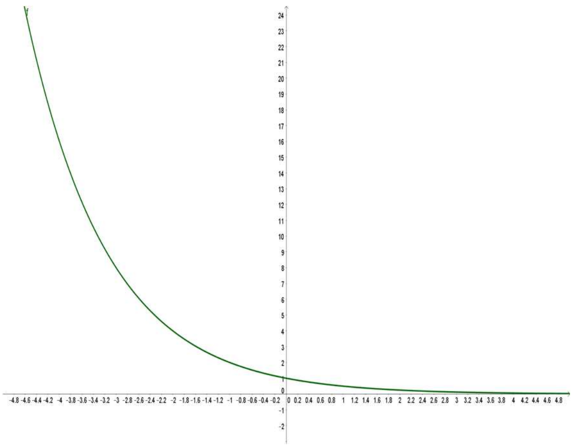
Esiste un teorema che garantisce l'esistenza del numero reale a^x dati $x \in R, a > 0$

Si dice **funzione esponenziale** una funzione del tipo:

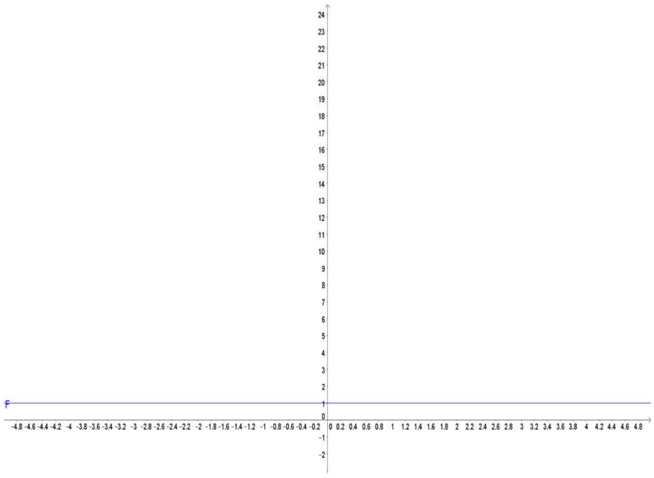
$$\forall x \in R \quad f(x) = a^x, a \in R_0^+$$

che associa ad ogni numero reale *x* un numero positivo rappresentato con a^x.
La funzione esponenziale è positiva per ogni *x* reale e il suo andamento dipende dal valore di a

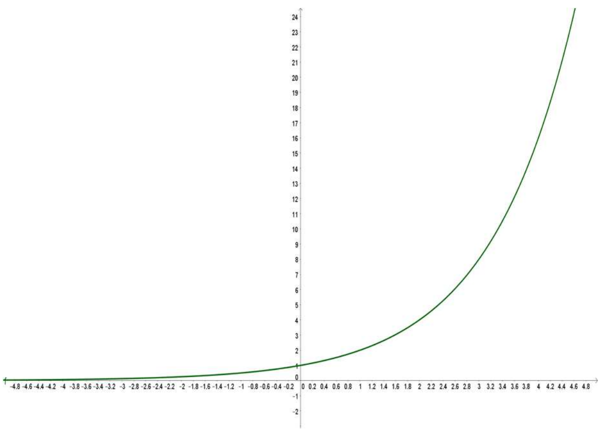
$0 < a < 1$



$a = 1$



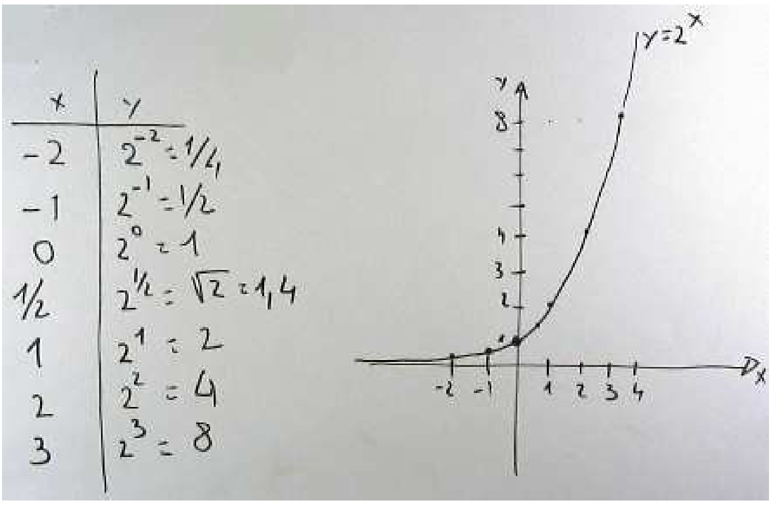
$a > 1$



Nota: $f(0) = a^0 = 1 \Rightarrow$ il grafico di qualunque funzione esponenziale passa per il punto $(0,1)$.

Esempi
Costruiamo per punti il grafico della **funzione esponenziale**:

Caso $a > 1$
Per esempio $a = 2 \rightarrow y = 2^x$



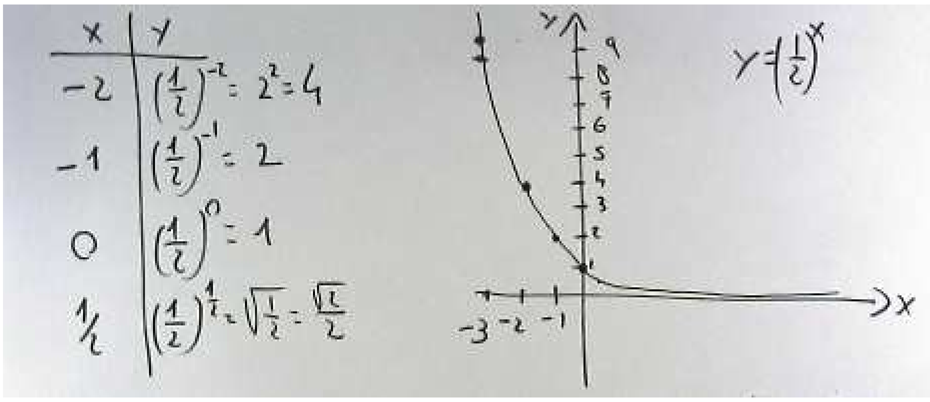
$y = 2^x$ ha asintoto orizzontale dato dalla retta $y = 0$ (asse *x*)
È una funzione **strettamente crescente** cioè

$$\forall x_1, x_2 \in R \text{ con } x_1 < x_2, \text{ si ha } 2^{x_1} < 2^{x_2}.$$

In generale $\forall a > 1$ la funzione $y = a^x$ è **strettamente crescente** e ha un andamento analogo a quello di $y = 2^x$.

Caso $0 < a < 1$

Per esempio $a = \frac{1}{2} \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ha asintoto orizzontale dato dalla retta $y = 0$ (asse *x*)
È una funzione **strettamente decrescente** cioè

$$\forall x_1, x_2 \in R \text{ con } x_1 < x_2, \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

In generale $\forall 0 < a < 1$ la funzione $y = a^x$ è una funzione **strettamente decrescente** ed ha un andamento analogo a quello di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Concetto di logaritmo

Un'equazione esponenziale è un'equazione in cui l'incognita *x* compare nell'esponente di una o più potenze:

$$a^x = b$$

$$x \in R, a, b \in R_0^+ \text{ (reali positivi)}, a \neq 1$$

<u>Teorema:</u>

Un'equazione esponenziale elementare cioè della forma:

$$a^x = b \quad \text{con} \quad x \in R,\ a, b \in R_0^+ \text{ (reali positivi)}, a \neq 1$$

ammette un'unica soluzione *x* detta $\log_a b$ (logaritmo in base *a* di *b*)

Dove a = base del logaritmo

e b = argomento del logaritmo

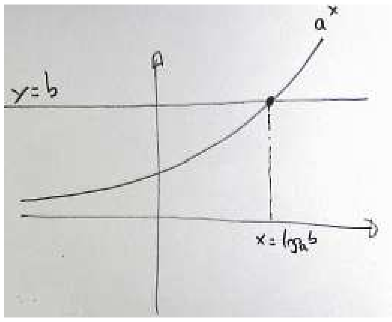
<u>Interpretazione geometrica:</u>

la soluzione di un'equazione esponenziale $a^x = b$ si può interpretare come la soluzione del sistema:

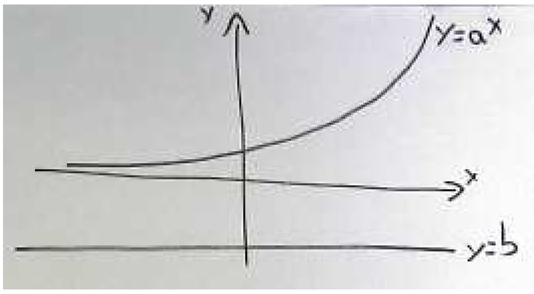
$$\begin{cases} y = a^x & \text{funzione esponenziale} \\ y = b & \text{retta parallela all'asse } x \end{cases}$$

Se $b > 0, x = \log_a b$ è l'ascissa del punto di intersezione tra la funzione esponenziale e la retta $y = b$.

Poiché l'esponenziale è una funzione strettamente crescente o decrescente ossia monotona, tale intersezione è unica.



Se $b \leq 0$ la retta $y = b$ non interseca la curva $y = a^x$ quindi l'equazione $a^x = b$ è **impossibile** quindi il logaritmo in base *a* di *b* non esiste.



Concludendo: $\log_a b$ esiste se e solo se $b > 0$.

In generale per la risoluzione di una equazione esponenziale:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Esempio:

a. $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

b. $4^x = 2^{x^2} \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{x^2} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{x^2}$

$2x = x^2 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2.$

Proprietà del logaritmo

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$
$$\text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

a = base del logaritmo
b = argomento del logaritmo

N.B.
- $\log_a 1 = 0$ infatti 0 è l'unico numero tale che $a^x = 1$
- $\log_a a = 1$ infatti 1 è l'unico numero tale che $a^x = a$

Esempi

a. $x = \log_2 8 \Leftrightarrow x = 3$ infatti $2^3 = 8$

b. $x = \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x = -3$ infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8$

<u>Notazioni:</u>
Logaritmo decimale: $\log_{10} b = \mathrm{Log}\, b$
Logaritmo naturale: $\log_e b = \ln b = \log b \ \ (e \cong 2{,}7)$

<u>Proprietà fondamentali dei logaritmi:</u>

1. $a^{\log_a b} = b$ infatti $\log_a b$ è l'esponente x per cui $a^x = b$

2. $\log_a a^c = c$ infatti $\log_a b$ è l'esponente per ottenere $a^c = b$

3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ infatti l'uguaglianza equivale a $xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ infatti l'uguaglianza equivale a $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$

5. $\log_a x^y = y \log_a x$ infatti l'uguaglianza equivale a $x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}$

Esempio:

a. $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ (proprietà 2)
b. $\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$
c. $x > 0,\ \ln \frac{x}{x+1} = \ln x - \ln(x+1)$
d. $x > 0,\ \log_{0.5} \frac{x}{x+1} = \log_{0.5} x - \log_{0.5}(x+1)$
e. $\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2 \log_2 3$
f. $x > 0,\ \ln \frac{x^3}{(x+1)^2} = \ln x^3 - \ln(x+1)^2 = 3 \ln x - 2 \ln(x+1)$

La funzione logaritmo

Si dice **funzione logaritmo** una funzione del tipo:

$$\forall x \in R_0^+ \quad f(x) = \log_a x \quad , a \in R_0^+$$

che associa ad ogni numero reale positivo x un numero rappresentato con $\log_a x$.
La funzione esponenziale è positiva per ogni x reale e il suo andamento dipende dal valore di a:

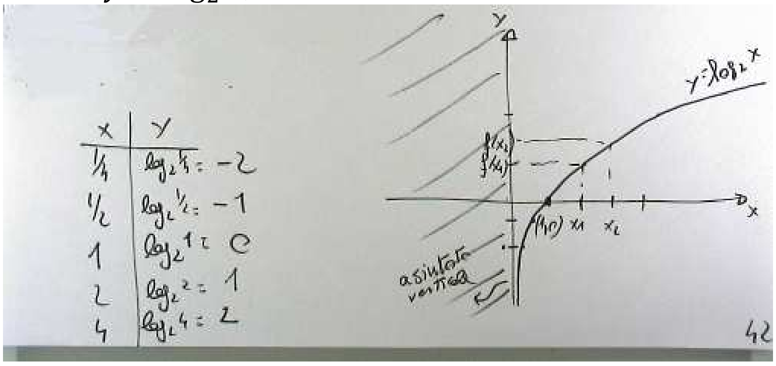
$$0 < a < 1 \qquad\qquad\qquad a > 1$$
$$x \in R_0^+ \ \Leftrightarrow x > 0$$
$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b > 0$$

La funzione logaritmica di base a è la funzione **inversa** della funzione esponenziale di base a.

$$x \xrightarrow{(\exp)} a^x \xrightarrow{(\log)} \log_a a^x = x$$
$$x \xrightarrow{(\log)} \log_a x \xrightarrow{(\exp)} a^{\log_a x} = x$$

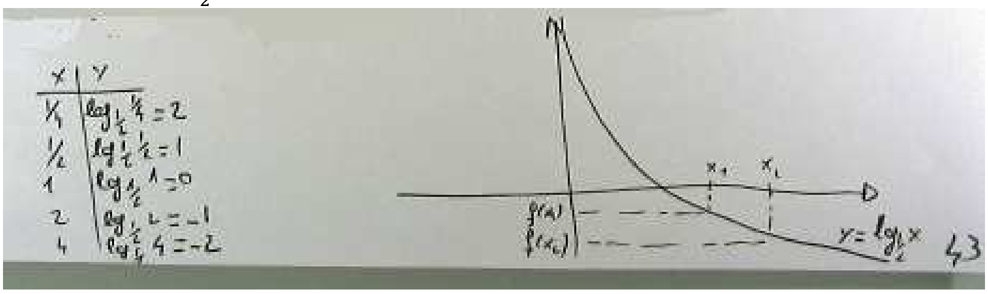
Grafico di funzioni logaritmiche

Caso $a > 1$
Consideriamo $a = 2 \rightarrow y = \log_2 x, x > 0$



Il grafico della funzione $y = \log_a x$ è **strettamente crescente** cioè
$$\forall x_1, x_2 \in R^+, x_1 \neq x_2 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \mathcal{F}(x_1) < \mathcal{F}(x_2)$$
Il grafico di $y = \log_a x$ passa per il punto (1,0).
La retta $\boldsymbol{x = 0}$ è **asintoto verticale**

Caso $0 < a < 1$
Consideriamo $a = \frac{1}{2} \rightarrow y = \log_{\frac{1}{2}} x, x > 0$



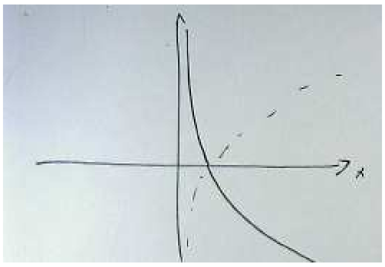
La funzione $y = \log_a x$ è **strettamente decrescente**, cioè
$$\forall x_1, x_2 \in R^+, x_1 \neq x_2 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$
Il grafico di $y = \log_a x$ passa per il punto (1,0).
La retta $\boldsymbol{x = 0}$ è **asintoto verticale**

Risposta al quesito
Il grafico è corretto nel caso $b > 1$.

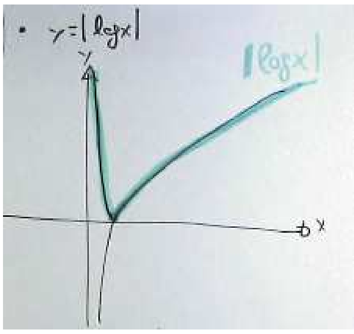
Esempi
a. $\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$ è sicuramente maggiore di 2 perché 3>2
b. $x > 0,\ \ln\frac{x}{x+1} = \ln x - \ln(x+1)$ è sicuramente negativo perché $a = e > 1$ e $\frac{x}{x+1} < 1$
c. $x > 0,\ \log_{0.5}\frac{x}{x+1} = \log_{0.5} x - \log_{0.5}(x+1)$ è sicuramente positivo $a = 0.5 < 1$ e $\frac{x}{x+1} < 1$

Trasformazioni della funzione logaritmo

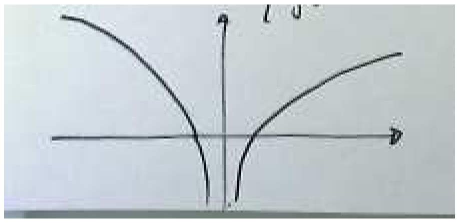
$y = -\log_a x$



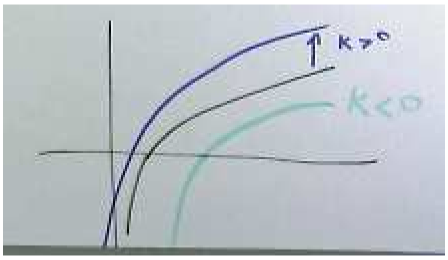
$y = |\log x|$



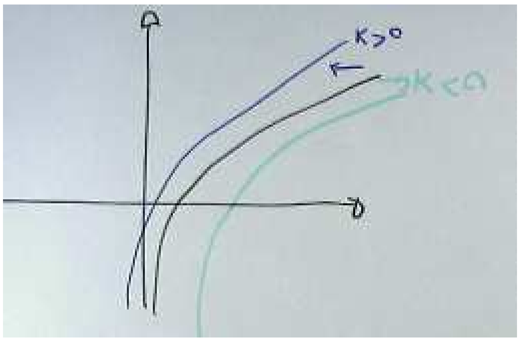
$y = \log_a |x| = \begin{cases} \log_a x & x \geq 0 \\ \log_a(-x) & x < 0 \end{cases}$



$y = \log_a x + k$

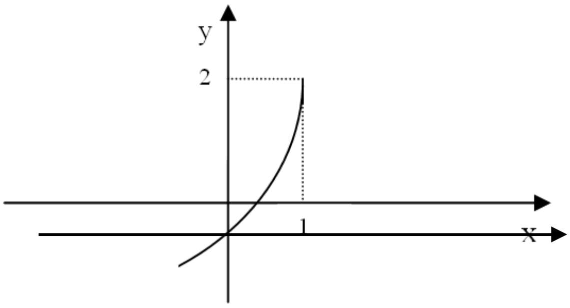


$y = \log_a(x + k) \quad a > 1$



Quesiti

2. Qual è il valore della potenza 5^0?
3. L'uguaglianza $a^x \cdot a^y = a^{xy}$ è vera o falsa?
4. $y = a^x$ con $x \in \Re$ e $a > 0$ è una funzione esponenziale?
   $y = x^a$ con $x \in \Re$ e $a > 0$ è una funzione esponenziale?
5. È vero che, per ogni $a, b \in \Re$ e $n \in N$ vale: $a < b \Rightarrow a^n < b^n$?
6. Quante radici ha l'equazione $2^x = 0$?
7. Il seguente grafico può essere il grafico della funzione $y = 2^x$? Perché?



8. Scrivi in simboli "*y* è il logaritmo in base *b* di *x*". Quali sono le condizioni da porre su *b*? Quali sono le condizioni da porre su *x*?

9. Riesci a semplificare l'espressione $3^{\log_3 x}$?

10. Qual è il valore di $\log_7 49$?

11. Qual è il valore di $\log_b 1$?

12. Come si può calcolare $\log_b(xy)$?

13. E' vero che $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x$?

14. È vero che da $\log x = \log y$ segue $x = y$?