Lezione 4 –**Funzioni reali in una variabile reale** (Programma base)

4.1 Un altro problema break even

Un'impresa produce formaggio sostenendo mensilmente un costo fisso C_f ed una spesa variabile dipendente dalla quantità prodotta nel mese. Il prezzo di vendita al quintale è di 1500 euro. Quale quantità minima è necessario produrre mensilmente per non lavorare in perdita?

Definizione 4.1

Una funzione definita in ***X*** si dice

monotona strettamente crescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$
monotona crescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \le x_2$ $f(x_1) \le f(x_2)$
monotona strettamente decrescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$
monotona decrescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \le x_2$ $f(x_1) \ge f(x_2)$

Esempio 4.3

$y = \sqrt{x}$, $x \ge 0$ è monotona strett. crescente; infatti $\forall x_1, x_2 \in R^+$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$

$y = 3$, $x \in R$ è monotona decrescente e anche monotona crescente; infatti $\forall x_1, x_2 \in R$ $f(x_1) = f(x_2) = 3$.

$y = -x^3$, $x \in R$ è monotona strett. decrescente; infatti $\forall x_1, x_2 \in R^+$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3$

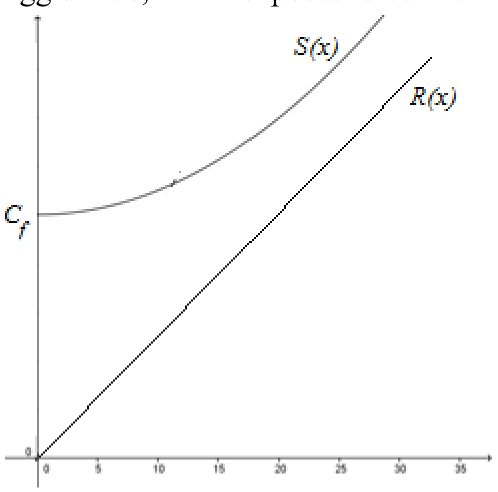
$y = x^2$, $x \in R$ non è monotona; infatti esistono $x_1 = -2, x_2 = 1 \in R$ per cui $4 = f(-2) > f(1) = 1$ ma esistono $x_1 = -1, x_2 = 2 \in R$ per cui $1 = f(-1) < f(2) = 4$.

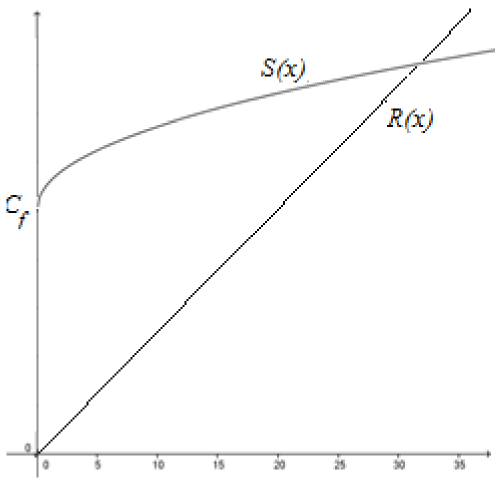
$y = x^2$, $x \in R^+$ è monotona strett. crescente infatti $\forall x_1, x_2 \in R^+$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2$

4.1 Applicazione (passo 1)

Si determina qualitativamente se esiste una quantità minima studiando i grafici delle funzioni spesa e ricavo mensili in funzione della quantità *x* prodotta. Chiamando *S*, *R* e *G* rispettivamente spesa, ricavo e guadagno si deve supporre che sia $S(x) = f(x) + C_f$ funzione crescente di *x*, $R(x) = 1500\ x$. Si tratta di studiare l'andamento della funzione guadagno $G(x) = 1500\ x - f(x) - C_f,\ C_f > 0,\ x \in R_0^+$ e determinare se esiste un valore di *x* per cui *G*(*x*)=0 e se per valori maggiori il guadagno è positivo.

Poiché la funzione *f* non è nota, per determinare se il problema ha soluzione, bisogna fare ipotesi aggiuntive; infatti si possono verificare casi come quelli rappresentati in figura:





In entrambi i casi le funzioni $S(x)$ e $R(x)$ sono strettamente crescenti e nel primo caso si osserva che i grafici di $S(x)$ e di $R(x)$ non si intersecano cioè non esiste un valore della produzione x_0 tale che $S(x_0)=R(x_0)$ ovvero $G(x_0)=0$; nel secondo caso invece i grafici di $S(x)$ e di $R(x)$ si intersecano cioè esiste un valore della produzione x_0 tale che $S(x_0)=R(x_0)$ ovvero $G(x_0)=0$.
E' evidente che per risolvere il problema le proprietà della funzione $f(x)$ devono essere specificate meglio, bisogna introdurre un concetto matematico che permetta di confrontare l'andamento di $S(x)$ e di $R(x)$ nei due casi!

Si introducono ora le seguenti definizioni la cui utilità è puramente teorica, la verifica di tali proprietà sarà affrontata più avanti nel corso.

Definizione 4.2

Una funzione definita in ***X* intervallo** si dice
convessa se

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(hx_1 + (1-h)x_2) \leq hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in [0,1]$$

strettamente convessa se

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 \neq x_2 \quad f(hx_1 + (1-h)x_2) < hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in (0,1)$$

concava se

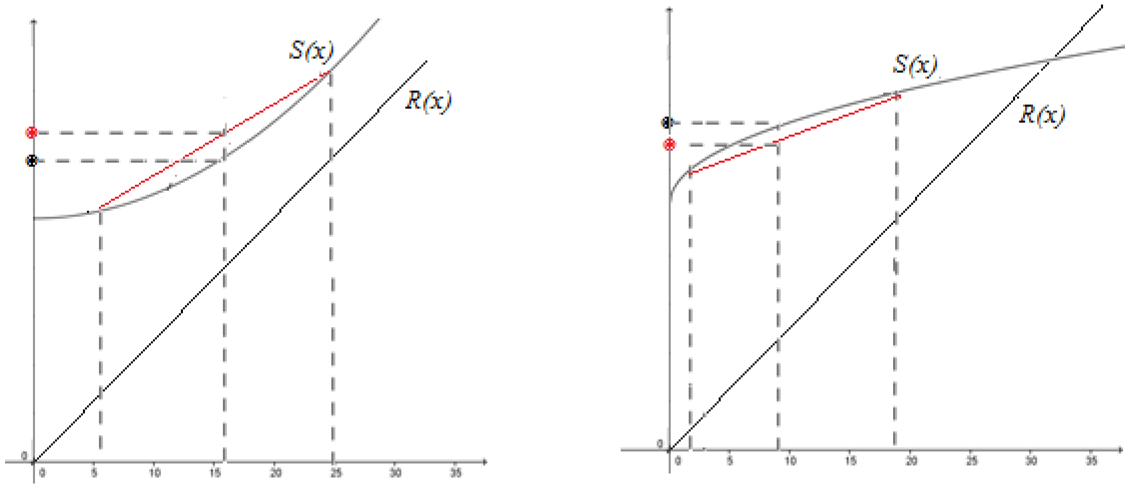
$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(hx_1 + (1-h)x_2) \geq hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in [0,1]$$

strettamente concava se

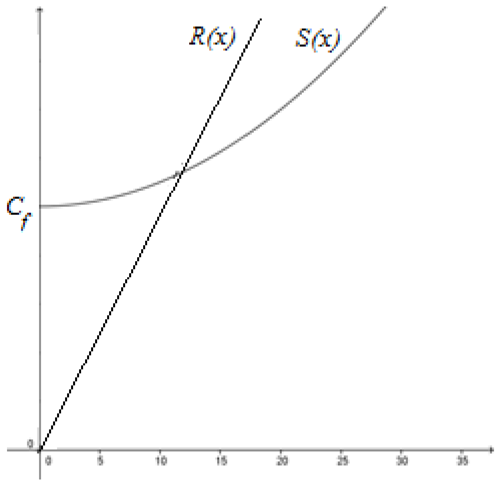
$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 \neq x_2 \quad f(hx_1 + (1-h)x_2) > hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in (0,1)$$

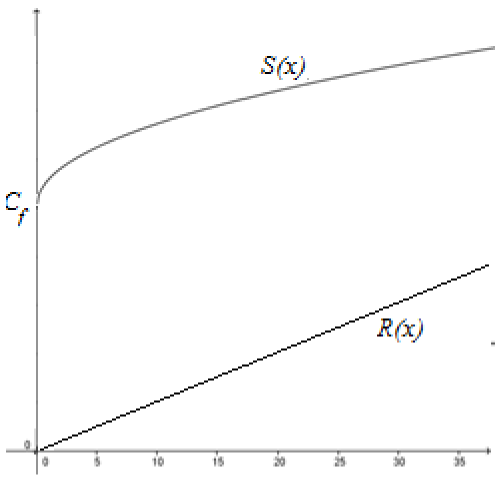
4.1 Applicazione (passo 2)

Si osserva che nel primo caso, dove i grafici delle funzioni $S(x) = f(x) + C_f$ e $R(x) = 1500\,x$ non si intersecano, la funzione costo $S(x)$ è strettamente convessa mentre nel secondo caso, dove i grafici si intersecano, $S(x)$ è strettamente concava.



E' ovvio che le proprietà di convessità/concavità di $S(x)$ non garantiscono che il problema abbia o meno soluzione, l'esistenza o la non esistenza di una o più soluzioni dipendono anche dal grafico di $R(x)$. Per esempio, cambiando la pendenza dal grafico di $R(x)$ potrebbero verificarsi i casi nella figura seguente.





In conclusione, per determinare le condizioni che garantiscono l'esistenza di una soluzione è necessario avere strumenti di **analisi** che permettano di studiare in modo "completo" l'andamento della funzione $G(x)= R(x) - S(x)$ al variare di x!

Alcune funzioni elementari (Programma base)

Funzione affine

Ponendo uguale a 0 un polinomio di primo grado si ha l'equazione $ax + by + c = 0$ che, se $b \neq 0$, determina una funzione detta **funzione affine** che ha come grafico una retta, se c=0 il grafico è una retta che passa per l'origine.

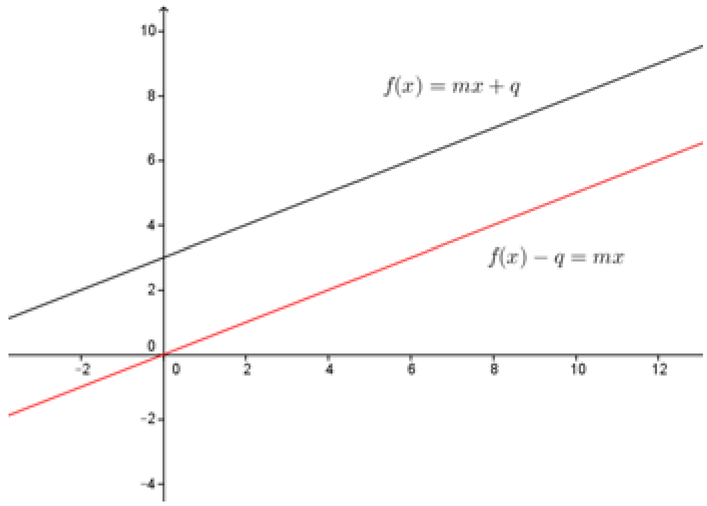
In particolare si ha che:

se $b \neq 0$ $\quad ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ quindi $y = f(x) = mx + q$

Dove m (coefficiente angolare o pendenza) e q (ordinata all'origine) sono costanti reali; se m=0 si avrà una retta parallela all'asse x, se invece q=0, si avrà una retta passante per l'origine.

se $b = 0$ $\quad ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$ retta parallela all'asse delle ordinate

La funzione affine spesso viene detta lineare in quanto è riconducibile ad una lineare mediate la traslazione di $-q$ rispetto all'asse y

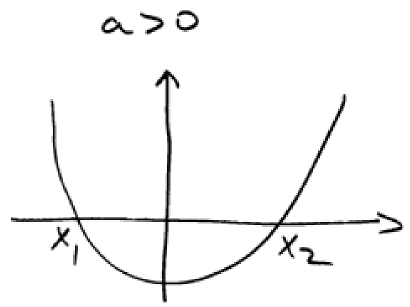


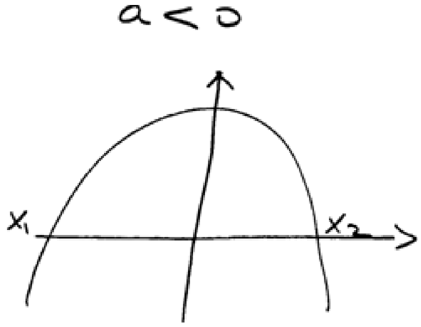
La funzione affine è monotona strettamente crescente se m>0, monotona strettamente decrescente se m<0 e monotona crescente e decrescente se m=0. E' inoltre una funzione sia concava che convessa.

Funzione quadratica

È rappresentata da una parabola di equazione

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$





La funzione quadratica ($a \neq 0$) non è monotona ed è strettamente convessa se $a>0$ e strettamente concava se $a<0$.

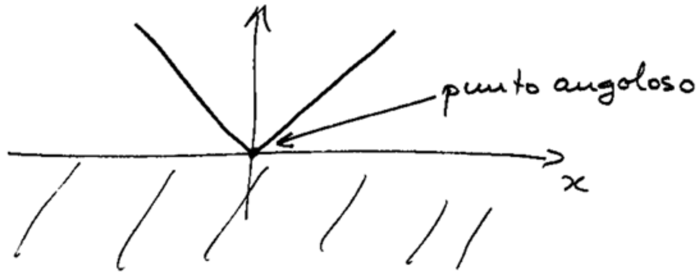
Funzione valore assoluto

È rappresentata dalle semirette bisettrici del primo e secondo quadrante

$y = f(x) = |x|$

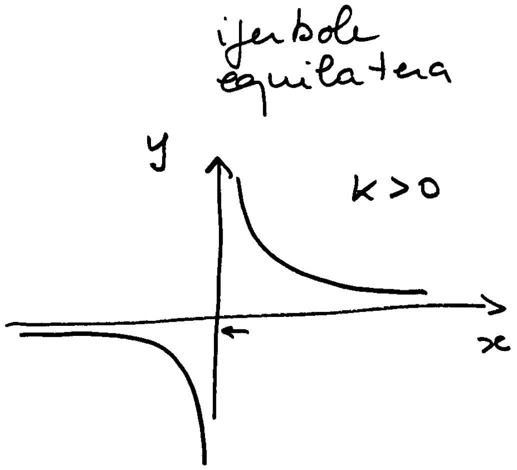
Il punto (0,0) è un punto angoloso

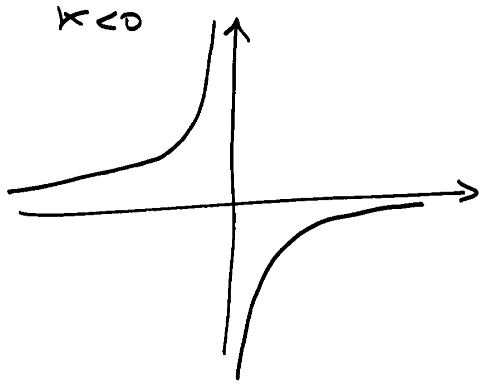
La funzione valore assoluto non è monotona ed è convessa non strettamente.



Funzione di proporzionalità inversa

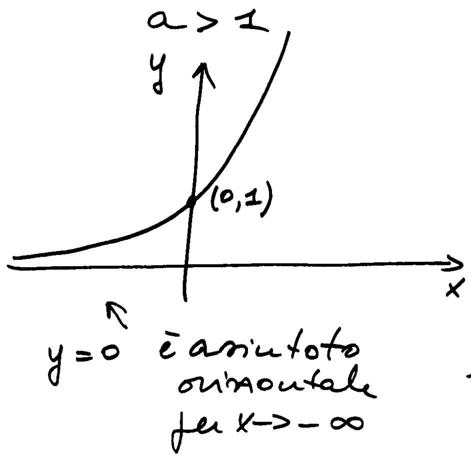
$y = f(x) = \frac{k}{x}, x \neq 0$, le rette $y = 0$ e $x = 0$ si chiamano **asintoti** della funzione

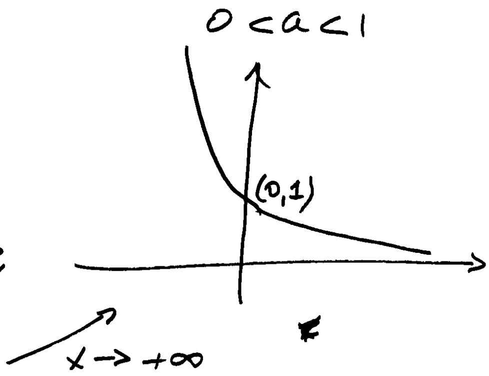




Funzione esponenziale

La funzione esponenziale indicata con $y = a^x \quad a \in R_0^+,\ a \neq 1$ è la generalizzazione di una potenza ad esponente intero al caso di una potenza ad esponente reale.
Il suo dominio è $D = R$, mentre $\operatorname{Im} f = R_0^+$.
Possiede un asintoto orizzontale $y = 0$, ed è strettamente crescente per $a > 1$, strettamente decrescente per $0 < a < 1$.
Possiede un'intersezione con l'asse *y*: $(0,1)\ \forall a \in R_0^+$.
La funzione esponenziale è monotona strettamente crescente se $a > 1$ e monotona strettamente decrescente se $0 < a < 1$; inoltre è strettamente convessa.





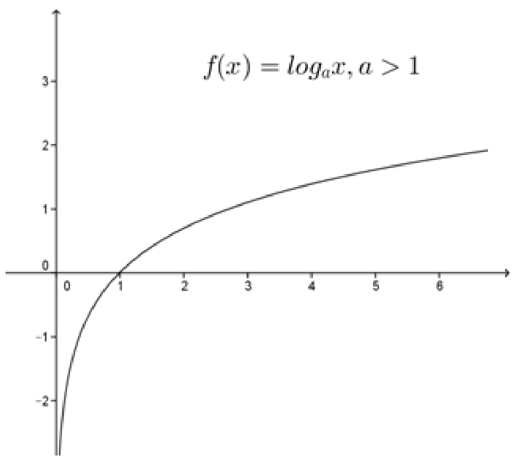
Funzione logaritmo

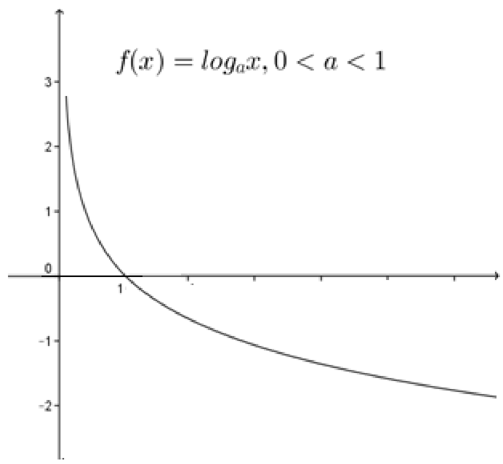
La definizione di logaritmo deriva dal seguente teorema.

Teorema 4.1
Data l'equazione $a^x = b, \quad a, b \in R_0^+,\ a \neq 1$ esiste una sola soluzione reale *x* che la soddisfa.
Tale soluzione è detta **logaritmo di *b* in base *a*** e si scrive $x = \log_a b$; quando la base di un logaritmo è il numero *e* (numero di Nepero, che definiremo in seguito), questo si scrive $x = \ln b$.
Si può considerare la funzione $y = \log_a x,\ x \in R_0^+$ che

- se $0 < a < 1$ la funzione logaritmo è strettamente decrescente e strettamente convessa
- se $a > 1$ la funzione logaritmo è strettamente crescente e strettamente concava

Inoltre la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.



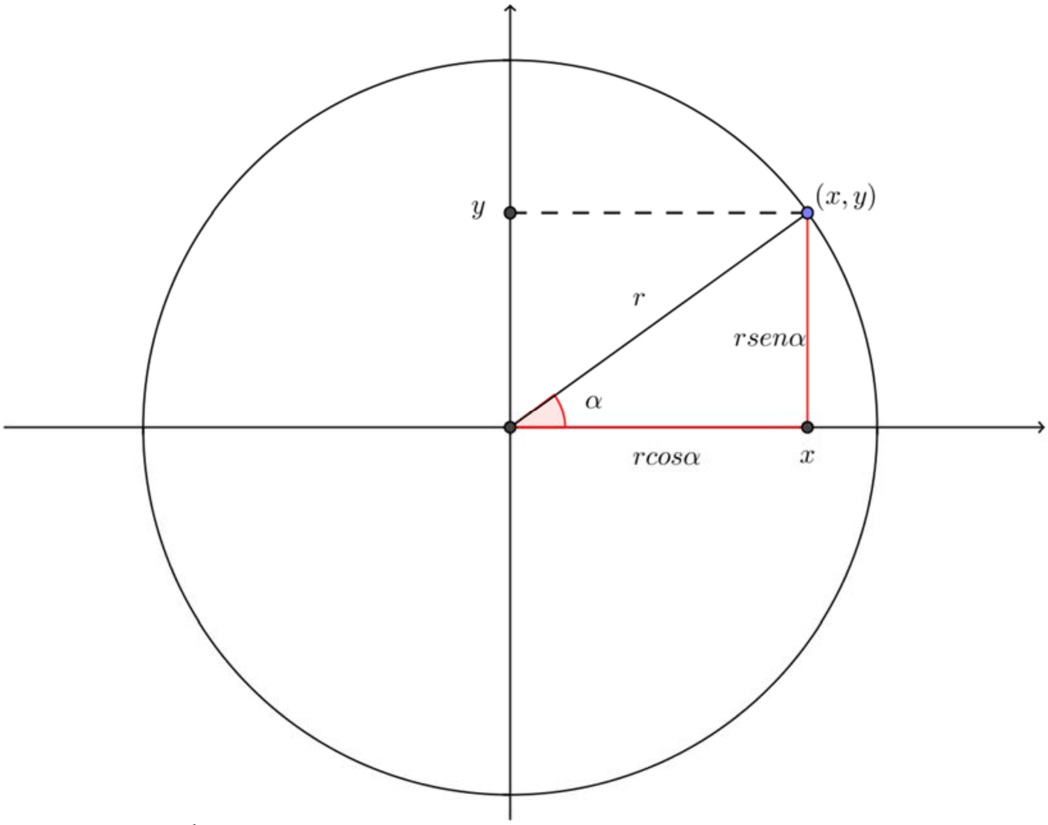


Funzioni seno e coseno

Se si considera nel piano cartesiano una circonferenza di raggio 1, per ogni punto della circonferenza le proiezioni sugli assi coordinati sono rispettivamente le coordinate *x* e *y*.
Facendo variare un punto sulla circonferenza variano sia le coordinate *x* e *y* che la misura dell'angolo al centro α misurato in radianti (vedi figura), le due funzioni che determinano *x* e *y* in funzione dell'angolo α che si intende misurato in radianti ($0 \le \alpha \le 2\pi$) si chiamano rispettivamente coseno (cos α) e seno (sen α), in generale se il raggio è un numero non negativo qualsiasi $r \geq 0$, si ha che *x* e *y* sono proporzionali al coseno e al seno:

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\ \alpha$$

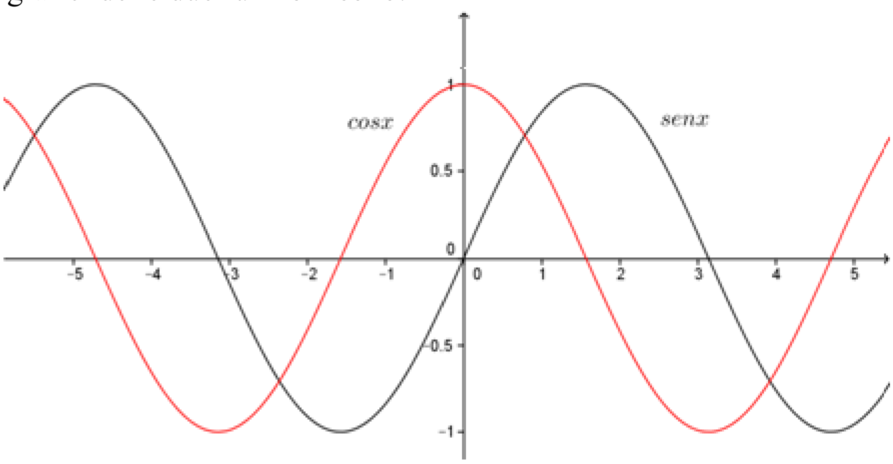


Dalla figura è evidente $\begin{cases} -1 \le \cos\alpha \le 1 \\ -1 \le \mathrm{sen}\ \alpha \le 1 \end{cases}$ quindi le funzioni coseno e seno sono limitate inoltre pensando di poter "percorrere la circonferenza all'infinito" si può considerare $\alpha \in (-\infty,+\infty)$ e i valori delle funzioni si ripetono con periodicità 2π ossia con $k \in Z$ si ha

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$$

$$\mathrm{sen}\ \alpha = \mathrm{sen}(\alpha + 2k\pi)$$

In conclusione i grafici delle due funzioni sono:



Altri esempi di funzioni (Programma avanzato)

Funzione segno

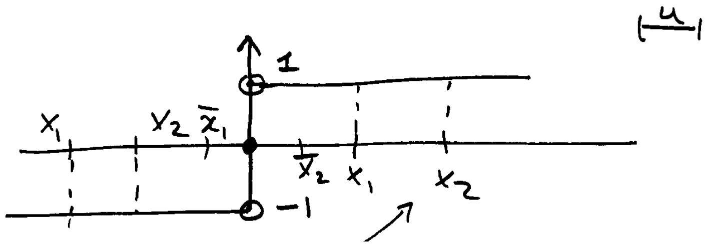
È definita funzione segno di x la funzione $y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

Il suo dominio è $D = R$, mentre il codominio è $\operatorname{Im} f = \{-1,0,1\}$

È una funzione monotona crescente.

Da non confondere è la funzione $y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, che non comprende il caso in cui $x = 0$

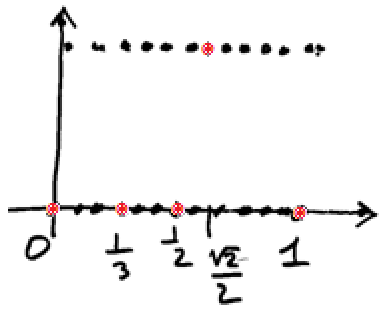
Il suo dominio è infatti $D = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, e il codominio $\operatorname{Im} f = \{-1,1\}$, anche questa è una funzione monotona crescente.



Funzione di Dirichelet

La funzione di Dirichelet è definita $y = f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases}$

$f : [0,1] \to R$, il dominio è $D = [0,1]$ e il codominio $\operatorname{Im} f = \{0,1\}$



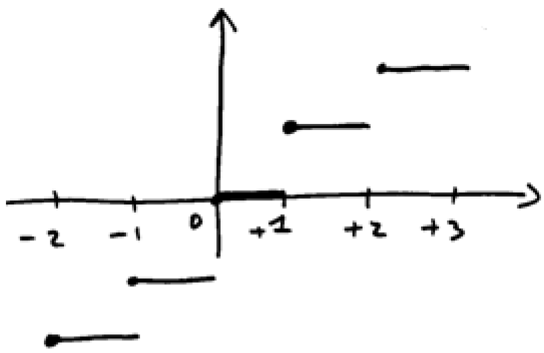
Funzione parte intera

La funzione 'parte intera di x' restituisce il più grande intero minore o uguale a x ed è definita

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in Z \\ n \quad \text{con} \quad n \in Z, x-1 < n < x \ \text{se} & x \notin Z \end{cases}$$

Il dominio della funzione è R e il codominio è $\operatorname{Im} f = Z$

La funzione è monotona crescente.



Le successioni (Programma base)

4.1 Il problema dell'investimento

Un cliente, avendo scelto per l'investimento di un capitale C la proposta per cui il capitale investito cresce del 3% l'anno. Vuole conoscere qual è l'andamento negli anni dell'investimento.

Definizione 4.2

Una successione è una particolare funzione il cui dominio è l'insieme dei naturali: $f : N \to R$, ad ogni naturale corrisponde uno ed un solo valore reale

Le successioni utilizzano la notazione $a_n = f(n) \quad n \in N$

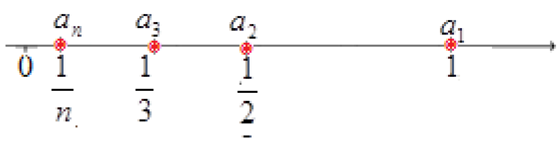
Il codominio delle successioni è

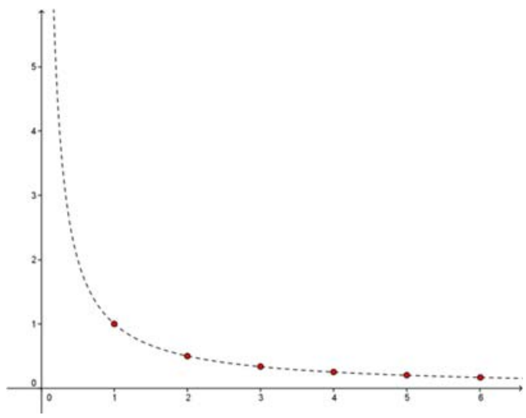
$\mathrm{Im}\, f = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n \in N}$, dove a_n è detto **termine generale** della successione.

Una successione può essere rappresentata sia sulla retta reale che del piano come grafico di funzione. In entrambe i casi si tratta di un insieme discreto di punti.

Esempi 4.2

1) La successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in N_0} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$ è strettamente decrescente, ha codominio (0,1] e perciò ha come estremo inferiore 0, ma non ha minimo, mentre l'estremo superiore coincide con il massimo ed è 1.





2)

$\{(-1)^n\}_{n \in N} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}, \quad \mathrm{Im}\, f = \{-1, 1\}$

è limitata e ha $\inf a_n = \min a_n = -1, \quad \sup a_n = \max a_n = 1$

Definizione 4.3

Una **progressione aritmetica** di ragione $k \in R$ è una particolare successione così definita:

$$a_{n+1} = a_n + k \quad \forall n \in N$$

In modo equivalente si può dire che la differenza tra due termini consecutivi della successione è costante, pertanto il termine generale della successione ha la forma

$\{a_0 + kn\}_{n \in N}$, dove a_0 è il primo termine della successione.

Esempi 4.3

$\{0, 3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\} = \{3n\}_{n \in N}$ è la successione dei multipli di 3.

$\{0, -3, -6, -9, \dots, -3n, \dots\} = \{3n\}_{n \in N}$ è la successione dei multipli di -3.

$\{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\} = \{2n\}_{n \in N}$ è la successione dei numeri pari.

$\{1,3,5,7,\dots,1+2n,\dots\} = \{1+2n\}_{n\in N}$ è la successione dei numeri dispari.
$\{a_0, a_0+\sqrt{2}, a_1+\sqrt{2}, \dots, a_{n-1}+\sqrt{2}, \dots\} = \{1+\sqrt{2}n\}_{n\in N}$

Definizione 4.4
Una **progressione geometrica** di ragione $q \in R$ è una successione così definita:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \quad \forall n \in N$$

In modo equivalente si può dire che il rapporto tra due termini consecutivi della successione è costante, pertanto il termine generale della successione ha la forma $\{a_0 \cdot q^n\}_{n\in N}$, dove a_0 è il primo termine della successione.

Esempi 4.4
$\{1,3,9,\dots,3^n,\dots\} = \{3^n\}_{n\in N}$ è la successione delle potenze di 3.
$\{1,-3,9,\dots,(-1)^n 3^n,\dots\} = \{(-3)^n\}_{n\in N}$ è la successione delle potenze di -3, gli elementi di posto pari sono positivi e quelli di posto dispari sono negativi.

$$\left\{a_0, a_0\frac{1}{2}, a_1\frac{1}{2}, \dots, a_{n-1}\frac{1}{2}, \dots\right\} = \left\{a_0, \frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{24}, \dots, \frac{a_0}{2^n}, \dots\right\} = \left\{\frac{a_0}{2^n}\right\}_{n\in N}$$

$$\left\{a_0, a_0\left(-\frac{1}{2}\right), a_1\left(-\frac{1}{2}\right), \dots, a_{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \dots\right\} = \left\{a_0, -\frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{4}, \dots, (-1)^n\frac{a_0}{2^n}, \dots\right\} = \left\{(-1)^n\frac{a_0}{2^n}\right\}_{n\in N}$$

$$\{a_0, a_0\sqrt{2}, a_1\sqrt{2}, \dots, a_{n-1}\sqrt{2}, \dots\} = \{a_0, a_0\sqrt{2}, 2a_0, 2a_0\sqrt{2}, \dots\} = \{a_0\sqrt{2^n}\}_{n\in N}$$

4.1 Applicazione

Poiché ogni anno l'ammontare del capitale (montante) è pari all'ammontare dell'anno precedente più il suo 3%, all'anno n+1 si ha la successione: $C_{n+1} = C_n + C_n \cdot 0.03 = C_n \cdot 1.03$ con C_0=C.
Si tratta di una progressione geometrica di ragione q=1.03 che quindi si può rappresentare così:

$$\{C \cdot q^n\}_{n\in N} = \{C, 1.03C, 1.03^2C, 1.3^3C, 1.03^4C, 1.03^5C, \dots, 1.03^nC, \dots\} =$$
$$= \{C, 1.03C, 1.0609C, 1.0927C, 1.1255C, 1.1592C, \dots\}$$

In figura è rappresentato il grafico della successione per C=10, il grafico in rosso tratteggiato è quello della funzione esponenziale $y = 1.03^x C, x \in R$.