Lezione 11 – **Calcolo dei limiti (2)**

Il numero di Nepero

11.1 Il problema dell'investimento di lungo periodo

Un cliente, avendo scelto per l'investimento di un capitale C la proposta per cui il capitale investito cresce con un tasso annuale inversamente proporzionale al tempo, vuole sapere qual è il valore a cui tende l'investimento in tempi lunghi.

Definizione 11.1 (Programma base)

Sia $a_n : N \to R,\ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, si può dimostrare che esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Il numero e è detto numero di Nepero, è un numero irrazionale (non può essere scritto come frazione di due interi) e trascendente (non può essere lo zero di nessun polinomio di coefficienti interi); la sua approssimazione è

$$e \approx 2.71828182846...$$

Esempio 11.1

Proviamo a calcolare qualche valore della successione generatrice del numero di Nepero

$a_1 = 2$

$a_2 = 2.37$

$a_3 = 2.44$

...

$a_{100} = 2.70$

$a_{1000} = 2.717$

Per valori di a molto alti notiamo che la successione è sempre compresa tra due e tre, e poiché è strettamente crescente, allora il limite all'infinito corrisponde con il suo estremo superiore che è il numero e.

Estendendo il risultato precedente al caso continuo in cui $f : X \to R,\ X = R/[-1,\ 0],\ f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

allora il limite vale

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ e } \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = e$$

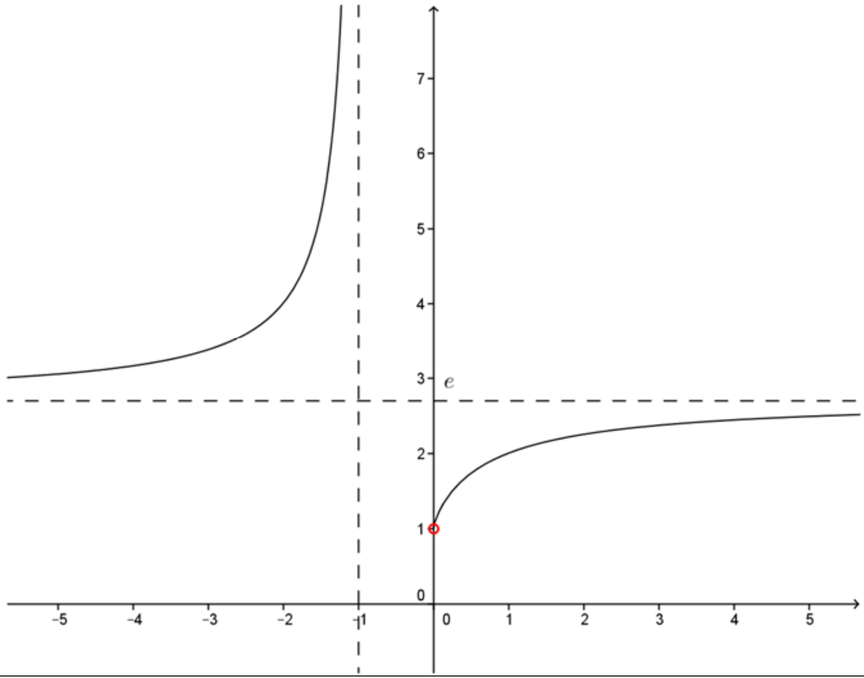
quindi $y = e$ è asintoto orizzontale della funzione per x tendente a $+\infty, -\infty$,

Osservazione

L'intevallo [-1,0] va escluso dal dominio di f in quanto per tali valori la base dell'esponenziale risulta negativa, i punti -1 e 0 sono di frontiera del dominio e per disegnare il grafico di $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ vanno calcolati, oltre ai limiti a $+\infty, -\infty$ anche i seguenti limiti:

$\lim_{x\to-1^-}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-1^-} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to-1^-} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{(-1)\cdot(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$ quindi $x = -1$ è asintoto verticale per x tendente a -1 da sinistra,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$$



Altri limiti notevoli (Programma avanzato)

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{\frac{x}{a}a}$ pongo $x/a = t,\ t\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{\frac{x}{a}a} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot a} = e^a$

2) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$; esso presenta la forma indeterminata (1^∞), se sostituiamo $\frac{1}{x} = t,\ t\to+\infty$

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^t = e^a$, utilizzando questo limite si può calcolare il seguente.

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(x+1) = \lim_{x\to 0}\log_a(x+1)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$.

se $a=e$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

4) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, per calcolare questo limite utilizziamo $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e$.

Posta una nuova variabile $t = \log_a(1+x)$ per $x\to 0$ si ha , inoltre $x = a^t - 1$ quindi il limite

diventa $\lim_{t\to 0}\frac{t}{a^t-1} = \frac{1}{\log_a e}$ da cui $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{a^x-1}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x-1}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$

se $a=e$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Per il calcolo dei seguenti limiti si usano le uguaglianze goniometriche

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}\cdot x =$

$= 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot x = 2\cdot 0 = 0$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}$

Applicazione

L'andamento dell'investimento è dato da una successione del tipo $a_t : N \to R,\ a_t = C\left(1+\dfrac{a}{t}\right)^t$, si è dimostrato che $\lim\limits_{t\to+\infty} C\left(1+\dfrac{a}{t}\right)^t = Ce^a$ quindi dipende da *a*.

Confronto di infiniti e di infinitesimi

11.2 Il problema break even nel tempo

Se $f(t)= S(Q(t))$ con $t\in[0,+\infty)$ è la funzione costo di produzione di un bene nel tempo inteso come variabile continua, ci si chiede come è possibile determinare l'andamento puntuale di f cioè, per t fissato per esempio $t=2$, come si può caratterizzare la "velocità" di crescita o decrescita di f al tempo $t=2$?

Definizione 11.2

$f : X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in R$ punto di accumulazione per X, se

1) $f(x) \to +\infty$ oppure $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$, allora f si dice **infinito** per $x \to x_0$
2) $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora f si dice **infinitesimo** per $x \to x_0$

Esempi 11.2

$x-2$ è **infinitesimo** per $x \to 2$, infatti $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$;

$\dfrac{1}{x-2}$ è l'**infinito** per $x \to 2$ infatti $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Definizione 11.3 (Programma base)

$f, g : X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in R$ punto di accumulazione per X, f e g infinitesimi per $x \to x_0$

se $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine; quando $L=1$ i due infinitesimi di dicono asintotici o equivalenti: $f(x) \approx g(x)$ per $x \to x_0$.

se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ si dice che $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$, $f(x)$ "o piccolo" di $g(x)$:

$f(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$.

se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty\quad(-\infty)$ si dice che $f(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$

$g(x)=o(f(x))$ per $x\to x_0$.

se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi non confrontabili.

Esempio 11.3

1) $\left(x^2-4\right)^2$ è infinitesimo dello stesso ordine di $(x-2)^2$ per $x\to 2$; infatti

$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(x+2)^2=16$.

2) $\sin x$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x per $x\to 0$ infatti $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Essendo L=1 , le funzioni $\sin x$ e x sono in relazione di asintotico o infinitesimi equivalenti.

3) $\ln(x+1)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x per $x\to 0$ infatti $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

Essendo L=1 , le funzioni $\ln(x+1)$ e x sono in relazione di asintotico o infinitesimi equivalenti.

4) $\sqrt{x}-1$ è infinitesimo dello stesso ordine di $x-1$ per $x\to 1$; infatti

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}=2$.

Infinitesimi campione: $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$ e $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ (Programma avanzato)

1) $f(x)\to 0$ per $x\to x_0$, allora f si dice **infinitesimo di ordine α** per $x\to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha}=l\neq 0,\pm\infty$$

2) $f(x)\to 0$ per $x\to+\infty\,(-\infty)$, allora f si dice **infinitesimo di ordine α** per $x\to+\infty\,(-\infty)$ se

$$\lim_{x\to\infty}f(x)x^\alpha=l\neq 0,\pm\infty$$

Esempio 11.4

1) $\left(x^2-4\right)^2$ è infinitesimo di ordine 2 per $x\to 2$; infatti $\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(x+2)^2=16$.

2) $\sqrt{\sin x}$ è un infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$ per $x\to 0^+$ infatti $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin x}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}=1$.

3) $\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$ è un infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$ per $x\to 0^+$ infatti $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$.

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}+1}$ è infinitesimo di ordine $\dfrac{1}{3}$ per $x \to +\infty$; infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}+1} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{1-x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} = -1 .$$

Definizione 11.4 (Programma base)

$f, g : X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in R$ punto di accumulazione per X , f e g infiniti per $x \to x_0$

se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine

se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad (-\infty)$ si dice che $f(x)$ è infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$

se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ si dice che $f(x)$ è infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$

se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ non esiste si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti non confrontabili.

Esempi 11.5

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+\sqrt{x^2+1}}{x^3+\sqrt[3]{x^5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^3} = 2$; infatti $\sqrt{x^2+1}$ e $\sqrt[3]{x^5}$ sono infiniti di ordine inferiore rispettivamente a x^3 .

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\sqrt{x^2+1}}{x^3+\sqrt[3]{x^5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = 0$; infatti $\sqrt{x^2+1}$ e $\sqrt[3]{x^5}$ sono infiniti di ordine inferiore rispettivamente a x^2 e a x^3 .

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt[3]{x^5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{x^5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^{\frac{1}{3}} = +\infty$; infatti $\sqrt{x^2+1}$ e x sono infiniti di ordine inferiore rispettivamente a x^2 e a $\sqrt[3]{x^5}$.

Infiniti campione: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{x-x_0} = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ (Programma avanzato)

5) $f(x) \to +\infty \quad (-\infty)$ per $x \to x_0$, allora f si dice **infinito di ordine α** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x)(x-x_0)^{\alpha} = l \neq 0, \pm\infty$$

6) $f(x) \to +\infty \quad (-\infty)$ per $x \to \pm\infty$, allora f si dice **infinito di ordine α** per $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = l \neq 0, \pm\infty$$

Esempi 11.6

$\dfrac{1}{\cos x - 1}$ è l'infinito di ordine 2 per $x \to 0$; infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{(\cos x)^2-1} x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{(\sin x)^2} x^2 = \lim_{x\to 0} (\cos x+1) \frac{x^2}{(\sin x)^2} = 2 .$$

11.2 Applicazione al problema break even nel tempo continuo

Fissato t=2 e un incremento h della variabile t, il corrispondente incremento della funzione $f(t)$ è dato dalla differenza $f(2+h) - f(2)$.
Tale incremento è una funzione di h cioè dipende dall'incremento h si può quindi indicare come

$$\Delta(h)= f(2+h) - f(2)$$

Si è usata la lettera Δ invece che g, h o qualunque altra perché questa è una delle lettere normalmente usate per indicare un incremento, si dice infatti "in questo periodo c'è stato un delta di aumento di spesa".
In pratica una variazione di h produce una variazione di $\Delta(h)$ quindi non è il valore di $\Delta(h)$ ad interessare ma il suo "rapporto" con h quindi

$$\frac{\Delta(h)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

che è il rapporto fra gli incrementi corrispondenti delle due variabili t e f.
Per esempio, se si ipotizza che $f(t)=\ln(t+1)$, si ha

$$\frac{\Delta(h)}{h} = \frac{\ln(3+h) - \ln(3)}{h}$$

Per diversi valori di h si hanno diversi valori di questo rapporto, se si è interessati al valore relativo ad un incremento h "sempre più piccolo" si può calcolare il limite del rapporto per $h \to 0^+$ dove numeratore e denominatore sono infinitesimi quindi si ha una forma di indecisione del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ che è calcolabile usando un limite notevole.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Delta(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(3+h) - \ln(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln\frac{3+h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{3}\right)}{h} = \frac{1}{3}\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{3}\right)}{\frac{h}{3}} = \frac{1}{3}.$$

In conclusione la "velocità" di crescita della funzione f per t=2 è $\frac{1}{3}$, **provare per credere!**
Se si costruisce una tabella con Excel per diversi valori di h si può verificare questo calcolo teorico.

Questioni aperte

1) L'ultimo calcolo si può fare anche se $h<0$?
2) E' sempre vero che il rapporto di incrementi è una forma di indecisione per $h \to 0$?
3) Cosa succede se $\Delta(h)$ non è infinitesimo?
4) Cosa rappresenta geometricamente il $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h}$?
5) Si è dato un nome al valore del $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h}$?