Lezione 5 – **Funzioni: operazioni, massimi e minimi** (Programma base)

Definizione 5.1

Date $f : X \to R,\ g : X \to R$ si dice **combinazione lineare** di f e g la somma

$$a \cdot f(x) + b \cdot g(x) \qquad a, b \in R$$

In generale, per indicare le operazioni tra funzioni si usa la seguente notazione:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

Esempio 5.1

$$f(x) = x,\ \ g(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$1)\ (f+g)(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$2)\ (f-g)(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$$3)\ (f \cdot g)(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$4)\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Esempio 5.2

Se si considera l'equazione di una retta per l'origine $y = mx$ non coincidente con l'asse y è evidente che *m*, coefficiente di proporzionalità fra *y* e *x*, dipende dall'angolo α che la retta forma con il semiasse positive delle *x*. Si può quindi dire che *m*=*f*(α).

La domanda è: che tipo di funzione è *f*(α)? Come si po' rappresentare analiticamente?

Un esempio di funzione $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è la funzione rapporto $\frac{\text{sen}x}{\cos x}$ con $\cos x \neq 0$ questa funzione di chiama tangente e si indica così:

$$\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \text{ con } \cos x \neq 0$$

Si può osservare che il coefficiente angolare di una retta per l'origine $y = mx$ per $x \neq 0$ è

$$m = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

dove α≠π/2 è l'angolo formato dalla retta con il semiasse positivo delle *x*, da cui *m* **coefficiente angolare.**

Definizione 5.2

$$f : X \to R \quad X \subseteq R$$

La funzione f si dice **limitata** se la sua immagine ($\mathrm{Im}\, f$) è un insieme limitato

Estremo superiore di una funzione limitata $\quad \sup f = \sup \mathrm{Im}\, f$

Estremo inferiore di una funzione limitata $\quad \inf f = \inf \mathrm{Im}\, f$

Se $\mathrm{Im}\, f$ non è limitato superiormente diremo che *f* è illimitata superiormente

Se $\mathrm{Im}\, f$ non è limitato inferiormente diremo che *f* è illimitata inferiormente

Esempio 5.3

$y = 2^{-x^2}$, è una funzione limitata in quanto si verifica facilmente che il suo codominio è $\mathrm{Im}\, f = (0,1]$, infatti la funzione esponenziale è sempre positiva (> 0), ed essendo l'esponente non positivo, tutti i valori della funzione saranno minori o uguali a uno, dove l'uguaglianza vale per $x = 0$.

$y = x^2 + 1$ è invece una funzione illimitata superiormente: il suo codominio è $\mathrm{Im}\, f = [1, +\infty)$
Il suo estremo inferiore è 1, mentre non possiede estremo superiore.

Definizione 5.3

Se $\mathrm{Im}\, f$ ha un massimo allora *f* ammette un **massimo assoluto o globale**
Il punto $x^* \in X$ in cui si ha che $f(x) \le f(x^*) \;\; \forall x \in X$ è detto punto di massimo assoluto o globale

Se $\mathrm{Im}\, f$ ha un minimo allora *f* ammette un **minimo assoluto o globale**
Il punto $\bar{x} \in X$ in cui si ha che $f(x) \ge f(\bar{x}) \;\; \forall x \in X$ è detto punto di minimo assoluto o globale

Definizione 5.4
L'**intorno circolare** centrato nel punto $\bar{x}$ e di raggio δ è definito come l'intervallo $I_\delta(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ questo è equivalente a dire che $|\bar{x} - x| < \delta \quad \forall x \in I_\delta(\bar{x})$

Dimostrazione

Scriviamo per esteso

$$|\bar{x} - x| < \delta \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} - x \ge 0 \Rightarrow \bar{x} - x < \delta \\ \bar{x} - x < 0 \Rightarrow -\bar{x} + x < \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \bar{x} \Rightarrow x > \bar{x} - \delta \\ x > \bar{x} \Rightarrow x < \bar{x} + \delta \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta\right)$$

Definizione 5.5
$\bar{x}$ è un punto di **minimo relativo o locale** per *f* se

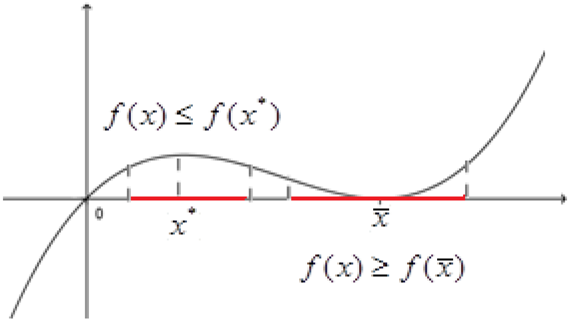
$$\exists I_\delta(\bar{x}) : \forall x \in D \cap I_\delta(\bar{x}) \text{ vale } f(x) \ge f(\bar{x}),$$

in tal caso $f(\bar{x})$ si dice minimo relativo della funzione *f*.

x^* è un punto di **massimo relativo o locale** per f se

$$\exists I_\delta(x^*) : \forall x \in D \cap I_\delta(x^*) \text{ vale } f(x) \le f(x^*),$$

in tal caso $f(x^*)$ si dice massimo relativo della funzione f.



Osservazione

I punti di massimo e minimo assoluti sono anche punti di massimo e minimo relativi, ma non è necessariamente vero il contrario.

Esempio 5.5

$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

Dal grafico di f, funzione pari, si deduce che

1) f non è limitata superiormente quindi non ha punti di massimo assoluto ma ha un massimo relativo in 0: $M = f(0) = 4$.
2) f è limitata inferiormente e ha minimo assoluto m<0 assunto in due punti $x_1 \in (-2,-1)$ e $x_2 \in (1,2)$.