Lezione 7 – **Spazi metrici, intorni e punti di accumulazione** (Programma base)

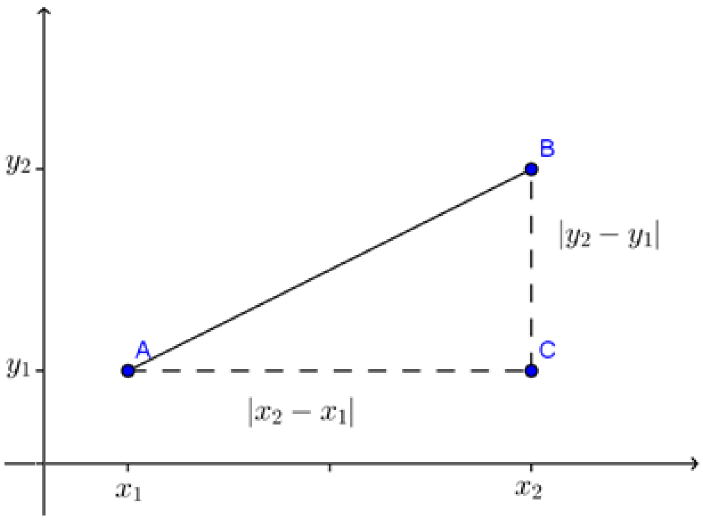
Definizione 7.1
Dato l'insieme $X \subseteq R$ si definisce **distanza** o **metrica** la funzione $d : X \times X \to R$ che rispetta i seguenti requisiti:

1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in R$;
2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3) vale la proprietà simmetrica $d(x, y) = d(y, x)$;
4) vale la disuguaglianza triangolare $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in R$.

Se esiste la funzione d, allora si dirà che X è uno **spazio metrico**.

Esempi 7.1
1) Analizziamo l'insieme dei reali per capire se è uno spazio metrico: dobbiamo trovare una funzione distanza che soddisfi i requisiti detti sopra, ed è facile verificare che quella funzione è $d(x, y) = |x - y|$, infatti
1) $|x - y| \geq 0 \quad \forall x, y \in R$;
2) $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3) $|x - y| = |y - x|$;
4) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \forall x, y, z \in R$.
Perciò, dato che questa funzione è definita nell'insieme $R \times R$, l'insieme dei reali è uno spazio metrico.

2) Prendiamo in considerazione il caso in cui $X = R^2$, come prima dobbiamo trovare la funzione distanza $d : R^2 \times R^2 \to R$, che soddisfi le quattro condizioni; si verifica, anche attraverso osservazioni di carattere geometrico, che la funzione cercata è $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, con $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$; questa è detta anche distanza euclidea.



Trovare tutti i punti nel piano la cui distanza dall'origine sia uguale a tre:

$A=[x_1,y_1],\ B=[0,0] \Rightarrow d(A,B)=3 \Rightarrow \sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=3 \Rightarrow x_1^2+y_1^2=9$ l'equazione del luogo dei punti del piano aventi distanza 3 dall'origine ossia della circonferenza di raggio 3 centrata nell'origine.

Definizione 7.2
Sia X uno spazio metrico in cui è definita la funzione distanza d, si dice **intorno circolare** di centro $c \in X$ e di raggio r il luogo dei punti aventi distanza minore di r da c

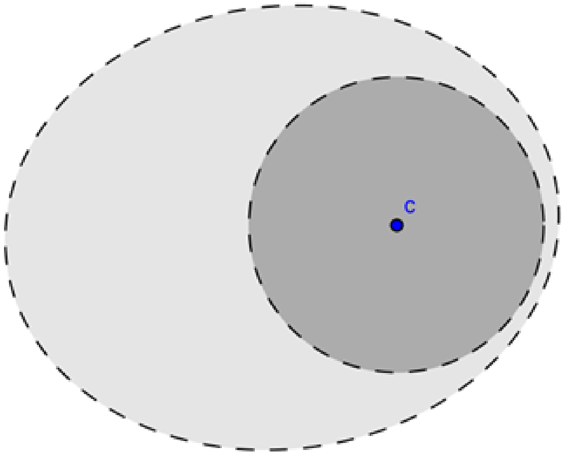
$$I_r(c)=\{x \in X : d(x,c)<r\}$$

Esempio 7.2

Se $X=R,\ d(x,c)=|x-c|$, ad esempio l'intorno circolare di centro 5 e raggio 3 è
$I_3(5)=\{x \in R : |x-5|<3\} \Rightarrow \{x \in R : 2<x<8\}$

Se $X=R^2$ la distanza è rappresentata dalla distanza euclidea, e l'intorno può essere visto come un cerchio di raggio r centrato in $c=[c_1,c_2]$

Definizione 7.3
Sia X uno spazio metrico, si dice **intorno di un punto** c qualunque insieme che contenga un intorno circolare di c.



Esempio 7.3
Nella retta dei reali, un intorno di 5 potrebbe essere $(1,6)$ in quanto contiene l'intorno circolare $I_{0.5}(5)=(4.5,5.5)$.

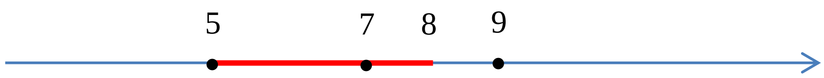
Nel piano, un intorno dell'origine può essere rappresentato da tutti i punti interni ad una qualsiasi curva chiusa che contenga l'origine.

Definizioni 7.4
Sia X uno spazio metrico, $A \subset X$, si dice che
1. $p \in A$ è **punto interno** ad A se esiste un intorno circolare di p $I_r(p)$ tutto contenuto in A, ossia se $\exists r>0 : I_r(p) \subset A$. L'insieme dei punti interni ad A si dice **interno di A** e si indica $\mathring{A}$.

2. $p \notin A$ è **punto esterno** ad A se p è interno al complementare di A rispetto a X: $\overline{A}_X$, ossia se esiste un intorno circolare di p $I_r(p)$ tutto contenuto in $\overline{A}_X$.
   Alternativamente si può dire che p è esterno ad A se $\exists I_r(p) : I_r(p) \cap A = \Phi$ (insieme vuoto)
3. $p \in X$ è **punto di frontiera** di un insieme A un punto tale che in ogni suo intorno circolare esistono punti appartenenti ad A e punti non appartenenti ad A.
   L'insieme dei punti di frontiera di A è detta **frontiera** dell'insieme A ed è indicata con fA.

Osservazione
I punti di frontiera non sono né interni né esterni.

Esempi 7.4
Sia $A = [5,8)$



1. 7 è interno ad A; infatti esiste un intorno di 7 tutto contenuto in A, per esempio $I_{0.5}(7) = (6.5, 7.5) \subset A$. Invece 5 non è interno ad A; infatti comunque si scelga $r > 0$ $I_r(5) = (5-r, 5+r) \not\subset [5,8)$.
2. $A = [5,8) \subset R$, $p = 9$ è esterno all'insieme A perché $I_{0.5}(9) \cap A = \Phi$.
3. $X = R$, $A = [5,8)$, $p = 5$ e $q = 8$ sono entrambi punti di frontiera: $fA = \{5, 8\}$

Osservazioni
I punti interni ad A appartengono ad A;
I punti esterni ad A non appartengono ad A;
I punti di frontiera di A possono appartenere o no ad A

Definizioni 7.5
1. Si definisce **chiusura di un insieme** A e si indica con $\overline{A}$ l'insieme $\overline{A} = A \cup fA$
2. Un insieme A si dice **aperto** se esso coincide con il suo interno, ossia se ogni suo punto è anche punto interno: $A = \overset{\circ}{A}$
3. Un insieme A si dice **chiuso** se esso coincide con la sua chiusura: $A = \overline{A}$

Osservazione
Per convenzione, sia R che l'insieme vuoto sono considerati sia aperti che chiusi.

Definizione 7.6
Un punto p si dice **punto di accumulazione** di un insieme A se in ogni suo intorno circolare esiste almeno un punto di A diverso da p.
L'insieme dei punti di accumulazione di A è detto **derivato di** $\boldsymbol{A}$ e si indica DA.

Osservazioni
1) Se *p* è interno ad *A* è anche punto di accumulazione, perché esistono infiniti intorni circolari di *p* tutti contenuti in *A*.
2) I punti esterni ad un insieme *A* non sono punti di accumulazione.
3) I punti di frontiera possono o meno essere punti di accumulazione.
4) *p* è punto di accumulazione di *A* se in ogni intorno di *p* cadono infiniti punti di *A*.

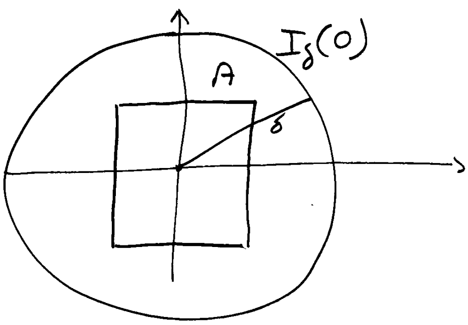
Esempi 7.5
1) $A = (5,8) \cup \{10\}$, questo insieme non è un aperto, la sua frontiera è $fA = \{5,8,10\}$.
I punti di accumulazione di A sono tutti i punti dell'intervallo $[5,8]$.
Il punto $\{10\}$ non è un punto di accumulazione, poiché non è vero che in ogni suo intorno circolare esiste almeno un punto di *A* diverso da 10, quindi 10 è punto isolato di *A*.

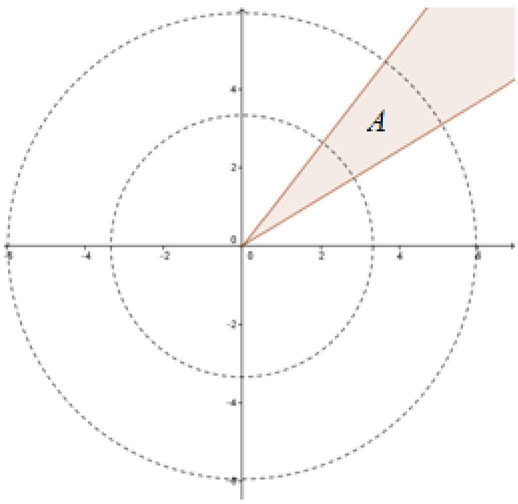
2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in N_0} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ ha nel punto 0 un punto di accumulazione; infatti
$\forall I_r(0),\ I_r(0) \cap A \neq \Phi$ cioè esiste un punto di *A* che appartiene a $I_r(0)$ comunque si scelga *r*
ossia esiste *n* tale che $-r < \frac{1}{n} < r \Leftrightarrow n > \frac{1}{r} > 0$.

Teorema 7.1
Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Definizione 7.7
Sia $X = R^2$ uno spazio metrico e $A \subset X$, *A* si dice limitato se esiste un intorno $I_\delta(O)$ che contenga tutto *A*.

Esempio 7.6





L'insieme *A* nella prima figura è un quadrato con centro di simmetria nell'origine ed è limitato, nella seconda figura è la regione compresa tra le due semirette uscenti dall'origine e non è limitato.

Definizione 7.7
Sia X uno spazio metrico e $A \subset X$, se *A* è chiuso e limitato, allora *A* si dice compatto.