Lezione 9 – **Proprietà dei limiti** (Programma base)

Premessa di LOGICA

La proposizione $I \Rightarrow T$ (se … allora …), è vera **se e solo se** la proposizione $\neg T \Rightarrow \neg I$ ossia

il teorema $I \Rightarrow T$, dove si afferma che l'**ipotesi** I **implica** la **tesi** T

(*I* ***è condizione SUFFICIENTE per*** *T*),

è equivalente

al teorema $\neg T \Rightarrow \neg I$ afferma che la **negazione della tesi** T **implica** la **negazione dell'ipotesi** I

(*T* ***è condizione NECESSARIA per*** *I*),

Questa è la base del metodo di dimostrazione per assurdo, che, al fine di dimostrare la veridicità di una regola, dimostra che la negazione di questa regola è falsa.

Teorema 9.2

Enunciato del **Teorema di unicità del limite**: il limite di una funzione per $x \to x_0$ se esiste è unico.

Ipotesi

$f : X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in R$ è un punto di accumulazione di X, f ammette limite per $x \to x_0$, $l \in R$

Tesi

Il limite l è unico.

Dimostrazione

Dire che il limite l è unico significa dire che non esistono altri valori reali per cui valga $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$

Supponiamo finito il limite di f e, ragioniamo **per assurdo**, neghiamo le tesi quindi ipotizziamo l'esistenza di due limiti l e l_1 diversi, per comodità ipotizziamo $l > l_1$, quindi valgono:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \text{ e } \ \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$$

Per la definizione vale quindi

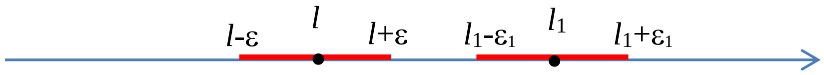
1) $\forall I_\varepsilon(l)\ \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap X, x \neq x_0$ vale $f(x) \in I_\varepsilon(l)$

2) $\forall I_{\varepsilon_1}(l_1)\ \exists I_{\delta_1}(x_0) : \forall x \in I_{\delta_1}(x_0) \cap X, x \neq x_0$ vale $f(x) \in I_{\varepsilon_1}(l_1)$

Da cui si deduce che $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0\ \exists I_\delta(x_0), I_{\delta_1}(x_0) : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap I_{\delta_1}(x_0) \cap X, x \neq x_0$ vale $f(x) \in I_\varepsilon(l)$ e $f(x) \in I_{\varepsilon_1}(l_1)$. Poiché ε e ε_1 sono qualsiasi $f(x) \in I_\varepsilon(l)$ e $f(x) \in I_{\varepsilon_1}(l_1)$ deve valere anche se si prendono $\varepsilon < \frac{l - l_1}{2}$ e $\varepsilon_1 < \frac{l - l_1}{2}$.

In questo caso i due intorni $I_\varepsilon(l),\ I_{\varepsilon 1}(l_1)$ sono disgiunti quindi non esiste nessun intorno di x_0 per cui valga $f(x) \in I_\varepsilon(l)$ e $f(x) \in I_{\varepsilon_1}(l_1)$ quindi l'ipotesi che, per assurdo, esistano due limiti l e l_1 diversi porta ad una contraddizione, ne consegue che il limite di una funzione, se esiste, è unico.

Nella seguente figura si rappresenta l'asse y e si evidenzia il caso $\varepsilon < \frac{l - l_1}{2}$ e $\varepsilon_1 < \frac{l - l_1}{2}$.



Teorema 9.3 Teorema della permanenza del segno

Ipotesi

$f : X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in R$ è un punto di accumulazione di X, esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l > 0$ $(l < 0)$

Tesi

$\exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap D, x \neq x_0$ per cui vale $f(x) > 0$ $\quad (f(x) < 0)$

Dimostrazione
Prendiamo il caso in cui $l > 0$:
Per ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, perciò ne segue che $\forall I_\varepsilon(l) = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)\ \exists I_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$:
$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap X, x \neq x_0$ vale $f(x)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Se scelgo $0<\varepsilon<l \Rightarrow l-\varepsilon>0$, e siccome $l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$, allora $0 < f(x) < l+\varepsilon$, e abbiamo dimostrato la tesi.

Limiti di successioni

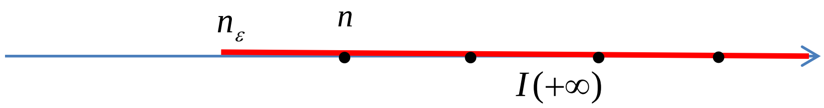
La definizione di limite introdotta per funzioni reali di una variabile reale può essere applicata anche a funzioni di una variabile naturale ossia alle successioni, in tal caso l'unico punto di accumulazione del dominio è $+\infty$ quindi si considera solo il limite per $n\to+\infty$.
Diamo qui la definizione che tuttavia è un caso particolare della definizione già introdotta.

Definizione 9.1
Data la successione $f(n) = a_n : N \to R$, esiste il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ se

$$\forall I_\varepsilon(l)\exists I(+\infty) : \forall n \in I(+\infty)\cap N \ \text{ vale } \ a_n \in I_\varepsilon(l)$$

ossia

esiste $n_\varepsilon \in N$ tale che per ogni numero naturale $n > n_\varepsilon$ vale $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$



Esempi 9.2

1) Verificare tramite la definizione che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$

Per $n \in I(+\infty)$ deve valere $a_n \in I_\varepsilon(0)$

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} > -\varepsilon \\ \frac{1}{n} < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > -\frac{1}{\varepsilon} \\ n > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$ è effettivamente un intorno di $+\infty$ quindi è vero che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

2) Data la successione $a_n = \{(-2)^{-n}\}$ dire se il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ esiste e, qualora esista, verificarlo tramite la definizione.

Poiché la successione dei valori assoluti $|a_n| = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ tende a 0, è vero che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Per $n \in I(+\infty)$ deve valere $a_n \in I_\varepsilon(0)$ ossia $-\varepsilon < \frac{1}{(-2)^n} < \varepsilon$.

$$\text{Se } n \text{ è pari} \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} > -\varepsilon \text{ vera } \forall n \in N \\ \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\text{Se } n \text{ è dispari} \begin{cases} -\dfrac{1}{2^n} > -\varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ -\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon \text{ vera } \forall n \in N \end{cases} \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Concludendo $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ è effettivamente un intorno di $+\infty$ quindi è vero che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Osservazione

Se scriviamo $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} = -\log_2 \varepsilon$ la condizione su n è: $n > -\log_2 \varepsilon$; questa condizione potrebbe sembrare verificata $\forall n \in N$ ma **non è vero!**

Infatti se $\varepsilon \geq 1, -\log_2 \varepsilon < 0$ quindi $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ è verificata $\forall n \in N$ ma

se $0 < \varepsilon < 1, -\log_2 \varepsilon > 0$ quindi $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ è verificata per $n > -\log_2 \varepsilon$

in conclusione $I(+\infty) = (a, +\infty)$ dove $a = \max(0, \log_2 \varepsilon)$.

3) Data la successione $a_n = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$, il limite $\lim_{n \to +\infty} a_n$ evidentemente non esiste. Questa successione si dice oscillante.

Asintoti

Definizione 9.2

Sia $f : X \to R$, $X \subseteq R$, $x_0 \in R$ un punto di accumulazione

- se $x_0 \neq \pm\infty$ e almeno uno dei limiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ vale $+\infty$ o $-\infty$, si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale** per il grafico della funzione.
- se almeno uno dei seguenti limiti $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ vale, si dice che la retta di equazione $y = l$ si dice **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione.

Osservazione

Se una funzione f è invertibile e la retta di equazione $x = a$ è **asintoto verticale,** per l'inversa f^{-1} la retta di equazione $y = a$ è **asintoto orizzontale.**

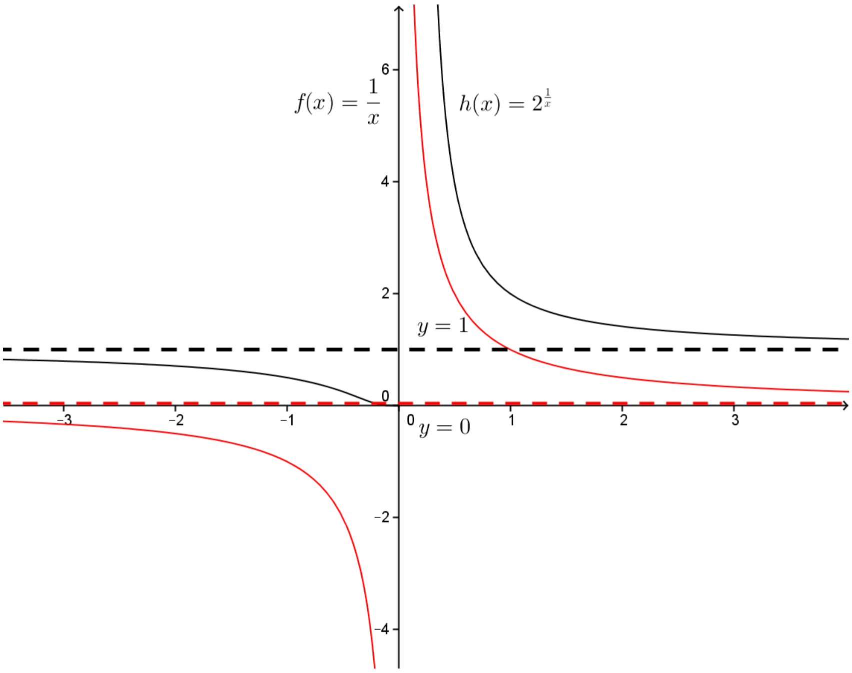
Esempio 9.3

1) Sia $f(x) = \frac{1}{x}$ poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ la retta $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$ inoltre, poiché

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ la retta $x = 0$ è anche asintoto verticale per $x \to 0^-$.

Inoltre, poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, la retta di equazione $y = 0$ è **asintoto orizzontale** sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

Si osservi che in questo caso $f(x) = f^{-1}(x)$ quindi l'asintoto verticale di f coincide con l'asintoto orizzontale di f^{-1}.



2) Data $h(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ si osserva che h è la funzione composta $h(x) = 2^{f(x)}$ quindi

   $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ e la retta $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$.

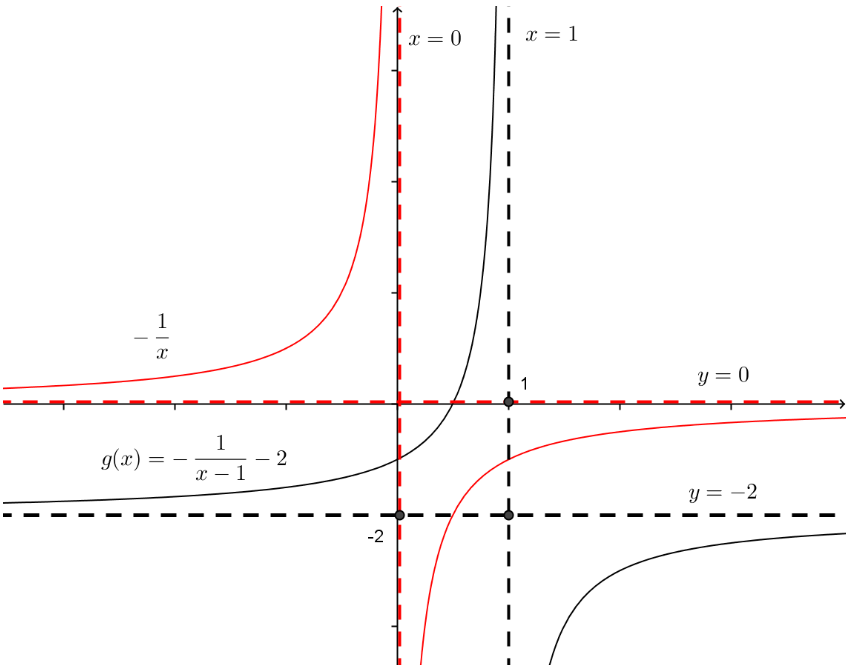
   Ma, poiché $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$ la retta $x = 0$ non è asintoto verticale per $x \to 0^-$.

   Inoltre, poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ la retta di equazione $y = 1$ è **asintoto orizzontale** sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

3) Sia $g(x) = \frac{1}{1-x} - 2$, poiché $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$ la retta $x = 1$ è asintoto verticale per $x \to 1^+$ inoltre, poiché $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ la retta $x = 1$ è anche asintoto verticale per $x \to 1^-$.

   Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ la retta di equazione $y = 2$ è **asintoto orizzontale** sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

   Si osservi che $g(x) = \frac{1}{1-x} - 2 = -\frac{1}{x-1} - 2$ quindi il grafico di g si può ottenere dal grafico di $-\frac{1}{x}$ operando una traslazione di +1 rispetto all'asse x e di -2 rispetto all'asse y lo stesso avviene per gli asintoti.



4) Date le funzioni $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$ definite in R di cui si conosce l'andamento qualitativo, ci si chiede qual è l'andamento a $+\infty$ e a $-\infty$ delle funzioni $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = 2^{x^2}$ e $(f \circ h \circ g)(x) = f(h(g(x))) = 2^{-x^2}$

- $(h\circ g)(x)=h(g(x))=2^{x^2}$ è una funzione pari e $\lim_{x\to+\infty}2^{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2^{x^2}=+\infty$ quindi non ha asintoti orizzontali.
- $(f\circ h\circ g)(x)=2^{-x^2}$ è una funzione pari e $\lim_{x\to+\infty}2^{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}2^{-x^2}=0$ quindi la retta di equazione $y=0$ è **asintoto orizzontale** sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$.

I grafici si possono disegnare sapendo inoltre che $(h\circ g)(0)=(f\circ h\circ g)(0)=2^0=1$, che per x>0 $(h\circ g)(x)=2^{x^2}$ è strettamente crescente e che conseguentemente $(f\circ h\circ g)(x)=2^{-x^2}$ è strettamente decrescente.