Lezione 11

Funzioni goniometriche
Proprietà delle funzioni

Un quesito

Sai esprimere in gradi le seguenti ampiezze di archi espresse in radianti?

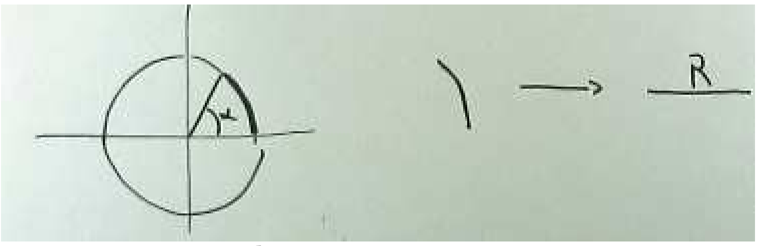
$$\frac{\pi}{3} \qquad \frac{3}{4}\pi \qquad \frac{5}{6}\pi \qquad \frac{3}{2}\pi$$

Elementi di trigonometria

La misura dell'ampiezza di un angolo si può determinare in modi diversi:
Si possono utilizzare delle unità di misura diverse:

-**Grado**: unità di misura sessagesimale la quale consiste nella 360° parte dell'angolo giro. I primi e i secondi sono i sottomultipli del grado.

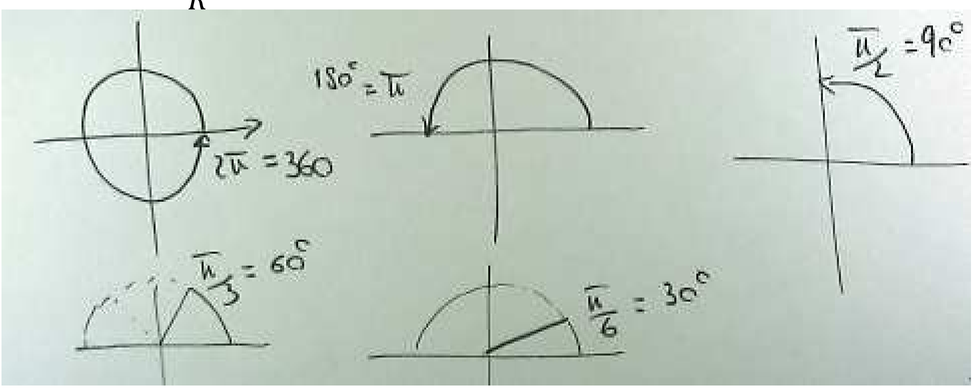
-**Radiante**: è l'angolo al centro di una circonferenza che rettificato è lungo come il raggio della circonferenza.



$$\alpha^r = \frac{l}{R} \quad \text{(misura angolo in radianti)}$$

Da questa relazione si ricava l'angolo **giro**:

$$l = 2\pi R \qquad \alpha^r = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ (misura dell'angologiro (360°) espressa in } \textbf{radianti}\text{)}$$



Più in generale:

α° = misura angolo α in gradi

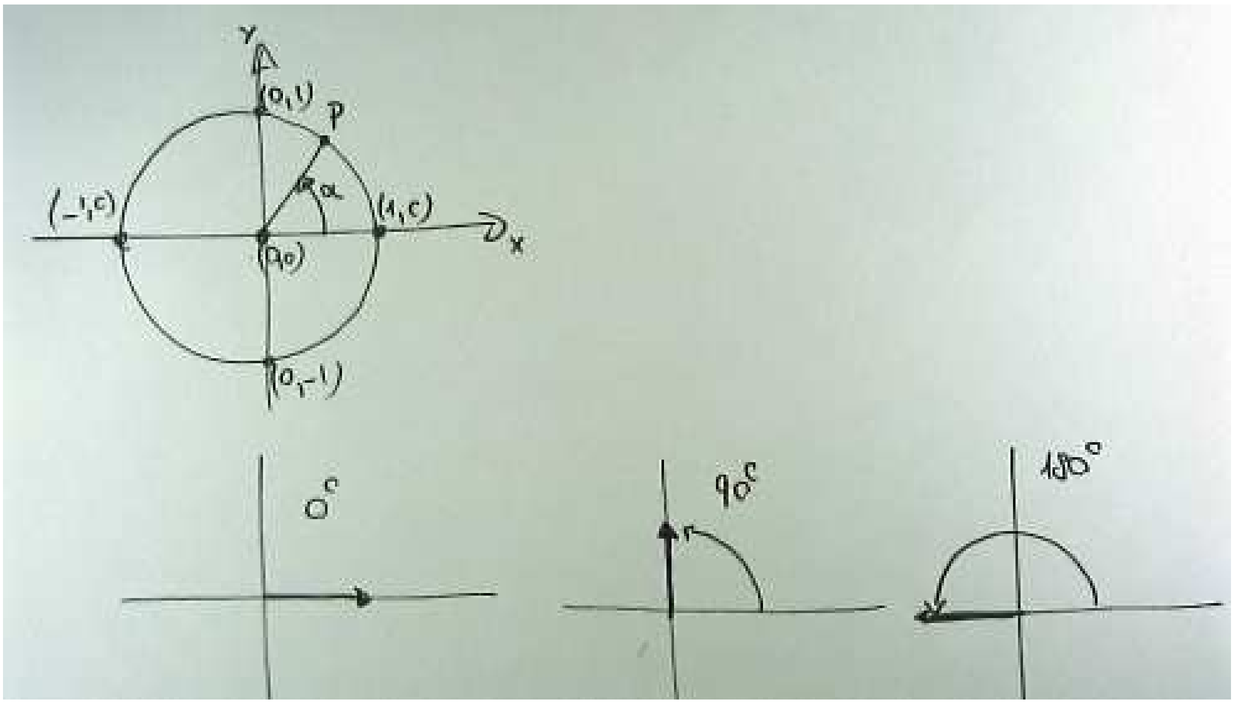
α^r = misura angolo α in radianti

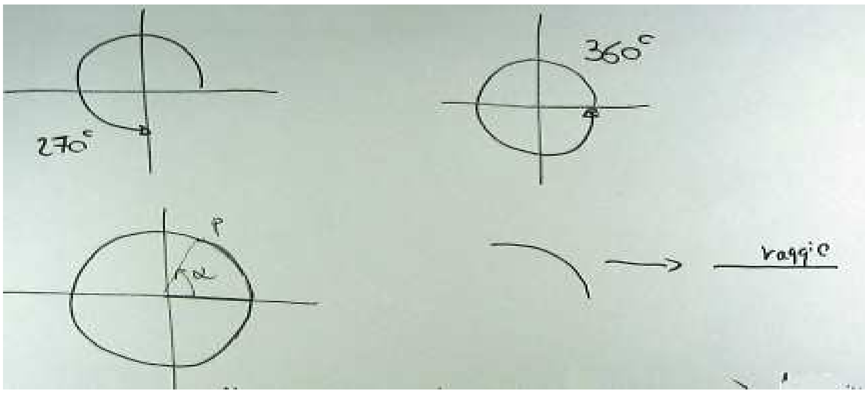
$$\alpha^r = \frac{\alpha^\circ \cdot 2\pi}{360°}$$

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha^r \cdot 360°}{2\pi}$$

In base a tale proporzione possiamo ricavare:

GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π





Esempio:

$$x{:}\,45° = 2\pi{:}\,360°$$

La misura in radianti di 45° è: $x = \frac{45° \cdot 2\pi}{360°}$

Svolgimento del Quesito

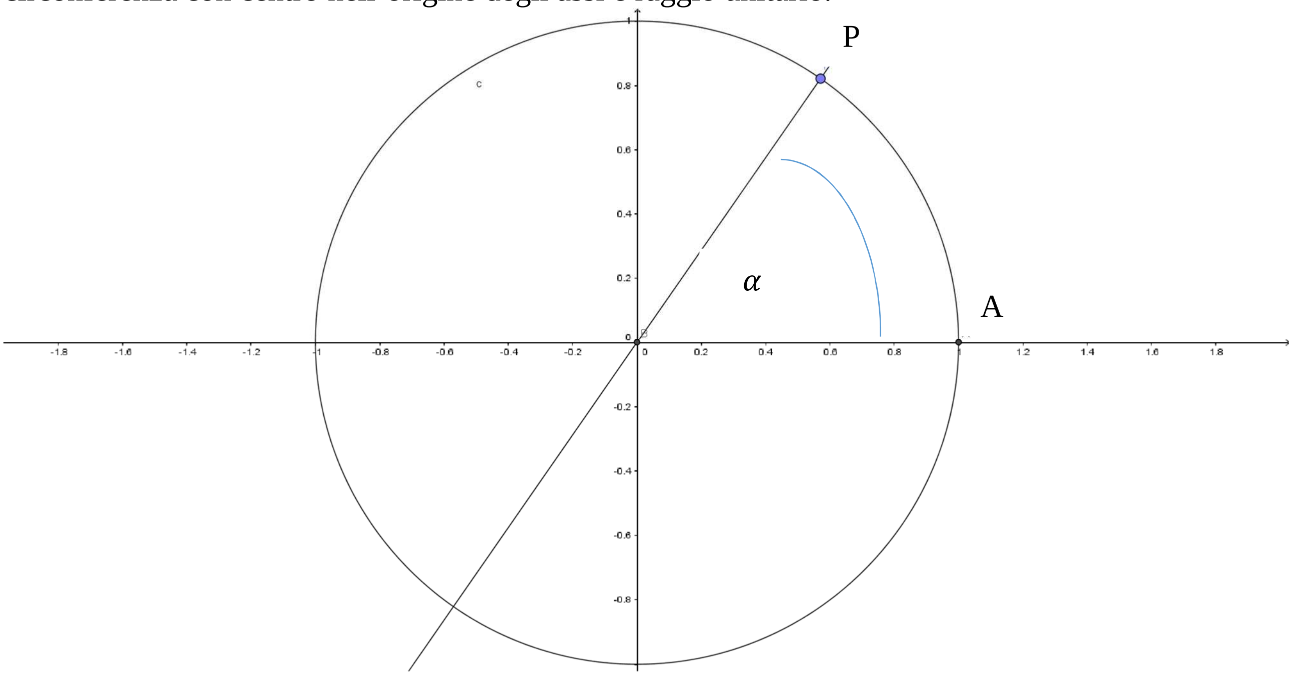
Dato $\frac{\pi}{3}$ $il\ corrispondente\ angolo\ in\ gradi$ è $\alpha^{\circ} = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 360°}{2\pi}$ = 60°

Dato $\frac{3\pi}{4}$ $il\ corrispondente\ angolo\ in\ gradi$ è $\alpha^{\circ} = \frac{\frac{3\pi}{4} \cdot 360°}{2\pi}$ = 135°

Dato $\frac{5\pi}{6}$ $il\ corrispondente\ angolo\ in\ gradi$ è $\alpha^{\circ} = \frac{\frac{5\pi}{6} \cdot 360°}{2\pi}$ = 150°

Dato $\frac{3\pi}{2}$ $il\ corrispondente\ angolo\ in\ gradi$ è $\alpha^{\circ} = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 360°}{2\pi}$ = 270°

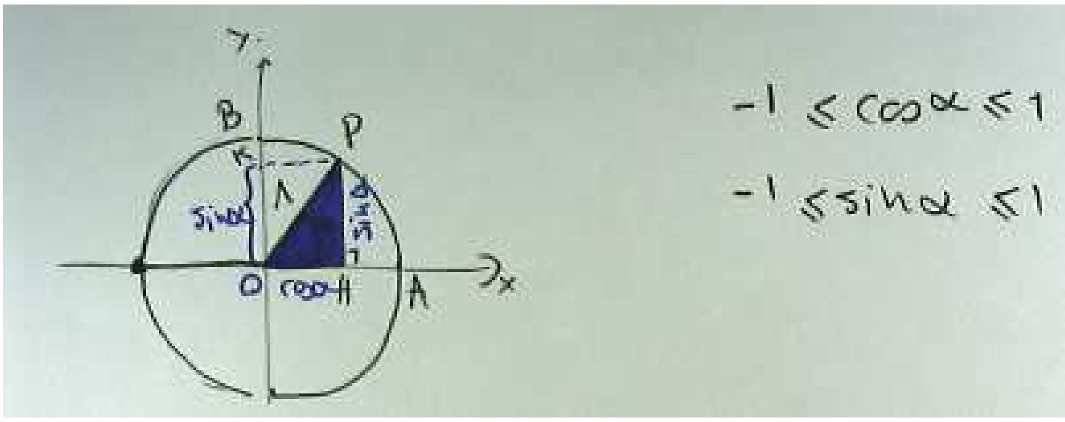
Definizione: dato un sistema di riferimento cartesiano si dice **circonferenza goniometrica** la circonferenza con centro nell'origine degli assi e raggio unitario.



Il punto $A(1,0)$ è detto **origine degli archi.**
Il verso di percorrenza per la misurazione degli angoli è **antiorario**.
Se si considera l'arco *AP* e il corrispondente angolo al centro si possono definire le seguenti **funzioni goniometriche**:

-**Seno** di α: $\sin\alpha$ è $\overline{OK}$

-**Coseno** di α: $\cos\alpha$ è $\overline{OH}$



$$\alpha = 0^{\circ} \Rightarrow \cos\alpha = 1 \quad \sin\alpha = 0$$
$$\alpha = 90^{\circ} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \quad \sin\alpha = 1$$

$$\alpha = 180^{\circ} \Rightarrow \cos\alpha = -1 \quad \sin\alpha = 0$$
$$\alpha = 360^{\circ} \Rightarrow \cos\alpha = 1 \quad \sin\alpha = 0$$
$$\alpha = 270^{\circ} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \quad \sin\alpha = -1$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPH

$$\overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{OP}^2$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

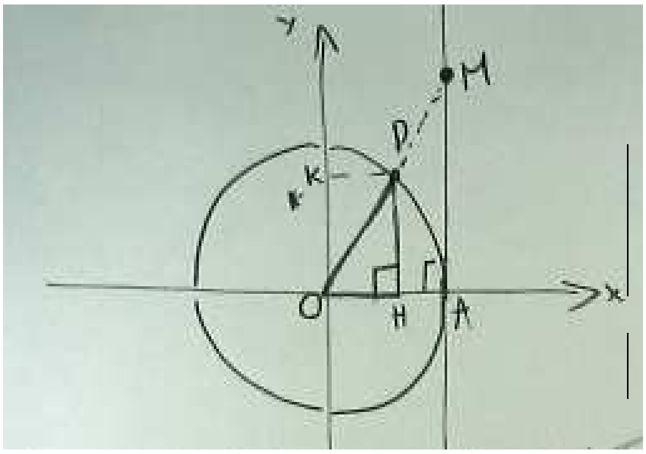
Prima relazione fondamentale della Trigonometria

da cui si ha:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

-**Tangente** di α: $\tan\alpha$ è $\overline{AM}$ dove M è il punto di intersezione tra la retta su cui giace $\overline{OP}$ e la retta tangente alla circonferenza in A.

-**Cotangente** di α: $\cot\alpha$ è $\overline{BN}$ dove N è il punto di intersezione tra la retta su cui giace $\overline{OP}$ e la retta tangente alla circonferenza.



I triangoli OPH e OMA sono simili da cui:

$$\overline{OH} : \overline{OA} = \overline{PH} : \overline{MA}$$
$$\cos\alpha : 1 = \sin\alpha : \tan\alpha$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

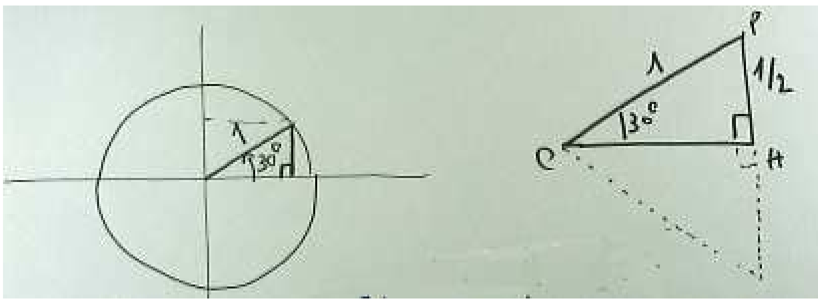
In maniera analoga si dimostra che:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Esempio:

Calcoliamo ora $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ di alcuni angoli detti **fondamentali** utilizzando il teorema di Pitagora.

$$\propto = 30° = \pi/6$$



$$OH = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

Quesiti

1. Sai stabilire in quale quadrante cade il secondo estremo dei seguenti archi di ampiezza data?

$$-\frac{11}{6}\pi \qquad \frac{5}{4}\pi \qquad \frac{13}{6}\pi \qquad -\frac{1}{6}\pi$$

2. Le funzioni seno, coseno e tangente sono funzioni periodiche, sai definirle indicandone il periodo ? Sai rappresentarle?

3. Sai determinare graficamente l'arco α tale che:

   $$sen\alpha = \frac{1}{3} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad ?$$

4. Sai completare le seguenti uguaglianze?

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \qquad sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \qquad sen(\pi + \alpha) =$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \qquad sen(-\alpha) = \qquad \cos(-\alpha) =$$

5. Sai scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e formante con la direzione positiva dell' asse x l'angolo α indicato? P $(0,1)$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$

6. Sai tracciare le curve relative alle seguenti equazioni?

$$y = |\cos x| \qquad y = \cos|x| \qquad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad y = 1 + \cos x$$

7. Riesci ad individuare le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni provando a rappresentarle mediante circonferenze goniometriche ?

$$senx = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos x = -\frac{1}{2} \qquad senx \le \frac{1}{2}$$

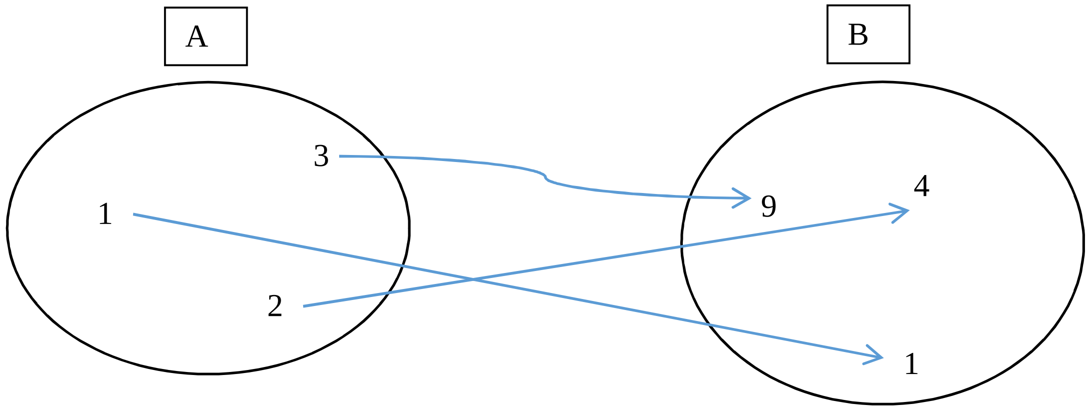
Funzioni e proprietà

<u>Definizione</u> Si dice *funzione*, *applicazione* o *mappa* di un insieme A in un insieme B ogni relazione che associa ad ogni x appartenente ad A uno ed un solo y appartenente a B.
L'elemento y è detto *immagine* o corrispondente dell'elemento x.

Si dice insieme di definizione o dominio D della funzione l'insieme A stesso. Si dice insieme immagine $Im\ f(x) \subseteq$ B l'insieme delle immagini degli elementi di A indicato anche con f(A).

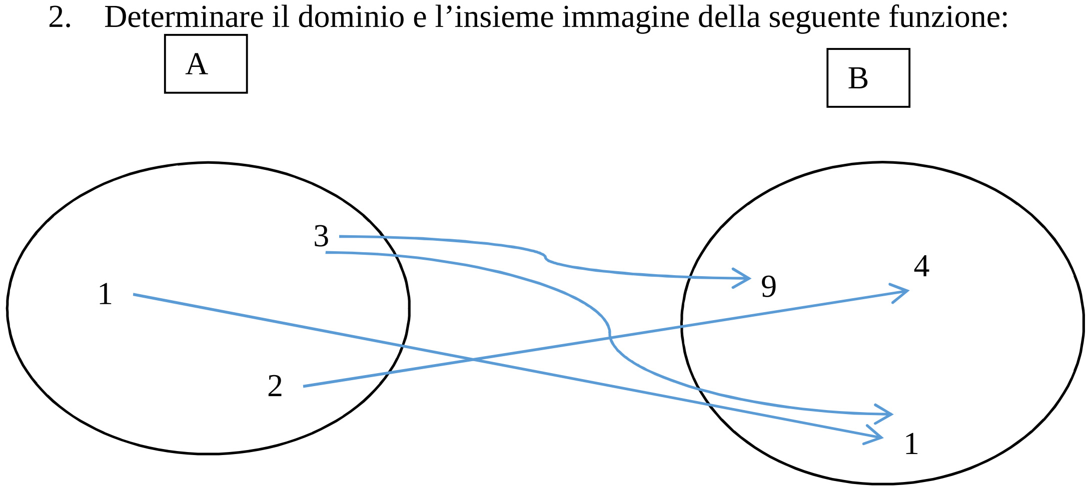
Esempio

1. Determinare il dominio e l'insieme immagine della seguente funzione:



D={1,2,3}=A $\quad$ $Im\ f\,(x)$={1,4,9}=B

2. Determinare il dominio e l'insieme immagine della seguente funzione:



Non è una funzione.

Per indicare che f è una funzione da A in B, si scrive:

f: A → B o anche $x \mapsto f(x), \quad x \in$ A.

Per indicare che y è l'immagine di x nella funzione f, si scrive:

f: $x \mapsto y$, o anche $y = f(x)$.

Proprietà di una funzione

Definizione Si dice che una funzione $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ è **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

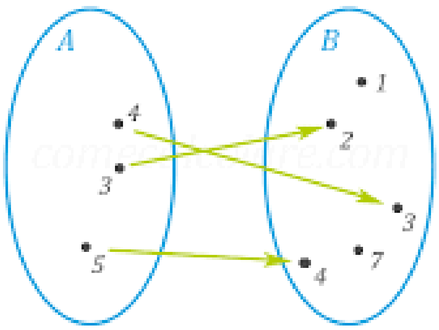
In simboli:

$$\forall y \in \mathrm{B} \quad \exists x \in \mathrm{A} \mid y = f(x).$$

Si osservi che nel caso f sia suriettiva $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$.

Esempio

Questa funzione non è suriettiva in quanto gli elementi 1 e 8 non ammettono preimmagine.



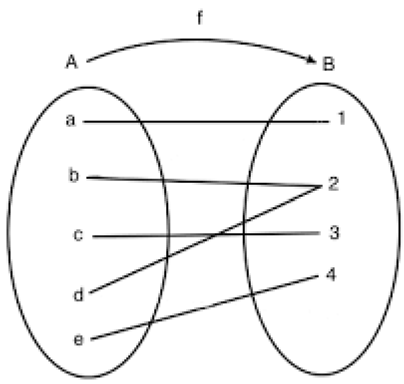
Definizione Si dice che una funzione $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ è **iniettiva** se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A, oppure equivalentemente se elementi distinti di A hanno immagini distinte in B.

In simboli:

$$(\forall x_1, x_2, \in \mathrm{A} \wedge x_1 \neq x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Esempio

La seguente funzione non è iniettiva in quanto l'elemento 2 è immagine di due elementi distinti di A, cioè di *b* e di *d*.



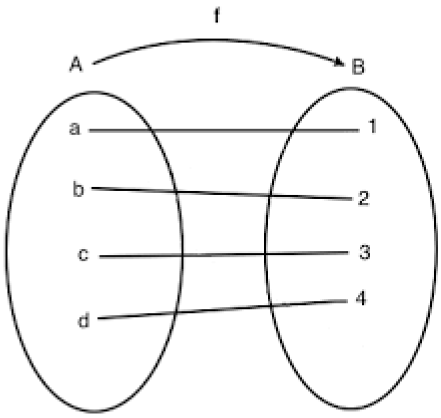
Definizione Si dice che una funzione $f: A \to B$ è **biiettiva** o **biunivoca** se ogni elemento di B è immagine di uno ed un solo elemento di A.

In simboli:

$$\forall y \in B \quad \exists!\, x \in A \mid y = f(x).$$

Osservazione Se una funzione è biiettiva allora è anche suriettiva e iniettiva e viceversa se una funzione è suriettiva e iniettiva allora è biiettiva.

Esempio La seguente funzione è biiettiva.

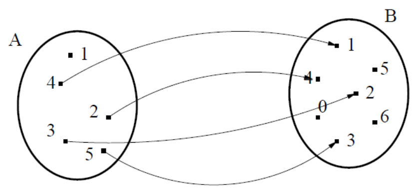


Quesiti

1. Vero o falso ? Discuti la validità di questa proposizione:

"Dati due insiemi A e B, si dice funzione di A in B una qualsiasi legge che ad elementi di A associa elementi di B."

Il grafo in figura rappresenta una funzione di A in B?
Motiva la risposta.



2. Relativamente alle seguenti tabelle, prova a rispondere:

a. E' una funzione? Perché? a. Se sì, qual è il suo dominio? c. Qual è il suo codominio?
d. E' iniettiva?

Tabella A	
n	p
1	2
2	4
3	6

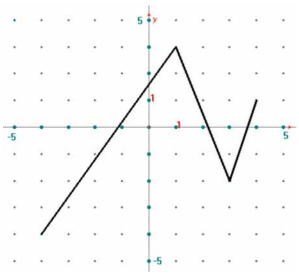
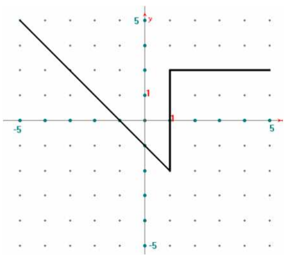
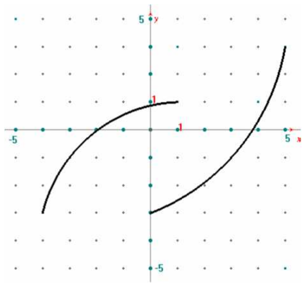
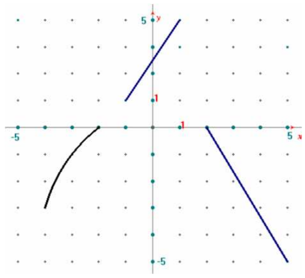
Tabella B	
z	t
0,162	3,69
0,171	3,78
0,183	3,78

4	8
5	10
6	12

0,197	3,95
0,285	3,96
0,297	4,02

3. Le seguenti ‘scritture’ rappresentano delle funzioni ? Motiva la risposta.
   a. $y=1$ b. $x^2-3x+2=0$ c. $k=z^2+1$ d. $x=1$ e. $x^2+y^2=1$ f. $y=\begin{cases} 2x+1 & x>0 \\ x & x<0 \end{cases}$

   Tra i seguenti sottoinsiemi di punti del piano, quali sono grafici di una funzione ? Sai individuarne dominio e codominio ?

4. Le funzioni $y=\sqrt{x^2-1}$ e $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ hanno lo stesso dominio ?

5. Sai determinare dominio e codominio delle seguenti funzioni:
   a. $y=2x$ b. $y=-x^2+2$ c. $y=\sqrt{4-x^2}$ d. $y=-2\sqrt{1-x^2}$ e. $y=1/x$ f. $y=\dfrac{2+x}{1+2x}$ g. $y=\sqrt{x}$ h. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ i. $y=|x-2|\sqrt{x^2+1}$
6. Prova a disegnare i grafici delle funzioni $y=(x-1)^2$, $y=(x+2)^3$, $y=-(x+1)^2+2$ e $y+1=(x-1)^3$ indicando come sia possibile ottenerli applicando opportune trasformazioni geometriche ai grafici delle funzioni $y=x^2$ e $y=x^3$.

7. Dato il grafico della funzione $f(x)=x^2-2x$ rappresenta i grafici delle seguenti funzioni:
   a. $y=f(x)-1$ b. $y=f(x-1)$ c. $y=|f(x)|$ d. $y=f(|x|)$
   e. $y=f(x+2)-3$ f. $y=|f(x)-1|$ g. $y=|f(x+2)-1|+3$