Lezione 8 – **Limiti** (Programma base)

8.1 Un problema aperto

Data la funzione polinomiale $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ è possibile descriverne l'andamento qualitativo determinando oltre ai punti di intersezione con gli assi anche l'andamento per valori "molto grandi" o "molto piccoli" di x?

Introduzione al concetto di limite

Introduciamo la notazione $R^* = R \cup \{-\infty, +\infty\}$

Dati $X \subseteq R,\ f : X \to R,\ x_0 \in R^*$ dove x_0 è un punti di accumulazione per X, l'operazione di limite descrive il comportamento della funzione f nell'intorno del punto x_0

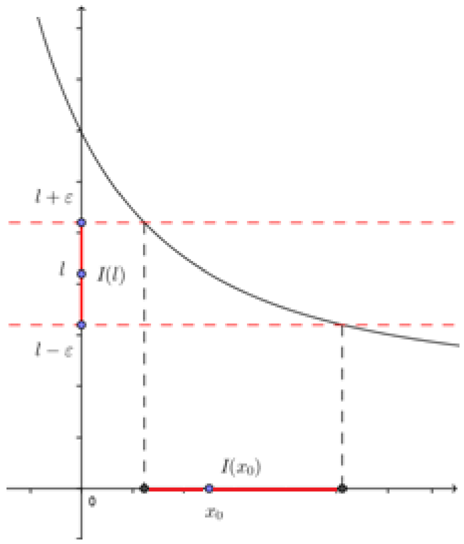
Definizione 8.3

$f : X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0$ punto di accumulazione, $x, x_0 \in R^*,\ l \in R^*$ si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

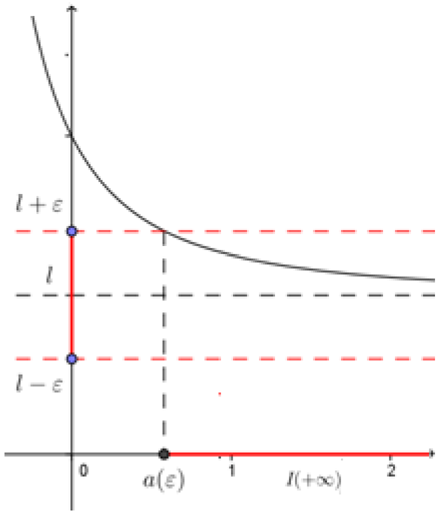
E si legge 'f tende a l per x che tende a x_0', o 'il limite di f per x che tende a x_0 è l'

se $\forall I(l)\ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap X,\ x \neq x_0$ vale $f(x) \in I(l)$

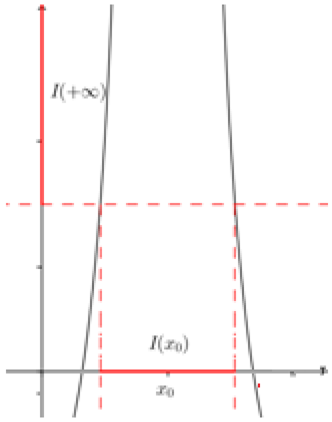
Caso x_0 finito e l finito



Caso $x_0 = +\infty$ e l finito



Caso x_0 finito e $l = +\infty$



Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con ***l* finito** si dice che ***f* è convergente a *l* per *x* che tende a** x_0

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \; (-\infty)$, si dice che ***f* è divergente a** $+\infty \; (-\infty)$ **per *x* che tende a** x_0

Esempi 8.2 (Programma avanzato)

1) Verificare che $\lim_{x \to 0}(x^2 + 2) = 2$

$\forall I_\varepsilon(2)$ devo far vedere che $\forall x \in I_\delta(0) \cap R,\ x \neq 0$ vale $f(x) \in I_\varepsilon(2)$

$2 + x^2 \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \Rightarrow 2-\varepsilon < 2 + x^2 < 2+\varepsilon$

$$\begin{cases} x^2 > -\varepsilon \\ x^2 < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$$

Quello che abbiamo trovato è effettivamente un intorno di 0, poiché basta porre $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ per avere $0 - \delta < x < 0 + \delta$.

2) Verificare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} + 1 = 1$, il dominio della funzione è $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Affinché sia vero il limite $\forall \varepsilon > 0$ deve esistere un intorno $I(+\infty) = (a, +\infty)$ tale che $\forall x \in I(+\infty) \cap D$ valga $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 \in I(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

$$1-\varepsilon < \frac{1}{(x+1)^2} + 1 < 1+\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{(x+1)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow (x+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}, x \neq -1$$

Le soluzioni della disequazione sono $x < -1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \vee x > -1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ponendo $a = -1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ si ha che per $x > a$ ossia $x \in (a, +\infty)$ vale $f(x) \in I(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Osservazione: nella verifica si è trovato che $f(x) \in I(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ anche per $x \in (-\infty, b) = I(-\infty)$ dove $b = -1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ quindi vale anche $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(x+1)^2} + 1 = 1$.

3) Verificare che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, il dominio della funzione è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Deve esistere un intorno $I(0)$ tale che $\forall x \in I(0) \cap D,\ x \neq 0$ valga $\frac{1}{x^2} \in I(+\infty) = (a, +\infty)$, a>0

$$\frac{1}{x^2} > a \Rightarrow \frac{1 - ax^2}{x^2} > 0.$$

Il numeratore è positivo se $-\frac{1}{\sqrt{a}} < x < +\frac{1}{\sqrt{a}}$, il denominatore è positivo per ogni x nel dominio della funzione, perciò si avrà complessivamente che la funzione è positiva per $-\frac{1}{\sqrt{a}} < x < +\frac{1}{\sqrt{a}}$, che rappresenta un intorno circolare di 0 ponendo $\frac{1}{\sqrt{a}} = \delta$.

Osservazione
Non sempre esiste il limite di una funzione, ne è un esempio il limite $\lim_{x\to+\infty}\sin(x)$, o anche $\lim_{x\to\frac{1}{2}} D(x)$, dove $D(x)$ è la funzione di Dirichelet.

Definizione 8.4
$f: X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0$ punto di accumulazione per X, $x_0 \in R^*$, $l \in R^*$.

Se $\forall I_\varepsilon(l)\ \exists I_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta): \forall x \in I_\delta^+(x_0) \cap X,\ x \neq x_0$ vale $f(x) \in I_\varepsilon(l)$
allora $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ si dice **limite destro** della funzione.

Se $\forall I_\varepsilon(l)\ \exists I_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0): \forall x \in I_\delta^-(x_0) \cap X,\ x \neq x_0$ vale $f(x) \in I_\varepsilon(l)$
allora $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ si dice **limite sinistro** della funzione.

Esempio 8.3 (Programma avanzato)

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

$f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \Rightarrow 1-\varepsilon < f(x) < 1+\varepsilon$, questo è sempre verificato poiché $\delta > 0$, e la funzione nell'intervallo $(0,\delta)$ vale 1.

2. Verificare che $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$ quindi il $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ non esiste.
Il dominio della funzione è $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Affinché sia vero $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$, per ogni $I(+\infty) = (a, +\infty), a > 0$ deve esistere $I_\delta^+(1)$ tale che $\forall x \in I_\delta^+(1) \cap R,\ x \neq 1$ valga $f(x) = \frac{1}{x-1} \in I_\delta^+(1) = (1, 1+\delta)$.
Senza perdere di generalità si può considerare $a > 0$; infatti se $f(x)>a$ per $a>0$ vale anche per $a<0$.
$\frac{1}{x-1} > a \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{a} \Leftrightarrow 1 < x < 1+\frac{1}{a}$ ponendo $\delta = \frac{1}{a}$ si ha che $f(x) > a$ ossia $f(x) \in (a, +\infty)$.

Affinché sia vero $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$, per ogni $I(-\infty) = (-\infty, -a), a > 0$ deve esistere $I_\delta^-(1)$ tale che $\forall x \in I_\delta^-(1) \cap R,\ x \neq 1$ valga $f(x) = \frac{1}{x-1} \in I_\delta^-(1) = (1-\delta, 1)$.
$\frac{1}{x-1} < a \Rightarrow -\frac{1}{a} < x-1 < 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{a} < x < 1$, ponendo $\delta = \frac{1}{a}$ si ha che $f(x) < a$ ossia $f(x) \in (-\infty, -a)$.
In entrambi i casi si è considerato $a > 0$ senza perdere di generalità; infatti se $f(x)>a$ per $a>0$ vale anche per $a<0$ e se $f(x)<-a$ per $a>0$ vale anche per $a<0$.

Teorema 8.1
Condizione necessaria e sufficiente affinché esista il limite di una funzione per x che tende a x_0 è:
$\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste ed è uguale ad l se e solo se esistono i limiti destro e sinistro uguali a l ossia

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Esempi 8.4

1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ x^3+1 & x<0 \end{cases}$, si vuole trovare il limite di *f* per $x\to 0$

Servendosi del grafico si può dedurre facilmente che $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$; essendo i due limiti uguali, allora la funzione per $x\to 0$ ammette limite $l=1$.

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ x^3 & x<0 \end{cases}$, si vuole trovare il limite di *f* per $x\to 0$, in questo caso

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$, perciò, essendo diversi il limite destro e quello sinistro, la funzione non ammette limite per $x\to 0$.

4) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ per $x\in X=R_0$, 0 è punto di accumulazione per il dominio *X* e esistono

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$ tuttavia, essendo diversi il limite destro e quello sinistro, la funzione non ammette limite per $x\to 0$.

Definizione 8.5

$f: X\to R$, $X\subseteq R$, x_0 punto di accumulazione per *X*, $x_0\in R^*$, $l\in R^*$

Sia $I_\varepsilon^+(l)=(l,l+\varepsilon)$ intorno destro di *l*, se $\forall I_\varepsilon^+(l)$ $\exists I_\delta(x_0): \forall x\in I_\delta(x_0)\cap X$, $x\ne x_0$ vale $f(x)\in I_\varepsilon^+(l)$ allora *l* si dice **limite per eccesso** della funzione e si indica $\lim_{x\to x_0} f(x)=l^+$.

Sia $I_\varepsilon^-(l)=(l-\delta,l)$ intorno sinistro di *l*, se $\forall I_\varepsilon^-(l)$ $\exists I_\delta(x_0): \forall x\in I_\delta(x_0)\cap X$, $x\ne x_0$ vale $f(x)\in I_\varepsilon^-(l)$ allora *l* si dice **limite per difetto** della funzione e si indica $\lim_{x\to x_0} f(x)=l^-$.

Esempio 8.5 (Programma avanzato)

Verifichiamo che $\lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{x}=0^+$

$$-\frac{1}{x}\in(0,\varepsilon)\Rightarrow 0<-\frac{1}{x}<\varepsilon\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}<0\\ \frac{1}{x}>-\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ \frac{1+\varepsilon x}{x}>0\end{cases}\Rightarrow x<-\frac{1}{\varepsilon}$$

Ponendo $\frac{1}{\varepsilon}=a\Rightarrow x\in(-\infty,a)$ che è un intorno di $-\infty$.

8.1 Applicazione

Per determinare l'andamento per valori "molto grandi" o "molto piccoli" di x della funzione polinomiale $f(x)=(x^2-1)(x^2-4)$ bisogna calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Osservando l'andamento del grafico si può dire che entrambi i limiti sono $+\infty$ ma tale affermazione va motivata con i calcoli.