Lezione 10

Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Un quesito

Qual è la soluzione della seguente disequazione esponenziale?

$$\frac{3^x \cdot 5}{2^{x-1}} \leq 10^x$$

Equazioni esponenziali

Un'equazione esponenziale è un'equazione in cui l'incognita x compare nell'esponente di una o più potenze:

$$a^x = b$$
$$x \in R, a, b \in R_0^+ \text{ (reali positivi)}, a \neq 1$$

Teorema:
Un'equazione esponenziale elementare cioè della forma:

$$a^x = b \quad \text{con} \quad x \in R,\ a, b \in R_0^+ \text{ (reali positivi)}, a \neq 1$$

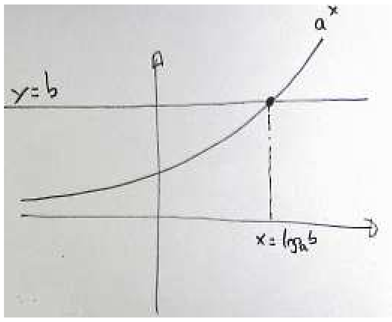
ammette un'unica soluzione x detta $\log_a b$ (logaritmo in base a di b)
Dove $a =$ base del logaritmo
e $b =$ argomento del logaritmo

Interpretazione geometrica:

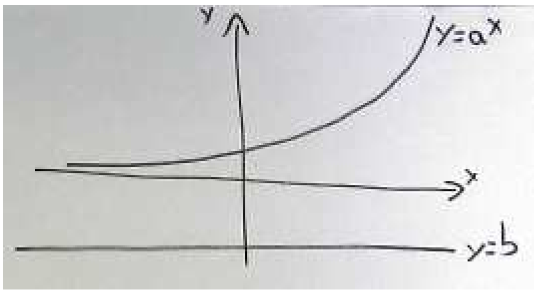
la soluzione di un'equazione esponenziale $a^x = b$ si può interpretare come la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = a^x & \text{funzione esponenziale} \\ y = b & \text{retta parallela all'asse } x \end{cases}$$

Se $b > 0, x = \log_a b$ è l'ascissa del punto di intersezione tra la funzione esponenziale e la retta $y = b$.
Poiché l'esponenziale è una funzione strettamente crescente o decrescente ossia monotona, tale intersezione è unica.



Se $b \leq 0$ la retta $y = b$ non interseca la curva $y = a^x$ quindi l'equazione $a^x = b$ è **impossibile** quindi il logaritmo in base a di b non esiste.



Concludendo: $\log_a b$ esiste se e solo se $b > 0$.

In generale per la risoluzione di una equazione esponenziale:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Esempio:

a. $2^{x+1} = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x = 5 \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{2}$ si usa il logaritmo di base $2 > 1$ quindi
$\log_2 2^x = \log_2 \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 5 - \log_2 2.$

b. $2^{x+1} = 5^{1-x}$

$\log 2^{x+1} = \log 5^{1-x}$

$(x+1)\log 2 = (1-x)\log 5$

$x\log 2 + \log 2 = \log 5 - x\log 5$

$x\log 2 + x\log 5 = \log 5 - \log 2$

$x(\log 2 + \log 5) = \log 5 - \log 2$

$$x\ \log 10 = \log\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{\log\frac{5}{2}}{\log 10} = \log\frac{5}{2}$$

c. $2^{x+1} = 3^{x+1} \Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{3^{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = 1$ si usa il logaritmo di base $\frac{2}{3}$ quindi

$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \log_{\frac{2}{3}}1 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

d. $25^{x} = 5^{x+1} \Leftrightarrow (5^2)^x = 5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{x+1}$ si usa il logaritmo di base 5 quindi

$2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1.$

e. $\frac{5^x-4}{5^x-1} + \frac{4}{25^x-5^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{5^x-4}{5^x-1} + \frac{4}{5^{2x}-5^x} = 0$

ponendo $5^x = t > 0$ si ottiene l'equazione fratta

$\frac{t-4}{t-1} + \frac{4}{t^2-t} = 0, t > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0, t > 0, t \neq 0{,}1$

$t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

In conclusione la soluzione è data da $5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_5 2$.

Equazioni logaritmiche

Un'equazione logaritmica è un'equazione in cui l'incognita x compare nell'argomento di uno o più logaritmi.

Il caso più semplice è

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$
$$x, a \in R_0^+, b \in R\ , a \neq 1$$

Per risolverla, si cerca di ottenere un solo logaritmo ad ambo i membri dell'uguaglianza in modo da poter ricondurre l'equazione logaritmica ad un'equazione negli argomenti dei logaritmi. Si osservi che durante tale operazione di riduzione è fondamentale tener presente che l'argomento del logaritmo deve sempre essere maggiore di zero.

Esempio:

a. $\log_3 x^2 = 6$

C.E.: $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Per esplicitare l'incognita x si usa l'esponenziale di base 3 quindi

$\log_3 x^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3^6 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = \pm 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 27$

b. $\log_x 16 = -\frac{4}{3}$

C.E.: $x > 0, x \neq 1$

Per esplicitare la x si usa l'esponenziale di base x quindi

$\log_x 16 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0\ , x \neq 1 \\ 16 = x^{-\frac{4}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = (16)^{-\frac{3}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

c. $\log_2(x^2 - x + 1) = -1$

C.E.: $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni x ; infatti $\Delta = -3 < 0$ e a=1>0

Si ha:

$\log_2(x^2 - x + 1) = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 2^{-1}$

$2x^2 - 2x + 1 = 0$ impossibile perché $\Delta = -4 < 0$

d. $\log_3|3 - 2t| = 2$

C.E.: $|3 - 2t| > 0 \Leftrightarrow 3 - 2t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{3}{2}$

Per esplicitare la t si usa l'esponenziale di base 3 quindi

$$\log_3|3-2t| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq \dfrac{3}{2} \\ |3-2t| = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq \dfrac{3}{2} \\ 3-2t = \pm 9 \end{cases} \Leftrightarrow t = -3 \vee t = 6$$

e. $\ln(x+1) = \ln(1-x) - \ln x$

C.E.: $\begin{cases} x+1>0 \\ 1-x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$

$\ln(x+1) = \ln(1-x) - \ln x \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln\frac{1-x}{x}$

Per esplicitare la x si usa l'esponenziale di base e quindi

$\begin{cases} 0<x<1 \\ x+1 = \frac{1-x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x^2+x = 1-x \end{cases}$

$\begin{cases} 0<x<1 \\ x^2+2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1+\sqrt{2} \cong 0.41$

f. $x\mathrm{Log}\,3 = \mathrm{Log}(2-3^{-x})$

C.E.:$2-3^{-x}>0 \Leftrightarrow 3^{-x}<2 \Leftrightarrow x>-\log_3 2$

$x\mathrm{Log}\,3 = \mathrm{Log}(2-3^{-x}) \Leftrightarrow \mathrm{Log}\,3^x = \mathrm{Log}(2-3^{-x})$

Per esplicitare la x si usa l'esponenziale di base 10 quindi

$3^x = 2-3^{-x}$ ponendo $3^x = t > 0$ si ottiene l'equazione fratta

$t = 2-t^{-1} = 2-\dfrac{1}{t}, t>0 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$

In conclusione la soluzione è data da $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

g. $(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 6 = 0$

C.E.: $x>0$

ponendo $\log_3 x = t$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=-3{,}2$

In conclusione le soluzioni sono due:

$$\log_3 x = -3 \Leftrightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$
$$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$$

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

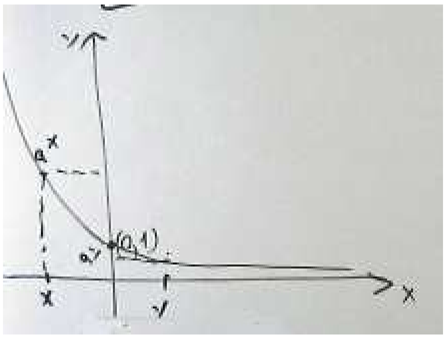
Una disequazione esponenziale è una disequazione in cui l'incognita si presenta nell'esponente di una potenza:

$$a^x > b, a > 0, a \neq 1, b \in R$$

(analogamente con $\geq, <, \leq$)
La soluzione di una disequazione esponenziale elementare del tipo $a^x > b$ (oppure $\geq, <, \leq$) con $a > 0, a \neq 1$ e x variabile reale, dipende dalla base dell'esponenziale e dal verso della disequazione.

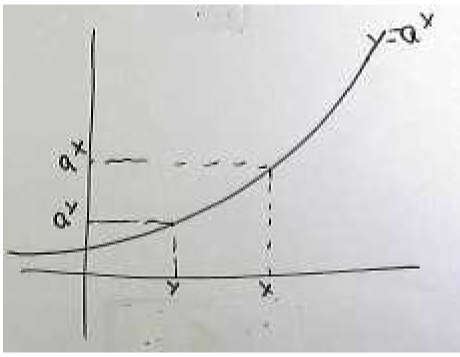
se $0 < a < 1$ la funzione esponenziale è strettamente decrescente quindi

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$$



se $a > 1$ a funzione esponenziale è strettamente crescente quindi

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$$



N.B.
- Se $0 < a < 1$, passando alla disequazione dagli esponenti, si **inverte** il verso della disuguaglianza.
- Se $a > 1$, passando alla disequazione dagli esponenti, si **mantiene** il verso della disuguaglianza.
(una volta che ci si è ricondotti alla stessa base sia il membro di sinistra che di destra della disequazione).

Esempio:

f. $2^x > 128 \Leftrightarrow 2^x > 2^7 \Rightarrow x > 7$ poiché la base è $a = 2>1$

g. $2^x > 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^x > (2^2)^{x-1} \Leftrightarrow 2^x > 2^{2x-2}$
$x > 2x - 2 \Leftrightarrow x < 2$

Esempio:

h. $2^{x+1} > 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x > 5 \Leftrightarrow 2^x > \frac{5}{2}$ si usa il logaritmo di base $2 > 1$ quindi
$\log_2 2^x > \log_2 \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > \log_2 5 - \log_2 2.$

i. $2^{x+1} > 3^{x+1} \Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{3^{x+1}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} > 1$ si usa il logaritmo di base $\frac{2}{3} < 1$ quindi
$\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} < \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$

Soluzione del quesito

$\frac{3^x \cdot 5}{2^{x-1}} \leq 10^x$ si usa il logaritmo di base $10 > 1$ quindi

$\text{Log}\left(\frac{3^x \cdot 5}{2^{x-1}}\right) \leq \text{Log}\, 10^x$

$\text{Log}(3^x \cdot 5) - \text{Log}(2^{x-1}) \leq x \cdot \text{Log}\, 10$, ricordando che $\text{Log}\, 10 = 1$

$x\, \text{Log}\, 3 + \text{Log}\, 5 - (x-1)\, \text{Log}\, 2 \leq x\, \text{Log}\, 10$

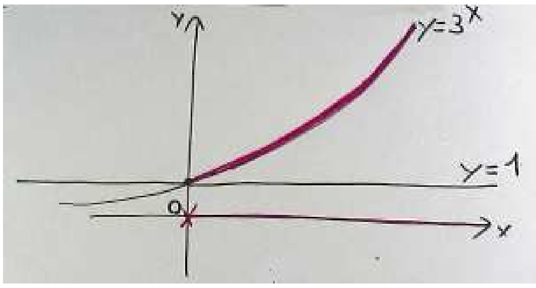
$x(\text{Log}\, 3 - \text{Log}\, 2 - \text{Log}\, 10) \leq -\text{Log}\, 5 - \text{Log}\, 2$ poiché $-\text{Log}\, 5 - \text{Log}\, 2 = -\text{Log}10 = -1$

la soluzione è $x \leq -\frac{1}{\text{Log}\, 3 - \text{Log}\, 2 - 1}$.

Risoluzione di disequazioni esponenziali con metodo grafico

Alcuni esempi:

a. $3^x > 1 \Rightarrow x > 0$ infatti



b. $3^x < 1 - 2x$

Confrontiamo il grafico della funzione esponenziale $y = 3^x$ con la retta $y = 1 - 2x$

La retta $y = 1 - 2x$ interseca gli assi nei punti

$$A\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \quad B\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poiché le due funzioni sono rispettivamente

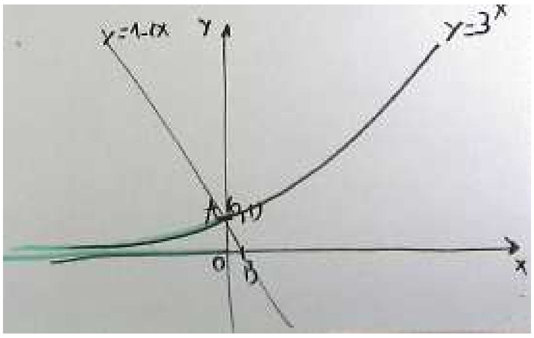
$y = 3^x$ strettamente crescente e

$y = 1 - 2x$ strettamente decrescente

(0,1) è l'unico punto di intersezione e

$$3^x < 1 - 2x \Leftrightarrow x < 0$$

L'insieme delle soluzioni è: $S = (-\infty, 0)$



Disequazioni logaritmiche

Una disequazione logaritmica è una disequazione in cui l'incognita si presenta nell'argomento di un logaritmo.

Esempio

$\ln(x-1) > 7; \log_3 x < 1; \log_{10} x \leq 3\log_{10}(x^3 - 1)$.

La soluzione di una disequazione logaritmica elementare del tipo $\log_a x > b$ (oppure $\geq, <, \leq$) con $a > 0, a \neq 1$ e x variabile reale positiva, dipende dalla base del logaritmo e dal verso della disequazione.

Si presentano i seguenti casi:

- se $0 < a < 1$ la disequazione $\log_a x > b$ è equivalente a $0 < x < a^b$. Analogamente se è $\geq$.
  La disequazione $\log_a x < b$ è equivalente a $x > a^b$. Analogamente se è $\leq$.

- se $a > 1$ la disequazione $\log_a x > b$ è equivalente a $x > a^b$. Analogamente se è $\geq$.
  La disequazione $\log_a x < b$ è equivalente a $0 < x < a^b$. Analogamente se è $\leq$.

Esempio:

a. $log_{\frac{2}{3}} x > 2$ C.E. $x > 0$.
$x < \left(\frac{2}{3}\right)^2$ confrontando con le C.E. si ha $S = \left\{x \in R \mid 0 < x < \frac{4}{9}\right\}$.
b. $4\ln(x-4) - \ln(x-4)^3 \leq 1 + \ln\sqrt{x-4}$ C.E. $x > 4$.
Per le proprietà dei logaritmi si ha $4\ln(x-4) - 3\ln(x-4) \leq 1 + 1/2\ln(x-4)$
$1/2\ln(x-4) \leq 1$, da cui $\ln(x-4) \leq 2$, $x - 4 \leq e^2$, $x \leq e^2 + 4$. Confrontando con le C.E. la soluzione della disequazione è $S = \{x \in R \mid 4 < x < e^2 + 4\}$.

Quesiti

1. Prova a classificare le seguenti equazioni e disequazioni individuandone la tipologia.
   Riesci a determinarne le soluzioni ?

A1. $2^{x-7} \cdot 2^x = 2$
A2. $3^{x^2-2x} = 3^{2x+5}$
A3. $3^{x^2-5} = \frac{1}{3}$
A4. $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$

B1. $2^{x+1} \cdot 4^{2x} = \frac{1}{8}$
B2. $9^{x+1} \cdot \frac{1}{3} = 27$
B3. $\frac{5^{2x+1}}{25\sqrt{5}} = 1$
B4. $2^{x+1} + 2^x = 24$
B5. $5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 10$

C1. $2^{x+2} > 1$
C2. $3^{x-5} < 27$
C3. $3^{2x+2} < \frac{1}{3}$
C4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} > 1$
C5. $2^{x+1} - 8\,2^x > 0$

E1. $\log_2(2x-5) = \log_2 3x$
E2. $\log_3(x-1) + \log_2(x+1) = 2\log(2-x)$
E3. $\log_2(x-2) - \log_2(8-x) = \log_2 x - 3$

F1. $\log_3(x-3) > 0$
F2. $\log_{10}(x^2+1) > 0$
F3. $\log_3(2-5x) > 2$

H1. $2^{x-1} = 3^x$
H2. $2 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 5 \cdot 3^x = 8$
H3. $2^{x+1} + 3 \cdot 2^x = 3^{x+2} - 3^x$

J1. $\log_3|2x-1| = \log_3 x$ J2. $|e^x - 3| > 1$
J3. $|5^{2x} - 2| < 3$