Lezione 1 – **L’insieme dei reali** (Programma base)

1.1 Un problema per iniziare

Un cliente deve scegliere fra due proposte per l’investimento di un capitale C, nella prima proposta raddoppierebbe il capitale in due anni mentre nella seconda il capitale crescerebbe del 30% l’anno.
Qual è la scelta più vantaggiosa?
Nel primo caso dopo due anni il capitale è 2C.
Nel secondo caso dopo un anno il capitale è diventato C+0.3C=1.3C, dopo due anni 1.3^2C =1.69C quindi inferiore. Diverso sarebbe se l’aumento annuo fosse del 50%; infatti in questo caso il capitale dopo due anni sarebbe 1.5^2C =2.25C quindi maggiore di 2C.
Il cliente si chiede quale tasso di interesse nel secondo caso rende le due scelte indifferenti?
Deve risultare 2C= x^2C , è ovvio che il valore x è un numero positivo il cui quadrato è 2, ossia $x = \sqrt{2}$.

Il numero $x = \sqrt{2}$ appartiene all’insieme dei **numeri reali** ma non ai razionali; infatti si può dimostrare che non è esprimibile come rapporto di numeri interi.

Osservazione
Questo problema ci fa capire come l’insieme dei numeri reali nasca da un’esigenza di ampliamento dei razionali; infatti, usando i numeri razionali, molti problemi non hanno una soluzione esatta.
E’ chiaro che il numero $a = \sqrt{2}$ è utilizzabile solo in un calcolo simbolico, nel momento in cui si deve usare praticamente è necessaria una approssimazione. In funzione della precisione richiesta, si useranno diverse approssimazioni di $\sqrt{2}$: 1,14 oppure 1,141 oppure 1,1415 ecc.

1.2 Alcune notazioni sull’insieme dei reali

l’insieme di tutti i numeri reali viene indicato con il simbolo ***R***
$(R, +, *)$ è la struttura algebrica dell’insieme dei reali, o campo
R_0^+ è l’insieme dei reali positivi (0 è escluso)
R_0^- è l’insieme dei reali negativi (0 è escluso)
R^+ è l’insieme dei reali non negativi (0 è incluso)
R^- è l’insieme dei reali non positivi (0 è incluso)

Definizione 1.1
Relazione di disuguaglianza $\leq$:

$$x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow x - y \in R^-$$

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow y - x \in R^+$$

Teorema 1.1
Proprietà della relazione di disuguaglianza:

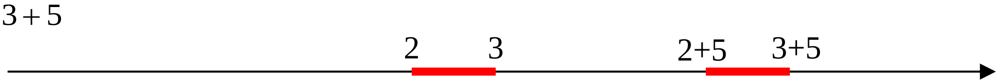
$$\forall a,b,c \in R: \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$\forall a,b \in R,\ c \in R_0^+ : \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

$$\forall a,b \in R, c \in R_0^- : \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$$

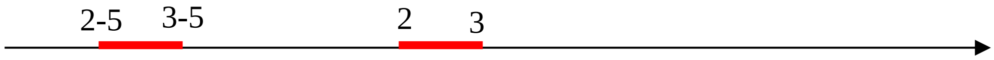
Esempio 1.1

$a = 2, b = 3, c = 5$
$2 < 3 \Rightarrow 2 + 5 < 3 + 5$
$7 < 8$



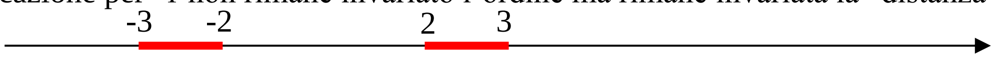
$a = 2, b = 3, c = -5$

$2 < 3 \Rightarrow 2-5 < 3-5$
$-3 < -2$



$2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 5 < 3 \cdot 5$
$10 < 15$
Ma se $a = 2, b = 3, c = -5$ **non è vero che** $2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot (-5) < 3 \cdot (-5)$ infatti vale l'opposto:
$2 < 3 \Rightarrow -10 > -15$.

Domanda chiave
Oltre all'ordine cosa è rimasto invariato nell'operazione $a+c, b+c$?
E' rimasta invariata la "distanza" fra i due punti che è 3-2=1.
Nella moltiplicazione per -1 non rimane invariato l'ordine ma rimane invariata la "distanza"



La distanza dipende dall'ordine in cui considero i punti? Posso dire che la distanza fra 2 e 3 è la stessa fra 3 e 2?

1.3 Il concetto di valore assoluto o modulo di un numero reale

Definizione 1.2
Il valore assoluto di un numero $x \in R$ viene indicato con $|x|$ ed è così definito:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che
1) $|x| \geq 0 \ \forall x \in R$; infatti $x=0 \Rightarrow |x|=0$, $x>0 \Rightarrow |x|=x>0$, $x<0 \Rightarrow |x|=-x>0$.
2) $-|x| \leq x \leq |x| \ \forall x \in R$; infatti $|x| = x$ oppure $|x| = -x$.

Teorema 1.2
Ipotesi: $x \in R$
Tesi : $|-x| = |x| \geq 0$
Dimostrazione:

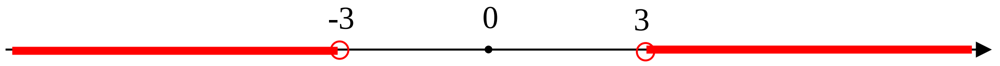
$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{se } -x \geq 0 \\ x & \text{se } -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases} = |x|$$

Osservazione
Si può definire $|x|$ come la distanza dall'origine di un punto dell'asse, il teorema dice che sono uguali le distanze dall'origine di un punto e del suo simmetrico rispetto all'origine.

Esempio 1.1
Voglio risolvere l'equazione $|x|=1$ ossia trovare i punti per cui la distanza dall'origine è 1.
Se considero i numeri non negativi ossia $x \geq 0$ la soluzione è $x = 1$.
Se considero i numeri negativi ossia $x < 0$ la soluzione è $-x = 1$ ossia $x = -1$.
Entrambe queste soluzioni sono accettabili nel campo dei reali quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{-1, 1\}$.
Osservazione:
Non è sempre vero che un'equazione di questo tipo ha 2 soluzioni, se avessimo avuto l'equazione

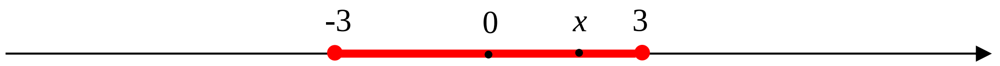
$|x| = -1$ non ci sarebbero state soluzioni nei reali; infatti per quanto detto nella definizione 1.2, il valore assoluto di un numero è sempre non negativo. Mentre $|x| = 0$ ha una sola soluzione: $x = 0$.

Esempio 1.2
Voglio risolvere la disequazione $|x| > 3$ ossia trovare i punti per cui la distanza dall'origine è maggiore di 3, sono i punti esterni all'intervallo [-3,3] quindi $x < 3 \vee x > 3$.



Proviamo a dimostrarlo usando la definizione 1.2: $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \Rightarrow x > 3 \\ -x \text{ se } x < 0 \Rightarrow -x > 3 \Leftrightarrow x < -3 \end{cases}$

Esempio 1.3
Voglio risolvere la disequazione $|x| \leq 3$ ossia trovare i punti per cui la distanza dall'origine è minore di 3, sono i punti esterni all'intervallo [-3,3] quindi $-3 \leq x \leq 3$.



Proviamo a dimostrarlo usando la definizione 1.2: $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ -x \text{ se } x < 0 \Rightarrow -x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3 \end{cases}$

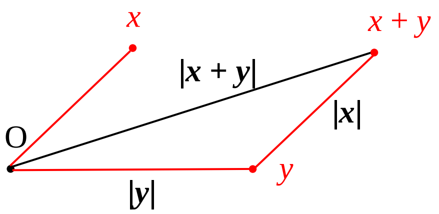
Osservazione
Cosa succede se il valore con cui confrontiamo il valore assoluto è negativo?
Per esempio l'equazione $|x| < -3$ non ha soluzioni reali, mentre $|x| > -3$ è valida per tutti i valori reali.

Teorema 1.3
In R vale un'importante disuguaglianza riguardante il valore assoluto di due numeri detta *disuguaglianza triangolare*:
$\forall x, y \in R \quad |x + y| \leq |x| + |y|$
Dimostrazione:
Dalla definizione 1.2 si ricava che $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, sommando membro a membro si ottiene: $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$.
Quindi nel caso in cui x e y sono concordi

- se $x + y \geq 0$ allora $x + y = |x + y|$ e si ottiene $|x + y| \leq |x| + |y|$
- se $x + y < 0$ allora $x + y = -|x + y|$ e si ottiene $-|x + y| \geq -|x| - |y|$ da cui $|x + y| \leq |x| + |y|$.

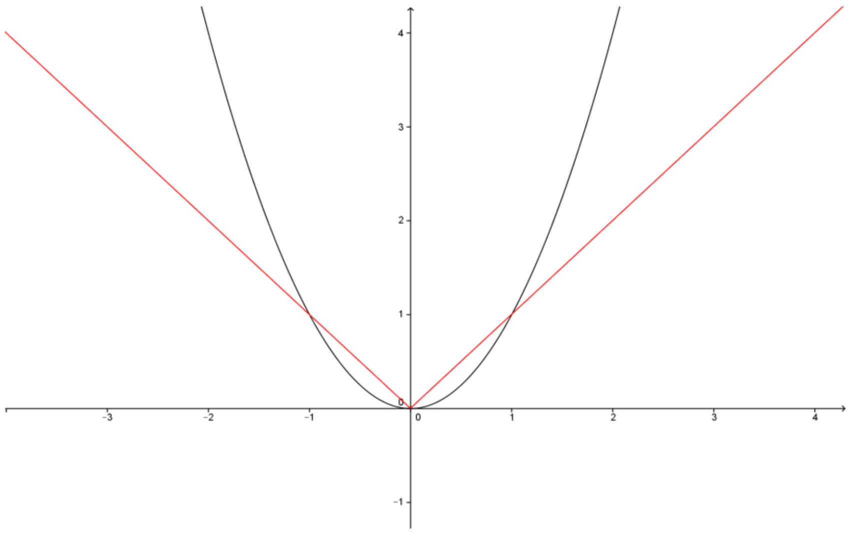
nel caso in cui x e y hanno segno opposto la loro somma ha valore assoluto minore della somma dei valori assoluti.

Perché si chiama disuguaglianza triangolare?



Alcune domande chiave

Domanda 1: "Se consideriamo i grafici delle funzioni $y=|x|$ e $y=x^2$ cosa osserviamo?"

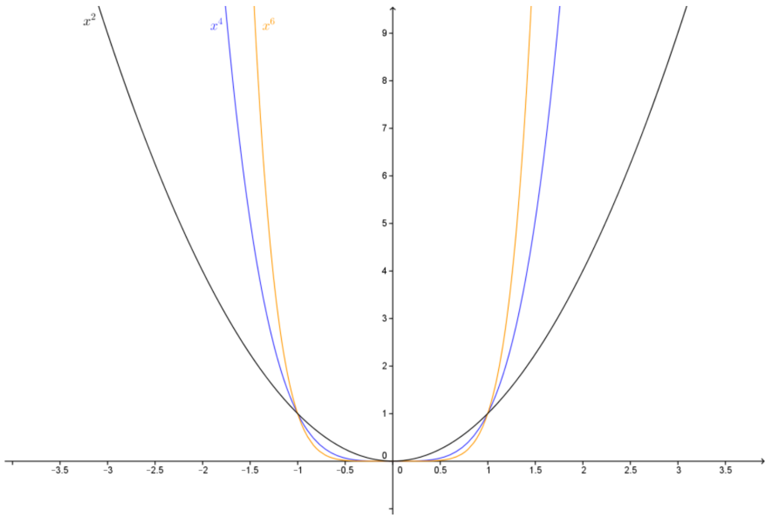


Risposta

1) I grafici sono contenuti nel semipiano delle ordinate non negative ossia l'immagine è R^+.
2) Il valore minimo di y è 0 per entrambe.
3) Il grafico di $y=x^2$ è "liscio" o "smooth" mentre il grafico di $y=|x|$ ha nell'origine una "punta" o, più correttamente, un "punto angoloso".
4) Entrambe le funzioni valgono 1 per $x=\pm 1$ e 0 per $x=0$ quindi i due grafici si intersecano nei punti (-1,1), (1,1) e (0,0); infatti $|x|=x^2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x\geq 0, x=x^2 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0,1 \\ x<0, -x=x^2 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0,-1 \end{matrix}$

Domanda 2: "Quali altre operazioni unarie in R hanno proprietà analoghe?"

Risposta: $x^2, x^4, x^6, ..., x^{2n}$ con $n \in N$



Domanda 3: "Le equazioni |x|=1 e x^2=1 sono equivalenti? E le equazioni |x|=2 e x^2=4? E le equazioni x=1 e x^2=1? E le equazioni |x-1|=3 e $(x-1)^2$=9? "

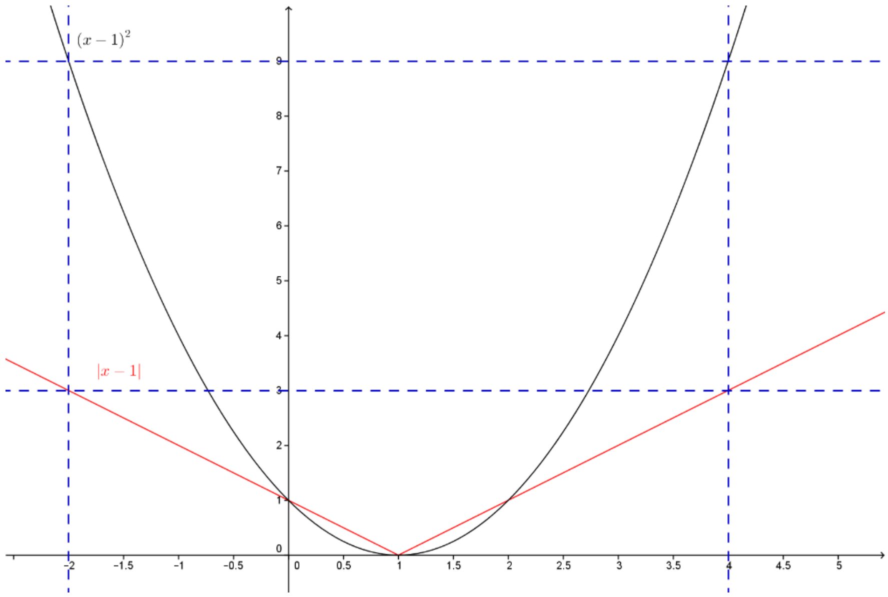
Risposta

|x|=1 e x^2=1 sono equivalenti; infatti, come già visto, l'insieme delle soluzioni di entrambe è $S=\{-1,1\}$.

|x|=2 e x^2=4 sono equivalenti; infatti l'insieme delle soluzioni di entrambe è $S=\{-2,2\}$.

x=1 e x^2=1 non sono equivalenti; infatti la prima ha soluzione solo x=1 mentre l'insieme delle soluzioni delle seconda è $S=\{-1,1\}$.

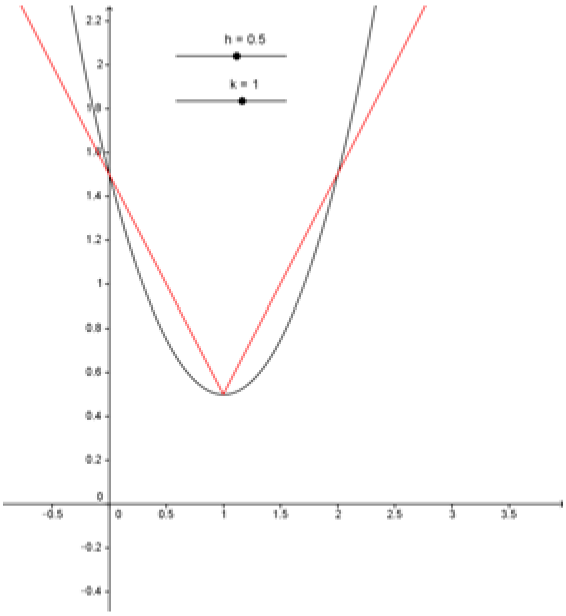
Anche $|x-1|=3$ e $(x-1)^2=9$ sono equivalenti; infatti l'insieme delle soluzioni di entrambe è $S=\{-2,4\}$ come si può vedere anche dai grafici delle due funzioni $y=|x-1|$ e $y=(x-1)^2$ ottenuti traslando i grafici di $|x|$ e x^2 portando l'origine nel punto (1, 0).

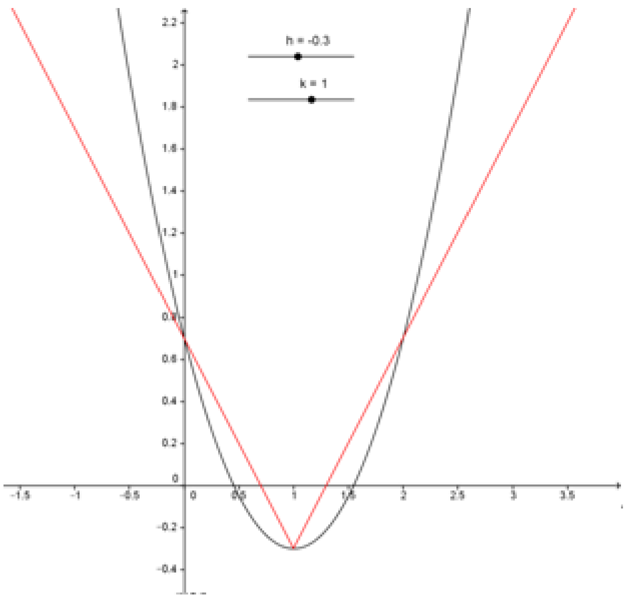


In generale se si traslano i grafici di $|x|$ e x^2 portando l'origine nel punto (k, h) si ottengono le funzioni

$$y-h=|x-k| \to y=|x-k|+h=\begin{cases} x-k+h & \text{se } x \geq k \\ -x+k+h & \text{se } x<k \end{cases}$$

$y-h=(x-k)^2 \to y=x^2-2kx+k^2+h \to y=ax^2+bx+c$ funzione polinomiale di 2° grado





File Geogebra Val_ass_Quadrato.ggb

Le equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado ha la forma $ax^2+bx+c=0 \quad a,b,c\in R$ con $a\neq 0$ ed è risolvibile tramite la nota formula riportata nel teorema 1.2.

Osservazione

Spesso per risolvere un'equazione di secondo grado non è sempre necessario applicare la formula; infatti si può riprodurre il metodo usato nella dimostrazione del teorema 1.2, detto di completamento del quadrato.

Oppure si usa la proprietà per cui $x_1,\, x_2$ sono soluzioni se e solo se l'equazione si può scrivere così:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0 \text{ da cui si ricava che } x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ e } x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Alcuni esempi di equazioni che **non richiedono l'uso della formula.**

$x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$

$x^2+2x-1=0\Leftrightarrow \left(x^2+2x+1\right)-2=0\Leftrightarrow (x+1)^2=2\Rightarrow x+1=\pm\sqrt{2}\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

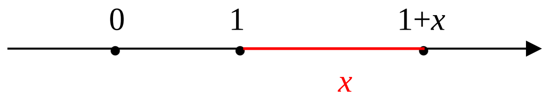
$(x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2\vee x=3$

$x^2+3x-4=0\Rightarrow x_1+x_2=-3, x_1x_2=-4\Rightarrow x_1=1\vee x_2=-4$

$x^2-x-1=0\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=0\Leftrightarrow \left(x^2-2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{4}=0\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\rightarrow x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Una curiosità

$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ è la così detta **sezione aurea**; infatti l'equazione $x^2-x-1=0$ equivale a $x^2=x+1$ e, per $x\geq 0$, $1:x=x:(x+1)$ ossia x è medio proporzionale fra 1 e $1+x$



Se si fa il seguente calcolo: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ per ogni n naturale si ottiene sempre un numero intero!

Teorema 1.2

Se b^2-4ac è **non negativo** le soluzioni o radici di un'equazione di secondo grado ($a\neq 0$) sono date dalla formula

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ dove il termine b^2-4ac è detto discriminante e viene indicato con Δ, in particolare se

$\Delta>0$ si avranno due soluzioni distinte

$\Delta=0$ si avrà una soluzione con molteplicità due (o due soluzioni coincidenti)

$\Delta<0$ non ci saranno soluzioni reali.

La formula è ottenuta scrivendo l'equazione in modo da potere usare la radice quadrata

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

Quindi l'equazione diventa $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ e si vede che le soluzioni esistono se e solo se

$$b^2-4ac\geq 0$$

Esempio 1.4

$x^2 + x + 1 = 0$, il discriminante è -3<0 quindi quest'equazione non ammette soluzioni nei reali.

È bene ricordare che $\sqrt{x^2} = |x|$ e non $\sqrt{x^2} = x^{2\cdot\frac{1}{2}} = x$, ed è anche **sbagliato** scrivere $\sqrt{4} = \pm 2$, perché il simbolo di radice corrisponde a una quantità non negativa.

E' giusto scrivere $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$.

Occorre fare questa precisazione perché per risolvere ad esempio l'equazione $x^2 = 9$ sarebbe errato scrivere $x = \sqrt{9} = \pm 3$, ma bisogna scrivere $|x| = \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$.